
Geometría Plana

Efraín Soto Apolinar

TÉRMINOS DE USO



Derechos Reservados © 2010.

Todos los derechos reservados a favor de Efraín Soto Apolinar.

Soto Apolinar, Efraín.

Geometría Plana

Primera edición.

Incluye índice.

México. 2010.

El contenido de este libro corresponde al curso de Matemáticas para Bachillerato: Segundo Semestre

Apreciado lector, usted puede sentirse libre de utilizar la información que se encuentra en este material, bajo las siguientes condiciones:

Atribución: Debe dar crédito al autor del libro, independientemente del medio que se utilice para su divulgación (impresa, electrónica, en línea, etc.)

Uso no comercial: No se permite el uso de este material ni de su contenido con fines comerciales y/o lucro en forma alguna. Puede utilizarlo con fines educativos o de divulgación de las ciencias. Se permite el uso por instituciones educativas públicas o privadas sin fines de lucro, con la condición de que no se aplique cargo, ni en especie ni en moneda, ni en cualquier otra forma, a los usuarios finales de este material, sean estos profesores, autoridades educativas, estudiantes o público en general interesado en la enseñanza y/o el aprendizaje de las matemáticas.

No Modificar: No se permite alterar, transformar, modificar, en forma alguna este material. Usted tiene permiso para utilizarlo «*como está y es*». No se permite ni agregar, ni eliminar, ni modificar: palabras, u oraciones, o párrafos, o páginas, o subsecciones, o secciones, o capítulos o combinaciones de las anteriores o parte alguna del libro.

Permisos: Puede contactar al autor de este material directamente a la cuenta de correo electrónico que aparece en los créditos. Si usted tiene una copia de este libro en formato PDF y desea publicarlo en algún sitio de Internet, primero solicite permiso al autor a través de un mensaje a la cuenta de correo electrónico que aparece en los créditos. No requiere de permiso alguno para imprimir una copia de este material para uso personal.

Responsabilidad: Ni el autor, ni el editor son responsables de cualquier pérdida o riesgo o daño (causal, incidental o cualquier otro), ocasionado debido al uso o interpretación de las definiciones que se incluyen en este diccionario.

Estrictamente prohibido el uso comercial de este material.

Índice de contenidos

1	Ángulos y Triángulos	1
1.1	Definición y clasificación de ángulos	3
1.2	Ángulos en el plano	7
1.2.1	Definición	7
1.2.2	Clasificación	7
1.2.3	Medición	9
1.2.4	Ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante	19
1.3	Triángulos	25
1.3.1	Definición y clasificación	25
1.3.2	Congruencia de triángulos	41
1.3.3	Teorema de Pitágoras	46
2	Polígonos y Circunferencia	55
2.1	Definición y Clasificación de Polígonos	57
2.1.1	Definición	57
2.1.2	Clasificación	58
2.1.3	Suma de ángulos	63
2.1.4	Triangulación de polígonos	67
2.1.5	Perímetros y áreas	68
2.2	Circunferencia	73
2.2.1	Definición y elementos	73
2.2.2	Rectas tangentes a una circunferencia	76
2.2.3	Ángulos en la circunferencia	78
3	Funciones Trigonómicas	79
3.1	Funciones trigonométricas para ángulos agudos	81
3.1.1	Conversión de grados a radianes	82
3.1.2	Funciones recíprocas	84
3.1.3	Cálculos de valores para ángulos notables	85
3.1.4	Resolución de triángulos rectángulos	86
3.1.5	F. Trig. para ángulos de cualquier magnitud	91

4 Leyes de Senos y Cosenos	97
4.1 Ley de senos	99

Capítulo 1

Ángulos y Triángulos

Por aprender...

1.1. Ángulos en el Plano

1.1.1. Definición

1.1.2. Clasificación

1.1.3. Medición

1.1.4. Ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante

1.2. Triángulos

1.2.1. Definición y clasificación

1.2.2. Congruencia

1.2.3. Semejanza

1.2.4. Teorema de Pitágoras

Por qué es importante...

En el aprendizaje de cualquier ciencia, es importante conocer la terminología con la que estamos hablando.

1.1 DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

La palabra «geometría» viene de las palabras griegas «geo» que significa *tierra* y la palabra «metría» que significa medición. Podemos traducir esta palabra como: «medición de la tierra».

La geometría es la rama de las matemáticas que estudia las mediciones a través del estudio de las propiedades y relaciones de los puntos, líneas, ángulos, superficies y los sólidos.

La geometría descansa sobre varios conceptos básicos como el punto y la recta. Entre estos conceptos está el de *ángulo*, que se introduce en esta sección.

PUNTO

Objeto geométrico que sirve para indicar una ubicación. Un punto tiene dimensiones largo, ancho y alto igual a cero unidades.

Generalmente denotaremos a un punto con una letra mayúscula:

**Definición 1****LÍNEA**

Objeto geométrico que tiene solamente longitud diferente de cero y que se genera al mover un punto.

**Definición 2**

Observa que en geometría, cuando decimos «línea», no nos referimos necesariamente a una línea recta.

RECTA

Línea que se extiende en ambos sentidos sin cambiar de dirección:



La recta se denota por ℓ .

Definición 3

Otra forma de denotar a una recta que pase por los puntos A y B es: $\overleftrightarrow{AB}$.



En el plano dos rectas pueden cortarse (compartir uno de sus puntos) o pueden no cortarse (no compartir ninguno punto).

No es posible que dos rectas compartan dos puntos, pues de ser así, ambas rectas serían la misma. Recuerda, por dos puntos pasa solamente una recta.

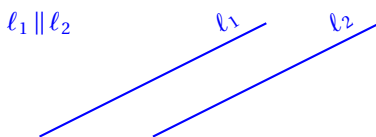
Cuando no se cortan se llaman rectas paralelas.

RECTAS PARALELAS

Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 que se encuentran en un mismo plano son paralelas si no se cortan por más que se prolonguen.

En la siguiente figura, las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas. Esto se denota como: $\ell_1 \parallel \ell_2$.

Definición 4



Euclides propuso el siguiente postulado para las paralelas:

Comentario

POSTULADO DE LAS PARALELAS

Por un punto cualquiera puede trazarse una paralela a una recta dada, y solamente una.

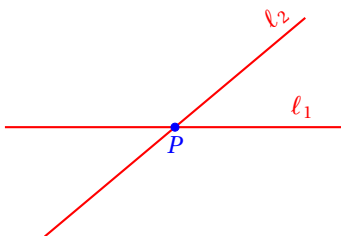
Cuando dos rectas se cortan comparten solamente uno de sus puntos.

Definición 5

PUNTO DE INTERSECCIÓN

Punto que pertenece a dos objetos geométricos a la vez.

En la siguiente figura, el punto P pertenece a las rectas ℓ_1 y ℓ_2 :

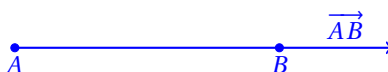


El punto P es el punto de intersección de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 .

Definición 6

RAYO

Una parte de una recta que tiene un punto inicial y no tiene punto final.

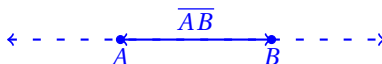


Para denotar al rayo siempre indicamos primero el punto inicial y después otro punto cualquiera por el cual también pase.

Definición 7

SEGMENTO

Parte de una recta delimitada por dos puntos. Estos puntos son los extremos del segmento.



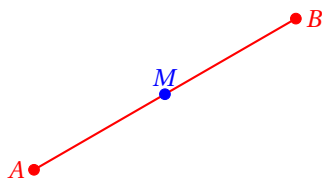
El segmento con extremos en los puntos A y B se denota por $\overline{AB}$.

Definición 8

PUNTO MEDIO

Es el punto que divide un segmento en dos segmentos de la misma medida.

La siguiente figura muestra un segmento $\overline{AB}$ con su punto medio M :

**SUPERFICIE**

Objeto geométrico que tiene longitud y ancho diferentes de cero.

Definición 9

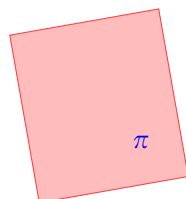
Una bandera ondeando es un buen ejemplo de superficie, si suponemos que el grosor de la tela es cero.

PLANO

Superficie tal que al tomar cualesquiera dos de sus puntos, la línea recta que los conecta está completamente en esa superficie.

Definición 10

La siguiente figura muestra un plano:



El símbolo π denota al plano mostrado.

GEOMETRÍA PLANA

Rama de la Geometría que estudia las propiedades de los objetos geométricos en el plano.

Definición 11

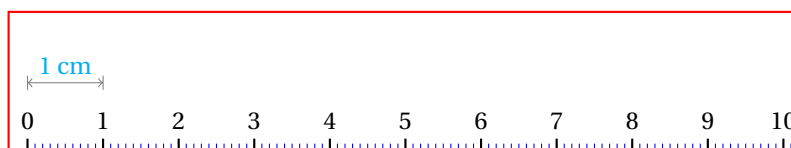
Para realizar trazos en geometría utilizaremos una regla y un compás.

REGLA

Instrumento que se utiliza para hacer mediciones y para trazar rectas en el plano.

Definición 12

La siguiente figura muestra una regla:



En geometría plana solamente nos interesa dibujar rectas. No utilizaremos la regla para hacer mediciones.

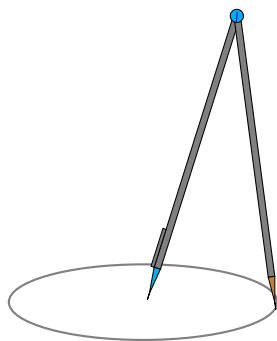
COMPÁS

Instrumento que se utiliza en geometría para comparar longitudes y trazar arcos y círculos.

Definición 13

El compás está compuesto de dos brazos. En uno de ellos está una punta de lápiz para dibujar los trazos y en el otro está una punta (generalmente metálica) que sirve de apoyo sobre el papel en el cual se trazará el dibujo.

La siguiente figura muestra un compás:



1.2 ÁNGULOS EN EL PLANO

Con las definiciones dadas en la sección anterior podemos iniciar el estudio de la geometría plana.

Los objetos más elementales que sirven para estudiar las propiedades de otros objetos geométricos son los que se han definido hasta aquí.

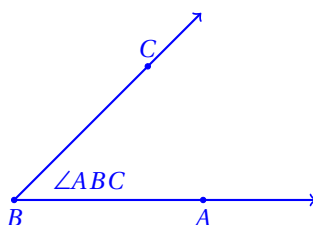
El siguiente objeto en orden de complejidad es el ángulo plano, que se define en la siguiente sección.

1.2.1 DEFINICIÓN

ÁNGULO

Un ángulo plano está formado por dos rayos que tienen un mismo punto inicial. El vértice del ángulo es el punto inicial común a los dos rayos.

Definición 1



Un ángulo puede denotarse por el símbolo $\angle$, seguido de tres letras mayúsculas o por una letra griega, por ejemplo, α .

La medida del ángulo da una idea de la abertura entre sus lados.

Cuando dos ángulos se pueden superponer haciendo coincidir el sus vértices y sus lados, decimos que los dos ángulos son iguales.

IGUALDAD DE ÁNGULOS

Dos ángulos son iguales si tienen la misma medida.

Definición 2

Los siguientes ángulos tienen la misma medida:



Es decir, si la abertura entre los lados de cada ángulo es igual, los ángulos tienen la misma medida.

Para facilitar el uso del estudio de la geometría plana se han clasificado los ángulos de acuerdo a su medida.

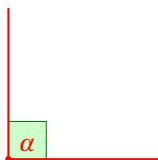
1.2.2 CLASIFICACIÓN

Cuando dos rectas se cortan forman 4 ángulos. Cuando los 4 ángulos son iguales, tenemos cuatro ángulos rectos.

Definición 1**ÁNGULO RECTO**

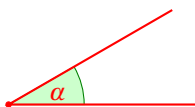
Ángulo que se forma cuando dos rectas se cortan formando cuatro ángulos de la misma medida.

El siguiente ángulo es recto:

**Definición 2****ÁNGULO AGUDO**

Ángulo cuya medida es menor a la de un ángulo recto.

El ángulo α mostrado en la siguiente figura es agudo:

**Definición 3****ÁNGULO LLANO**

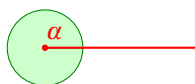
Ángulo cuya medida es igual a la de dos ángulos rectos.

El ángulo α mostrado en la siguiente figura es llano:

**Definición 4****ÁNGULO PERIGONAL**

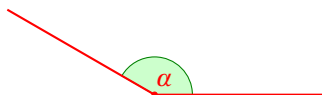
Ángulo que mide lo mismo que cuatro ángulos rectos.

En la siguiente figura el ángulo α es perigonal.

**Definición 5****ÁNGULO OBTUSO**

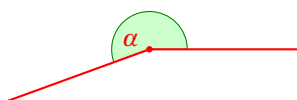
Ángulo cuya medida es mayor a la de un ángulo recto pero menor a la de un ángulo llano.

El ángulo α mostrado en la siguiente figura es obtuso:

**Definición 6****ÁNGULO ENTRANTE**

Ángulo que mide más que un ángulo llano, pero menos que un ángulo perigonal.

En la siguiente figura, el ángulo α es entrante:

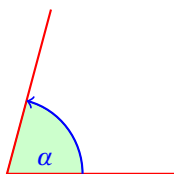


1.2.3 MEDICIÓN

Ya se mencionó que la medida del ángulo da una idea de la abertura entre sus lados.

A mayor abertura entre los lados del ángulo, mayor es su medida.

En geometría, los ángulos se miden siempre en el sentido contrario de giro de las manecillas del reloj.



Si un ángulo se requiere medir en el mismo sentido en que giran las manecillas del reloj, consideramos su medida negativa.

Las unidades de medida del ángulo que consideraremos por ahora son los grados sexagesimales.

GRADOS SEXAGESIMALES

Unidad de medida de ángulo equivalente a un $1/360$ parte de la vuelta completa.

Un grado sexagesimal se denota con el símbolo: $^\circ$, y generalmente se le llama diciendo solamente «grado».

Definición 1

El instrumento que utilizamos para medir ángulos se llama «transportador».

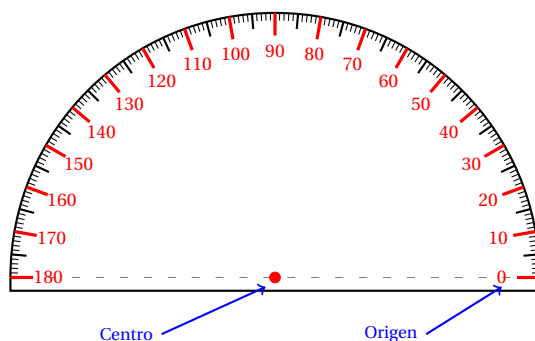
TRANSPORTADOR

Instrumento para medir la magnitud de un ángulo.

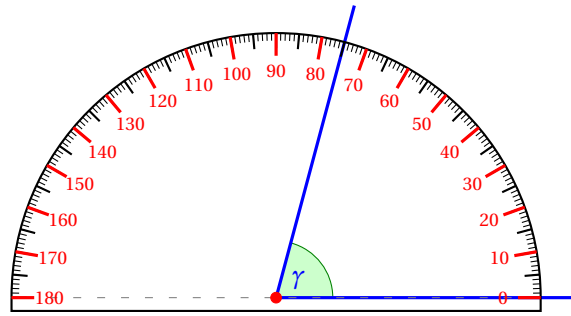
La escala que utilizan los transportadores es el grado sexagesimal.

Definición 2

La siguiente figura muestra un transportador:



Para medir un ángulo primero ubicamos el centro del transportador en el vértice del ángulo, y el origen (cero) sobre el lado inicial del ángulo, como se muestra en la siguiente figura:



La medida del ángulo γ mostrado en la figura anterior es: $\gamma = 75^\circ$.

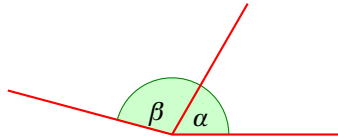
También frecuentemente encontraremos dos ángulos que comparten el vértice y un lado.

Definición 3

ÁNGULOS ADYACENTES

Dos ángulos son adyacentes cuando tienen el mismo vértice y comparten un lado común ubicado entre ellos.

En la siguiente figura los dos ángulos son adyacentes:



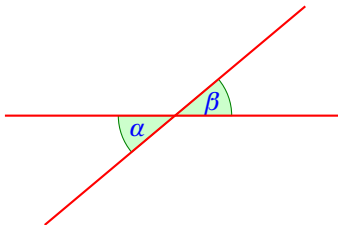
Los ángulos α y β tienen un mismo punto por vértice y tienen un lado en común que queda entre los otros lados, por eso son adyacentes.

Definición 4

ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

Dos ángulos son opuestos por el vértice si la prolongación de los lados de uno son los ángulos del otro.

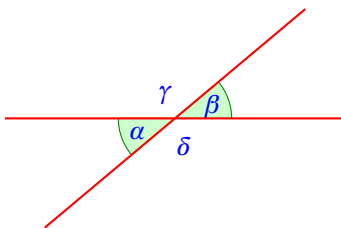
Los siguientes ángulos son opuestos por el vértice:



Teorema 1

Los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida.

Consideramos la figura:



De la figura es evidente que: $\alpha + \delta = 180^\circ$, y también que: $\beta + \delta = 180^\circ$.
Esto nos permite igualar:

$$\alpha + \delta = \beta + \delta$$

Restando δ de ambos lados de la igualdad obtenemos: $\alpha = \beta$.

En palabras, los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida. ■

Otros pares de ángulos que se definen en geometría por su frecuente aparición en la resolución de problemas son los que a continuación se mencionan.

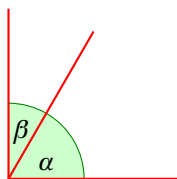
ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es igual a la medida de un ángulo recto.

En otras palabras, si la suma de dos ángulos es igual a 90° , entonces los ángulos son complementarios.

Definición 5

En la siguiente figura, los ángulos α y β son complementarios.



No se requiere que los ángulos sean adyacentes para que sean complementarios. Basta con que la suma de sus medidas sea 90° .

Entonces decimos que el ángulo α es el complemento del ángulo β y también que el ángulo β es el complemento del ángulo α .

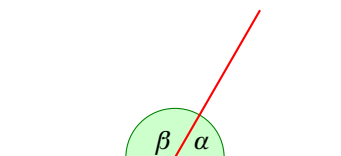
ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es igual a la medida de un ángulo llano.

En otras palabras, si la suma de dos ángulos es igual a 180° , entonces los ángulos son complementarios.

Definición 6

En la siguiente figura, los ángulos α y β son suplementarios.



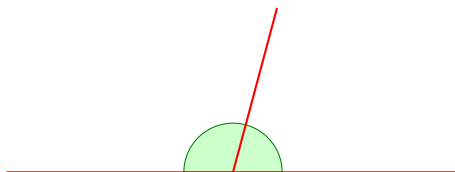
De manera semejante a los ángulos complementarios, no se requiere que los ángulos sean adyacentes para que sean suplementarios. Basta con que la suma de sus medidas sea 180° .

Entonces decimos que el ángulo α es el suplemento del ángulo β y también que el ángulo β es el suplemento del ángulo α .

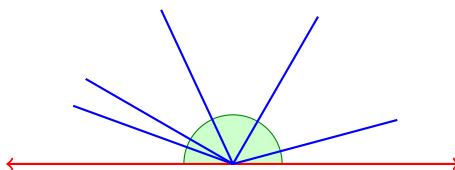
Observa que la suma de dos ángulos adyacentes que se forman al cortarse dos rectas es igual a 180° .

En otras palabras, si la suma de dos ángulos adyacentes es igual a 180° , entonces los lados no comunes están sobre una línea recta.

También podemos decir que si dos ángulos adyacentes son suplementarios, entonces sus lados externos están en la misma línea recta.



Más aún, si formamos varios ángulos con vértice común y en uno de los lados de una línea recta, la suma de todos ellos es igual a 180° :



Teorema 2 Si dos ángulos tienen el mismo suplemento son iguales.

Si los ángulos α y β tienen el mismo suplemento, denotado por ξ , entonces cumplen:

$$\begin{aligned}\alpha + \xi &= 180^\circ & \Rightarrow & \alpha = 180^\circ - \xi \\ \beta + \xi &= 180^\circ & \Rightarrow & \beta = 180^\circ - \xi\end{aligned}$$

Como ambos, α y β son iguales a $180 - \xi$, deben ser iguales entre sí. ■

Este mismo método puede utilizarse para demostrar el siguiente:

Teorema 3 Si dos ángulos tienen el mismo complemento son iguales.

El cual se te queda como ejercicio.

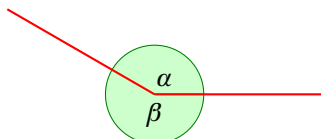
Definición 7

ÁNGULOS CONJUGADOS

Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es igual a la medida de un ángulo perigonal.

En otras palabras, si la suma de dos ángulos es igual a 360° , entonces los ángulos son conjugados.

Los ángulos α y β mostrados en la siguiente figura son conjugados:



Entonces decimos que el ángulo α es el conjugado del ángulo β y también que el ángulo β es el conjugado del ángulo α .

Cuando dos rectas se cortan, pueden formarse cuatro ángulos iguales.

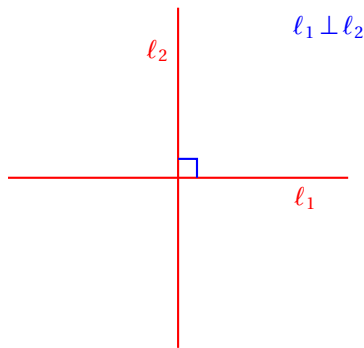
Entonces decimos que las rectas son perpendiculares.

RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 son perpendiculares si al cortarse forman cuatro ángulos rectos, y esto se denota por $\ell_1 \perp \ell_2$.

Definición 8

En la siguiente figura, las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son perpendiculares:



Solamente se puede trazar una perpendicular a una recta desde un punto.

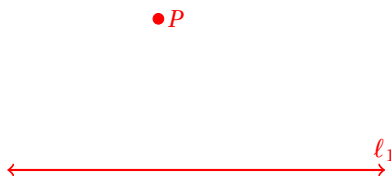
Teorema 4

Para trazar una perpendicular a una recta desde un punto fuera de ésta podemos usar el siguiente procedimiento.

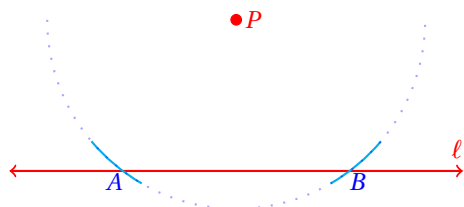
Traza una perpendicular a una recta dada desde un punto externo.

Ejemplo 1

- Empezamos dibujando la recta a la cual se le trazará la perpendicular:

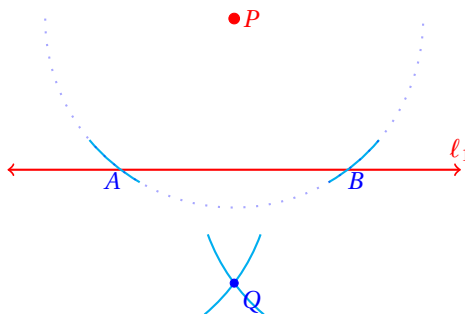


- Ahora vamos a trazar una perpendicular que pase por el punto P .
- Con este fin, apoyando el compás en el punto P trazamos dos arcos que corten la recta ℓ_1 como se muestra enseguida:

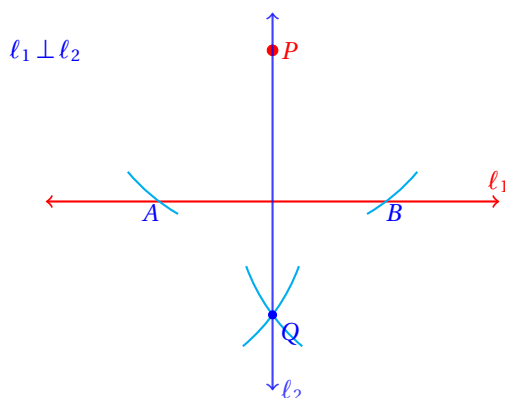


donde A y B son los puntos de intersección del arco con la recta ℓ_1 .

- Ahora vamos a trazar, con el mismo radio, apoyándonos primero en A y luego en B dos arcos que se corten.
- El punto de intersección de los dos arcos lo llamaremos Q , como se muestra enseguida:



- Trazamos la recta que pasa por los puntos P y Q .
- Denotamos a esta recta por ℓ_2 .



- Se cumple que $\ell_1 \perp \ell_2$.

Este mismo procedimiento se utiliza para dividir un segmento en dos partes iguales.

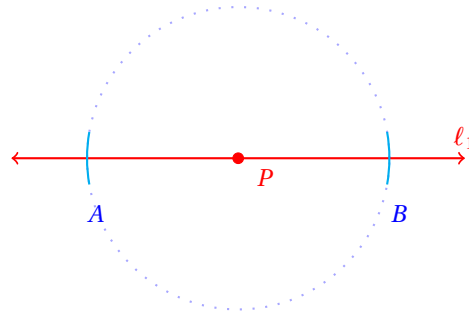
Ejemplo 2

Traza una perpendicular a una recta dada desde uno de sus puntos.

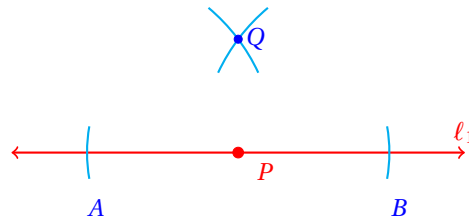
- Empezamos dibujando la recta ℓ_1 y el punto P por el cual pasará la perpendicular a ℓ_1 :



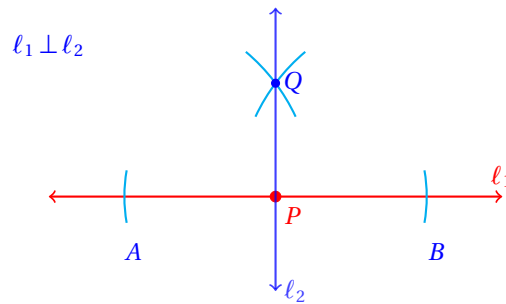
- Ahora, con ayuda del compás vamos a trazar dos arcos que corten la recta ℓ_1 apoyándonos en el punto P , como se muestra enseguida:



- Ahora vamos a trazar, con una mayor abertura del compás, dos arcos que se corten, apoyándonos primero en el punto A y luego en B.



- Ahora basta unir los puntos P y Q para obtener la recta ℓ_2 perpendicular a ℓ_1 :

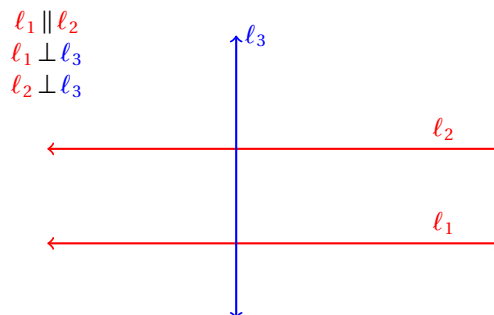


Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 situadas en un mismo plano y perpendiculares a una tercera recta ℓ_3 , son paralelas entre sí.

Teorema 5

Si las rectas ℓ_1 y ℓ_2 no fueran paralelas, se podrían prolongar lo suficiente hasta que se cortaran en un punto de intersección P.

Entonces, sería posible trazar dos perpendiculares a la recta ℓ_3 desde el punto P, lo cual es imposible de acuerdo al teorema anterior.



También tenemos el siguiente teorema relacionado con el anterior:

Teorema 6

Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 situadas en un mismo plano y paralelas a una tercera recta ℓ_3 , son paralelas entre sí.

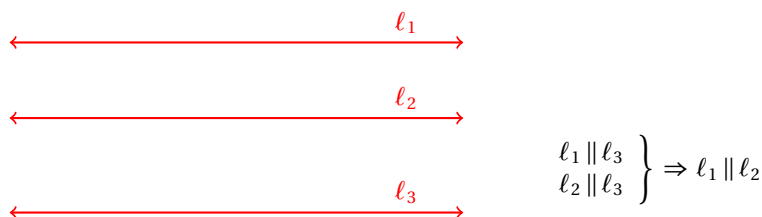
Empezamos suponiendo que ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas a ℓ_3 .

Debemos demostrar que $\ell_1 \parallel \ell_2$.

Si no lo fueran, entonces deberían cortarse en un punto de intersección P .

Esto significa que debería ser posible trazar dos rectas paralelas a la recta ℓ_3 desde el punto P , lo cual es imposible por el postulado de las paralelas.

Entonces, $\ell_1 \parallel \ell_2$.



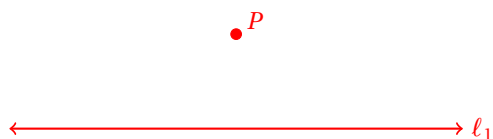
Ahora veremos cómo trazar una recta paralela a otra dada por un punto dado.

Obviamente, el punto dado debe ser externo a la recta dada, pues si el punto está sobre la recta, la paralela será ella misma, pues toda recta es paralela a sí misma.

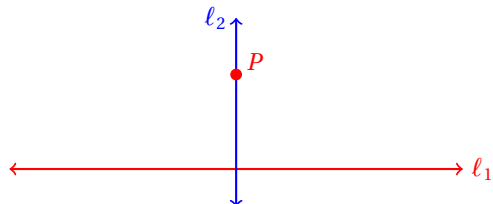
Ejemplo 3

Traza una recta paralela a una recta ℓ_1 dada por un punto P dado.

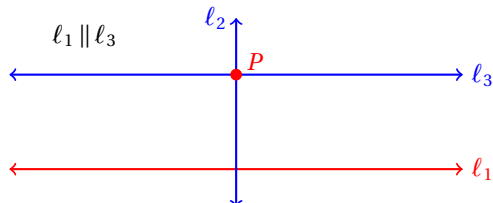
- Empezamos dibujando la situación:



- Ahora trazamos una recta perpendicular a ℓ_1 por el punto P :



- Para terminar trazamos una perpendicular a ℓ_2 que pase por el punto P :



- La recta ℓ_3 es paralela a ℓ_1 .

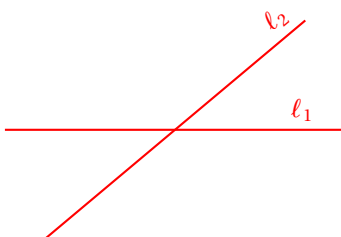
Si dos rectas se cortan, pero no son perpendiculares entonces se dice que son oblicuas.

RECTAS OBLÍCUAS

Dos rectas en un mismo plano son oblicuas si no son ni paralelas ni perpendiculares.

Definición 9

Las rectas ℓ_1 y ℓ_2 de la siguiente figura son oblicuas:



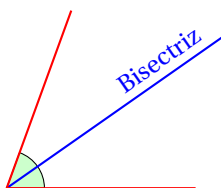
Algunas definiciones que servirán para resolver algunos problemas son las siguientes:

BISECTRIZ

Recta que divide a un ángulo en dos ángulos de la misma medida.

Definición 10

La siguiente figura muestra un ángulo con su bisectriz:

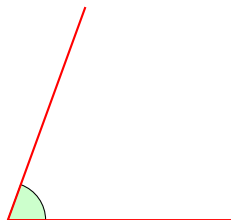


Para trazar la bisectriz de un ángulo utilizamos el procedimiento que se explica en el siguiente ejemplo.

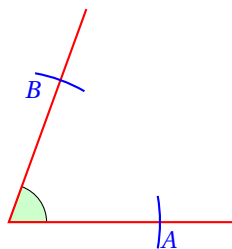
Traza una bisectriz a un ángulo dado.

Ejemplo 4

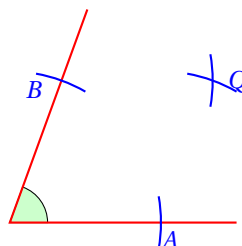
- Empezamos mostrando el ángulo al cual trazaremos la bisectriz:



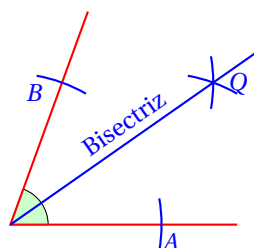
- Primero abrimos el compás para dibujar dos arcos que corten, uno a cada lado del ángulo:



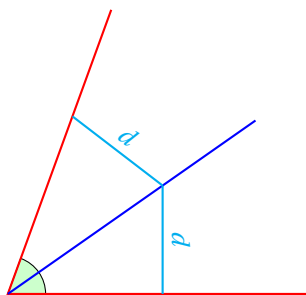
- Ahora, apoyándonos en cada punto de intersección generados con estos trazos, volvemos a trazar dos arcos, que se corten entre ellos.



- Para terminar sólo falta trazar la recta que pasa por el vértice del ángulo y el punto Q:



La bisectriz tiene la propiedad de que cada uno de sus puntos equidista de los lados del ángulo.



Observa cómo se construyó la bisectriz del ángulo: se tomaron dos puntos equidistantes del vértice del ángulo y con éstos se construyó un punto Q equidistante de los lados del mismo.

Al unir el vértice del ángulo con Q obtenemos la bisectriz del ángulo.

Ejercicios 1.2.3

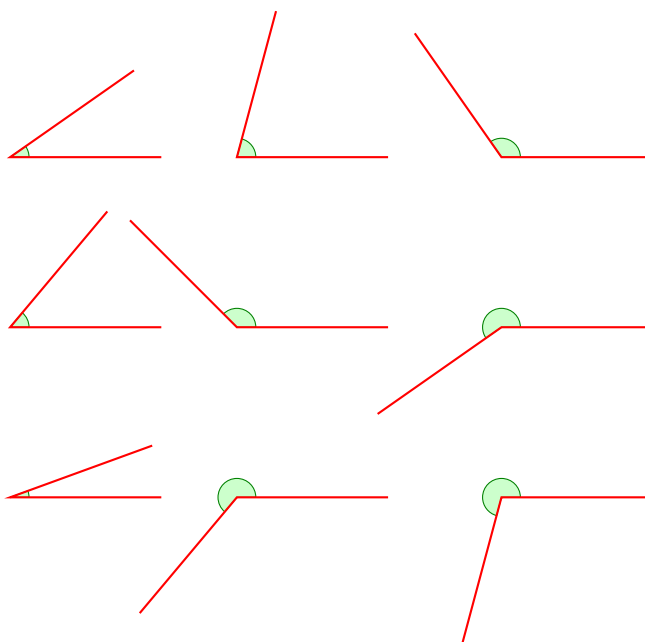
Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

- 1) Investiga la definición de los siguientes términos:

- | | |
|----------------|------------------|
| (A) Definición | (F) Corolario |
| (B) Axioma | (G) Demostración |
| (C) Postulado | (H) Hipótesis |
| (D) Teorema | (I) Conclusión |
| (E) Lema | (J) Problema |

de acuerdo a su significado en matemáticas.

2) Mide los siguiente ángulos:



- 3) Traza la bisectriz para cada uno de los ángulos del ejercicio anterior dibujándolos en tu cuaderno.
- 4) Demuestra que: *si dos ángulos tienen el mismo conjugado son iguales.*
- 5) Demuestra que: *Si dos ángulos suplementarios son iguales, entonces cada uno es un ángulo recto.*
- 6) Demuestra que: *Si dos ángulos complementarios son iguales, entonces cada uno mide 45° .*

1.2.4 ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS Y UNA SECANTE

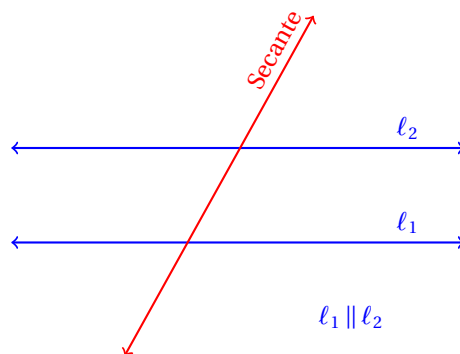
Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una tercer recta que no es paralela a ellas, se forman varios ángulos de interés.

SECANTE

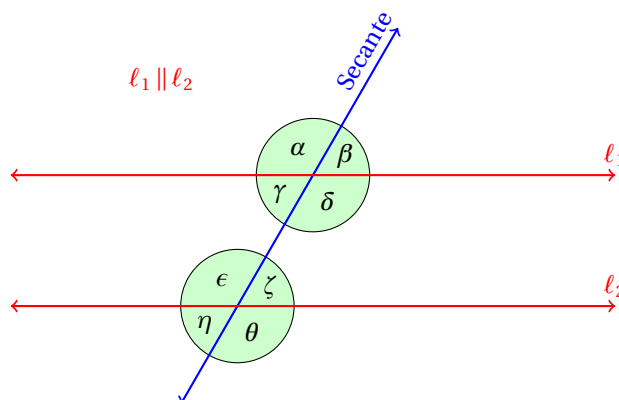
*La secante a una curva o a una figura geométrica es una recta que la corta.
La secante también se conoce como transversal cuando corta a varias rectas.*

Definición 1

La siguiente figura muestra dos rectas paralelas y una secante que las corta:



Al cortar la secante a las dos rectas paralelas se forman ocho ángulos:



Para simplificar su estudio, estos ángulos se clasifican de la siguiente manera.

Definición 2
ÁNGULOS INTERNOS

Ángulos que quedan entre las rectas paralelas.

En la figura anterior, los ángulos: γ , δ , ϵ y ζ son los ángulos internos.

Definición 3
ÁNGULOS EXTERNOS

Áquellos ángulos que quedan fuera de entre las rectas paralelas.

En la figura anterior, los ángulos: α , β , η y θ son los ángulos externos.

Definición 4
ÁNGULOS ALTERNOS

Aquellos pares de ángulos que quedan en lados opuestos de la recta secante y que no son adyacentes.

En la figura anterior, los pares de ángulos: (α, δ) , (β, ϵ) , (η, δ) y (θ, α) son algunos ejemplos de pares de ángulos alternos.

Definición 5
ÁNGULOS CORRESPONDIENTES

Aquellos pares de ángulos que quedan en el mismo lado de la recta secante, no son adyacentes y siendo uno interno y el otro externo.

En la figura anterior, los pares de ángulos: (α, ϵ) , (β, ζ) , (η, γ) y (δ, θ) son correspondientes.

ÁNGULOS ALTERNOS INTERNOS

Aquellos pares de ángulos que son a la vez tanto alternos como internos.

Definición 6

En la figura anterior, los pares de ángulos que son alternos internos son: (γ, ζ) y (δ, ϵ) .

ÁNGULOS ALTERNOS EXTERNOS

Aquellos pares de ángulos que son a la vez tanto alternos como externos.

Definición 7

En la figura anterior, los pares de ángulos que son alternos externos son: (α, θ) y (β, η) .

ÁNGULOS CORRESPONDIENTES INTERNOS

Aquellos pares de ángulos que son a la vez tanto correspondientes como internos.

Definición 8

En la figura anterior, los pares de ángulos que son correspondientes internos son: (γ, ϵ) y (δ, ζ) .

ÁNGULOS CORRESPONDIENTES EXTERNOS

Aquellos pares de ángulos que son a la vez tanto correspondientes como externos.

Definición 9

En la figura anterior, los pares de ángulos que son correspondientes externos son: (α, η) y (β, θ) .

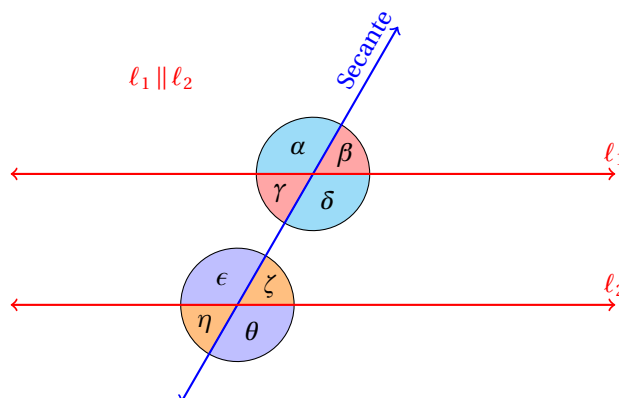
Ya se demostró que los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida, entonces, se cumple:

✓ $\alpha = \delta$

✓ $\beta = \gamma$

✓ $\epsilon = \theta$

✓ $\zeta = \eta$



Sin embargo, existen otros ángulos que son iguales y otros que tienen propiedades interesantes.

Por ejemplo, algunos pares de ángulos son suplementarios:

✓ (α, β)

✓ (γ, δ)

✓ (ϵ, ζ)

✓ (η, θ)

✓ (α, γ)

✓ (β, δ)

✓ (ϵ, η)

✓ (ζ, θ)

Si una secante corta dos rectas paralelas, los ángulos alternos internos son iguales.

Teorema 1

Para convencerte de que el teorema es verdadero, observa que si trasladamos la recta ℓ_2 poco a poco en dirección a la recta ℓ_1 sin cambiar su inclinación, entonces vamos a alcanzar la recta ℓ_1 y ambas rectas se confundirán.

Esto hace que el ángulo ϵ quede exactamente encima del ángulo α , que el ángulo ζ quede exactamente encima del ángulo β , que el ángulo η quede exactamente encima del ángulo γ , y que el ángulo θ quede exactamente encima del ángulo δ .

La igualdad de los ángulos que quedan superpuestos se justifica por el paralelismo de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 y que la recta secante no cambia de dirección, sino que se mantiene fija todo el tiempo.

Sin embargo, esto que se ha dado no es una demostración, sino solamente evidencia de que el teorema es verdadero.

Para dar una demostración completa de este teorema necesitaremos otros conceptos que se darán en secciones posteriores.

Del argumento anterior también se desprende el siguiente

Teorema 2 Si una secante corta dos rectas paralelas, los ángulos correspondientes son iguales.

Recuerda que los pares de ángulos correspondientes son

✓ (α, ϵ)

✓ (β, ζ)

✓ (γ, η)

✓ (δ, θ)

y precisamente estos pares de ángulos son los que se dijo quedan superpuestos al trasladar la recta ℓ_2 hasta que quede sobre la recta ℓ_1 .

También es cierto el siguiente

Teorema 3 Si una secante corta dos rectas paralelas, los ángulos alternos externos son iguales.

Considerando que $\alpha = \epsilon$ porque son ángulos correspondientes, y que $\epsilon = \theta$ porque son ángulos opuestos por el vértice, por transitividad, tenemos que $\alpha = \theta$, que son ángulos alternos externos. ■

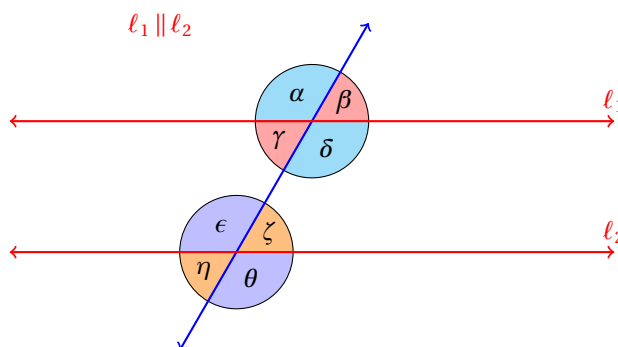
De manera semejante podemos probar que $\beta = \eta$.

De la figura es evidente también el siguiente

Teorema 4 La suma de dos ángulos internos adjuntos es igual a 180° .

Observa que la secante forma dos ángulos internos adjuntos en cada recta. Como los ángulos están sobre el mismo lado de la recta, la suma de todos ellos (solamente son dos) es igual a 180° .

Teorema 5 En la siguiente figura, los ángulos γ y ϵ son suplementarios. Igualmente, los ángulos δ y ζ son suplementarios.



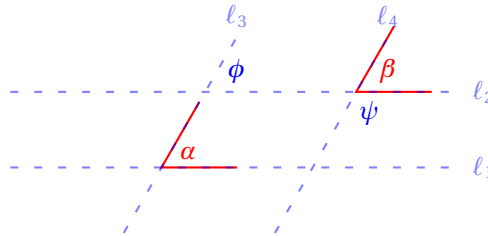
Dado que $\alpha = \epsilon$, y que $\alpha + \gamma = 180^\circ$, al sustituir ϵ en lugar de α demostramos que son suplementarios. De manera semejante se demuestra que $\delta + \zeta = 180^\circ$. ■

Estos teoremas sirven para demostrar otros teoremas.

Demuestra que si dos ángulos tienen paralelos sus lados uno a uno, entonces los ángulos, bien son iguales, bien son suplementarios.

Ejemplo 1

- Empezamos elaborando una figura para realizar una mejor imagen del problema:



- En la figura se han trazado también dos pares de rectas paralelas prolongando los lados de cada ángulo hasta que se intersecten mutuamente.
- Por hipótesis: $\ell_1 \parallel \ell_2$ y $\ell_3 \parallel \ell_4$.
- Considerando que las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas, vemos que el ángulo ϕ mostrado en la figura es igual al ángulo α , porque son correspondientes.
- Considerando que las rectas ℓ_3 y ℓ_4 son paralelas, vemos que el ángulo ϕ es igual al ángulo β porque son correspondientes.
- Y por transitividad, tenemos:

$$\alpha = \phi = \beta$$

- El otro caso consiste en que el ángulo dado sea ψ en lugar de β .
- Observa que en este caso también se cumple que los lados de los ángulos son paralelos uno a uno, pero ahora los ángulos no son iguales, sino complementarios.
- Con esto queda demostrado el teorema.

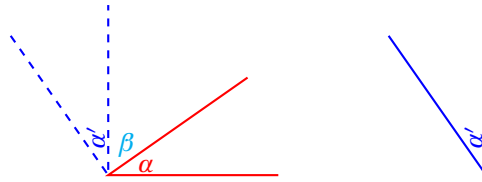
Demuestra que si dos ángulos tienen sus lados perpendiculares uno a uno, entonces, los ángulos son iguales o son suplementarios.

Ejemplo 2

- De nuevo empezamos dibujando la situación:



- Podemos trasladar uno de los ángulos para que coincidan en sus vértices:

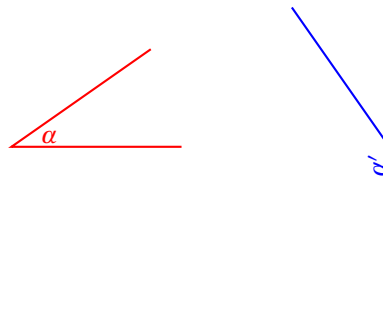


- Dado que los lados de los ángulos (uno a uno) son perpendiculares, los ángulos α y β son complementarios, al igual que los ángulos α' y β .

- Esto nos permite escribir:

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta$$

- Al restar β en ambos lados de la igualdad obtenemos el resultado buscado.
- El otro caso, en el que α y β sean suplementarios se obtiene cuando los lados del ángulo α' son como se indica en la siguiente figura:



Ejercicios 1.2.4

Resuelve los siguientes ejercicios.

1) ¿Cuáles tipos de ángulos se encuentran en las siguientes letras y símbolos?

✓ A

✓ H

✓ M

✓ V

✓ E

✓ K

✓ N

✓ W

✓ F

✓ L

✓ T

✓ Z

✓ $\neq$

✓ $\propto$

✓ $\exists$

✓ ∞

✓ $\parallel$

✓ $\nexists$

i. Interiores

iii. Alternos internos

ii. Exteriores

iv. Correspondientes

1.3 TRIÁNGULOS

En esta sección empezamos el estudio de las figuras geométricas planas creadas de segmentos de rectas. Cuando la figura está formada por tres segmentos de recta y unidos por sus puntos extremo, esta figura se llama triángulo.

Los triángulos se clasifican de acuerdo a la medida de sus lados y a la medida de sus ángulos para facilitar su estudio.

1.3.1 DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN

Empezamos con las definiciones básicas.

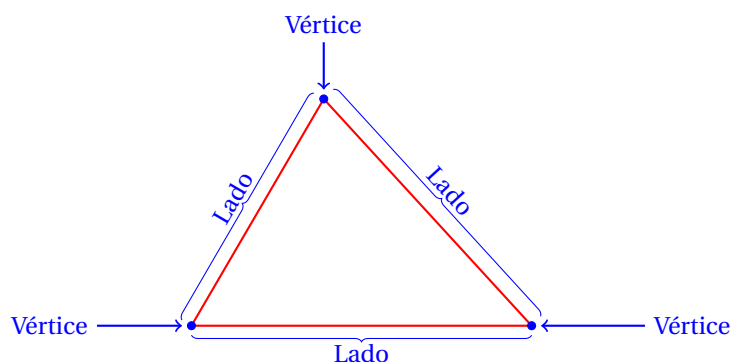
TRIÁNGULO

Figura geométrica plana cerrada, limitada por tres segmentos de recta unidos por sus extremos.

Los puntos donde se intersectan dos segmentos se llaman vértices del triángulo y los segmentos lados.

Definición 1

La siguiente figura muestra un triángulo:



La base del triángulo es el lado sobre el cual descansa.

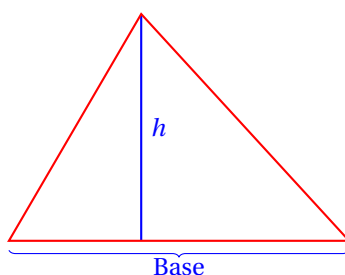
Otro elemento importante del triángulo es su altura.

ALTURA DE UN TRIÁNGULO

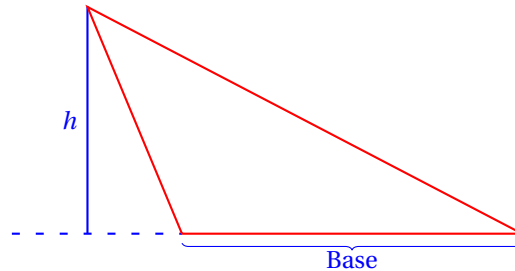
La altura de un triángulo es el segmento de recta que es perpendicular a la base y que pasa por el vértice opuesto a la base.

Definición 2

En la siguiente figura se muestra un triángulo con su altura denotada por h :



Cuando el triángulo tiene un ángulo obtuso es posible que se requiera extender la base para que la perpendicular pase por el vértice opuesto, como en el siguiente ejemplo:



El triángulo es una figura geométrica ampliamente utilizada en arquitectura e ingeniería.

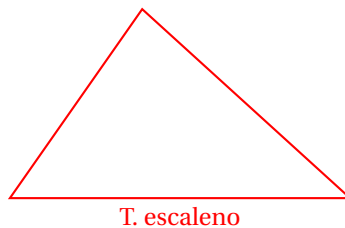
Los triángulos se clasifican de acuerdo a la medida de sus lados como:

Definición 3

TRIÁNGULO ESCALENO

Aquel triángulo que tiene las medidas de todos sus lados diferentes.

El siguiente triángulo es escaleno:



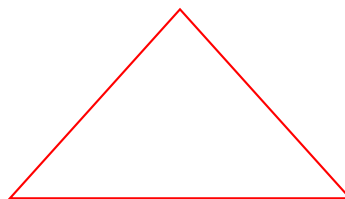
T. escaleno

Definición 4

TRIÁNGULO ISÓSCELES

Aquel triángulo que tiene dos lados con la misma medida.

El siguiente triángulo es isosceles:



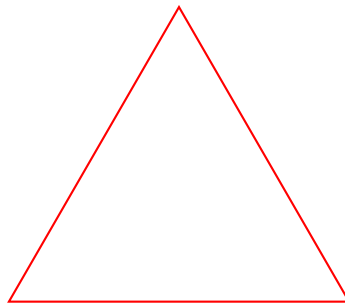
T isósceles

Definición 5

TRIÁNGULO EQUILÁTERO

Aquel triángulo que tiene las medidas de todos sus lados iguales.

El siguiente triángulo es equilátero:



T. equilátero

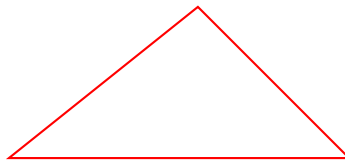
Los triángulos también se clasifican de acuerdo a la medida de sus ángulos internos, como sigue.

TRIÁNGULO ACUTÁNGULO

Aquel triángulo que tiene todos sus ángulos agudos.

Definición 6

El siguiente triángulo es acutángulo:



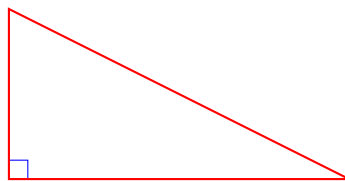
T. acutángulo

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Aquel triángulo que tiene un ángulo recto.

Definición 7

El siguiente triángulo es un triángulo rectángulo:



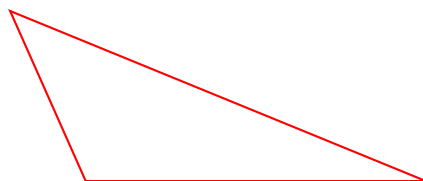
T. rectángulo

TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO

Aquel triángulo que tiene un ángulo obtuso.

Definición 8

El siguiente triángulo es un triángulo obtuso:

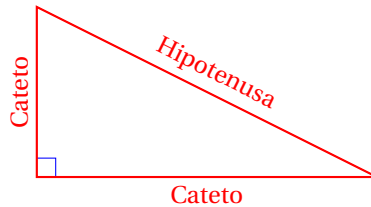


T. obtusángulo

En un triángulo rectángulo se definen además,

Hipotenusa: es el lado opuesto al ángulo recto.

Cateto: es cada uno de los lados que forman el ángulo recto.



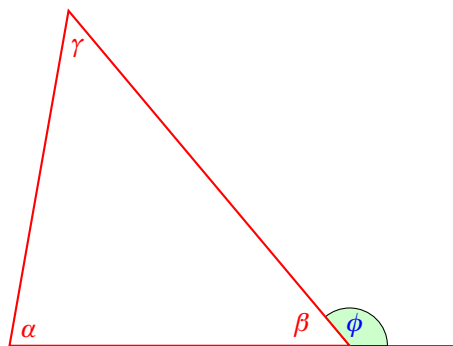
Para el triángulo también se definen los siguientes elementos.

Definición 9

ÁNGULO EXTERNO

Es aquel ángulo que se forma cuando se prolonga uno de los lados del triángulo.

La siguiente figura muestra un ángulo externo ϕ del triángulo:



Definición 10

ÁNGULO INTERNO OPUESTO

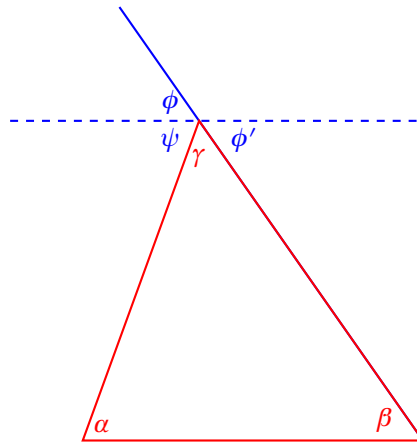
Aquellos ángulos internos del triángulo que no son adyacentes al ángulo externo considerado.

En la figura anterior, los ángulos α y γ son ángulos internos opuestos al ángulo externo ϕ mostrado.

Teorema 1

El ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los otros dos ángulos internos opuestos.

Empezamos trazando una recta paralela al lado del triángulo que no es parte del ángulo externo, por el vértice de éste:



Esta recta ha dividido al ángulo externo en dos partes, que se han denotado por ψ y ϕ' .
 Observa que los ángulos α y ψ son alternos internos. Esto significa que $\alpha = \psi$.
 También, observa que $\phi = \phi'$, porque son opuestos por el vértice.
 Además, los ángulos ϕ' y β son alternos internos, por lo que $\phi' = \beta = \phi$.
 Entonces, si $\xi = \psi + \phi$ es el ángulo externo, tenemos:

$$\xi = \psi + \phi = \alpha + \beta$$

con lo que queda demostrado el teorema. ■

Demuestra que la suma de los ángulos internos de un triángulo que se encuentra en el plano es igual a 180° .

Ejemplo 1

- Basándonos en la figura utilizada para demostrar el teorema anterior, vemos que $\phi + \psi + \gamma = 180^\circ$, porque los tres están en un mismo lado de una recta.
- Además, en esa demostración se justifica que: $\alpha = \psi$ y que $\beta = \phi$.
- Entonces,

$$\alpha + \beta + \gamma = \psi + \phi + \gamma = 180^\circ$$

- Con lo que queda demostrado este teorema.

Algunos resultados que se desprenden de los dos teoremas antes demostrados son los siguientes:

Cada uno de los ángulos internos de un triángulo equilátero mide 60° .

Corolario 1

La suma de cualesquiera dos ángulos internos de un triángulo siempre es menor a 180° .

Corolario 2

Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto.

Corolario 3

Un triángulo no puede tener más de un ángulo obtuso.

Corolario 4

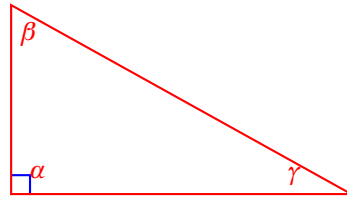
Un triángulo tiene al menos dos ángulos agudos.

Corolario 5

Ejemplo 2

Demuestra que la suma de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

- Si el triángulo es rectángulo, necesariamente debe tener un ángulo recto, al cual denotaremos por α .
- Los otros dos ángulos deben ser agudos:



- Dado que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, y $\alpha = 90^\circ$, necesariamente:

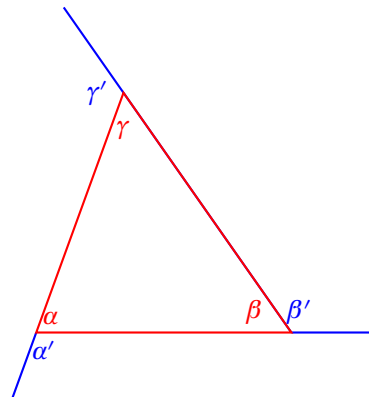
$$90^\circ + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \beta + \gamma = 90^\circ$$

- Con lo que queda establecido el teorema.

Ejemplo 3

Demuestra que la suma de los tres ángulos externos de un triángulo que se encuentra en el plano es igual a 360° .

- Empezamos dibujando el triángulo y sus tres ángulos externos:



- De la figura es evidente que:

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' &= 180^\circ \\ \beta + \beta' &= 180^\circ \\ \gamma + \gamma' &= 180^\circ \end{aligned}$$

- Al sumar las tres ecuaciones obtenemos:

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 540^\circ$$

- Pero también sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, porque éstos son los tres ángulos internos del triángulo. Entonces,

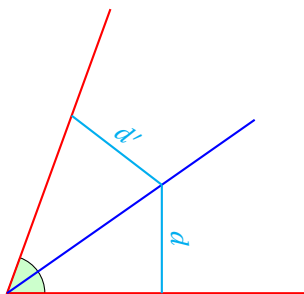
$$\begin{aligned} 180^\circ + \alpha' + \beta' + \gamma' &= 540^\circ \\ \alpha' + \beta' + \gamma' &= 360^\circ \end{aligned}$$

- Con lo que se demuestra el teorema.

Demuestra que cada punto de la bisectriz de un ángulo está a la misma distancia de cada uno de los lados del ángulo.

Ejemplo 4

- Empezamos dibujando la situación:

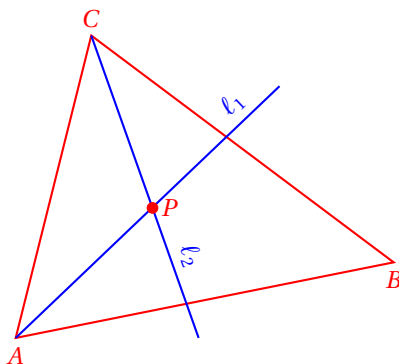


- Como la bisectriz divide al ángulo en dos partes iguales, y las distancias son medidas perpendicularmente a los lados del ángulo, los triángulos que se forman son iguales, pues tienen iguales sus tres ángulos y la hipotenusa.
- Pero si los triángulos rectángulos son iguales, los catetos son iguales, uno a uno.
- Es decir, las distancias d y d' son iguales, que era lo que se quería demostrar.

Demuestra que las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un mismo punto.

Ejemplo 5

- La figura que ilustra la situación es la siguiente:



- El punto P , por estar en la bisectriz ℓ_1 , está a la misma distancia de los lados $\overline{AB}$ como de $\overline{AC}$.

- Es decir, la distancia desde P hasta $\overline{AB}$, la cual denotaremos por: $D(P, \overline{AB})$ es la misma que la distancia desde P hasta $\overline{AC}$, denotada por: $D(P, \overline{AC})$.
- Pero el punto P también está en la bisectriz ℓ_2 , por eso está a la misma distancia de los lados $\overline{AC}$ como de $\overline{BC}$.
- Esto implica: $D(P, \overline{BC}) = D(P, \overline{AC})$.
- Entonces,

$$D(P, \overline{AB}) = D(P, \overline{AC}) = D(P, \overline{BC})$$

En palabras, el punto P está a la misma distancia de los tres lados del triángulo.

- Y la bisectriz del ángulo con vértice en B necesariamente pasará por el punto P , pues este punto equidista de los lados $\overline{AB}$ como de $\overline{BC}$.
- Con esto queda demostrado el teorema.

Definición 11

INCENTRO

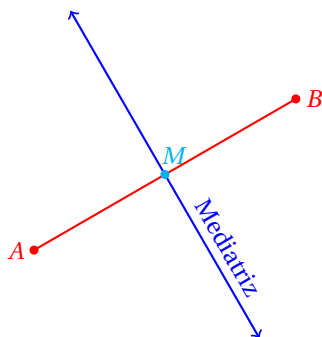
Es el punto donde se intersectan las tres bisectrices de un triángulo.

Definición 12

MEDIATRIZ

La mediatriz de un segmento es la recta que es perpendicular al segmento y que pasa por su punto medio.

La siguiente figura muestra un segmento con su mediatriz:



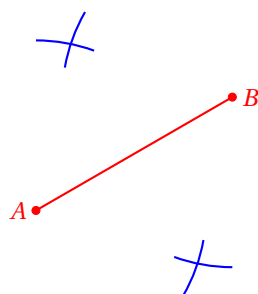
Los puntos A y B son extremos del segmento y el punto M es el punto medio de éstos.

El siguiente ejemplo muestra el procedimiento para trazar una mediatriz a un segmento dado.

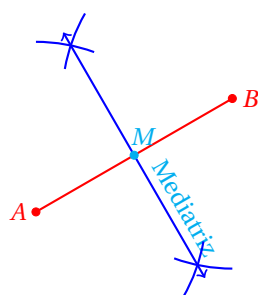
Ejemplo 6

Traza una mediatriz a un segmento $\overline{AB}$ dado.

- Con el compás abierto más que la mitad de la longitud del segmento, trazamos arcos que se corten mutuamente, apoyándonos primero en A y luego en B como se muestra enseguida:



- Ahora solo falta trazar la recta que pasa por los puntos de intersección de los arcos para obtener la mediatriz del segmento $\overline{AB}$:



El punto M indicado en la figura del ejemplo es el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

El siguiente teorema se da sin demostración por ahora.

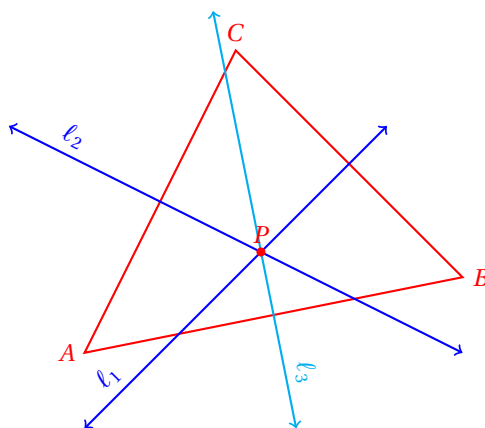
Cada punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento sobre la cual se le dibujó.

Teorema 2

Demuestra que las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un solo punto.

Ejemplo 7

- Empezamos dibujando la situación:



- El punto P , por pertenecer a la mediatriz ℓ_1 está a la misma distancia de los vértices B y C .
- Pero P también está sobre la mediatriz ℓ_2 , por eso equidista de los vértices A y C del triángulo.

- Entonces, la otra mediatriz debe pasar necesariamente por el punto P , pues este punto está a la misma distancia de los vértices A y B .
- Es decir, las tres mediatrices se cortan en el punto P .

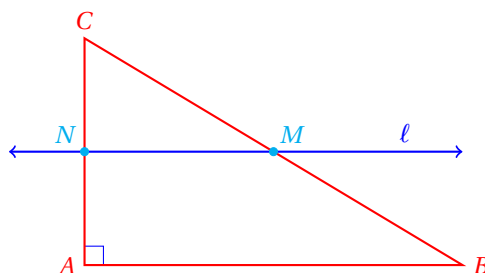
Definición 13**CIRCUNCENTRO**

Es el punto donde se intersectan las tres mediatrices de un triángulo.

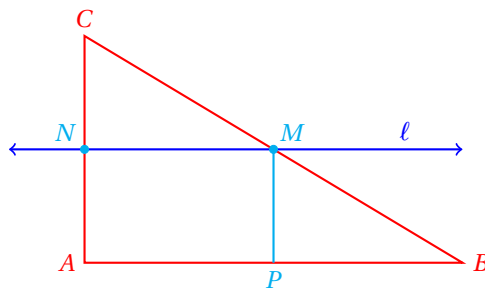
Ejemplo 8

Demuestra que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices del triángulo.

- Trazamos una recta paralela al cateto $\overline{AB}$ que pase por M , siendo el punto M es el punto de la hipotenusa:

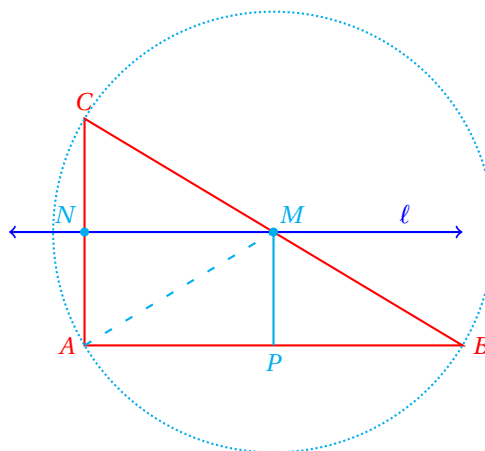


- Como los catetos son perpendiculares y $\ell \parallel \overline{AB}$, la recta ℓ es perpendicular al cateto $\overline{AC}$.
- Observa que el triángulo $\triangle MCN$ también es un triángulo rectángulo.
- El triángulo inicial $\triangle ABC$ y el triángulo $\triangle MCN$ comparten el ángulo con vértice en C y además ambos poseen un ángulo recto.
- Esto significa que los ángulos: $\angle CMN$ y $\angle CBA$, son iguales.
- Recuerda también que: $|\overline{CM}| = |\overline{BM}|$, porque M es el punto medio de $\overline{BC}$.
- Entonces, si trazamos una perpendicular al cateto $\overline{AB}$, que pase por el punto M obtendremos:



- Observa que $\overline{AC} \parallel \overline{MP}$, por lo que el par de ángulos $\angle NCM$ y en $\angle PMB$ son correspondientes, y por tanto, tienen la misma medida.
- Los triángulos $\triangle PBM$ y $\triangle NMC$ son triángulos rectángulos.
- Los tres ángulos internos de estos triángulos son idénticos,

- Además la hipotenusa de cada uno de éstos ($\triangle PBM$ y $\triangle NMC$) mide la mitad del segmento $\overline{BC}$ (hipotenusa del triángulo $\triangle ABC$).
- Esto significa que los triángulos $\triangle PBM$ y $\triangle NMC$ son idénticos, es decir, tienen las medidas de sus lados iguales uno a uno.
- Entonces, como $|\overline{MP}| = |\overline{AN}|$, y ya dedujimos que $|\overline{MP}| = |\overline{CN}|$, se sigue que $|\overline{AN}| = |\overline{CN}|$.
- En otras palabras, el punto N es el punto medio del cateto $\overline{AC}$.
- Esto es, la recta ℓ es la mediatriz del cateto $\overline{AC}$, pues es perpendicular al lado $\overline{AC}$ y pasa por su punto medio.
- Entonces, el punto M , por estar sobre la mediatriz del cateto $\overline{AC}$, está a la misma distancia de los vértices A y C .
- Pero este punto M está a la misma distancia de B como de C , pues es el punto medio de la hipotenusa del triángulo $\triangle ABC$.
- Entonces, el punto M equidista de los tres vértices:



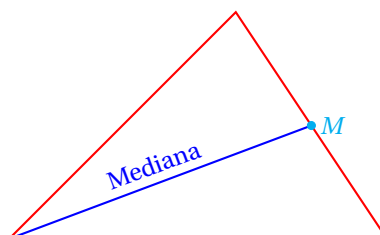
- En conclusión, el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo que se encuentra en un plano es el circuncentro del triángulo.

MEDIANA

La mediana es el segmento de recta que pasa por el punto medio de un lado del triángulo y por el vértice opuesto.

Definición 14

La siguiente figura muestra un triángulo y una de sus medianas:



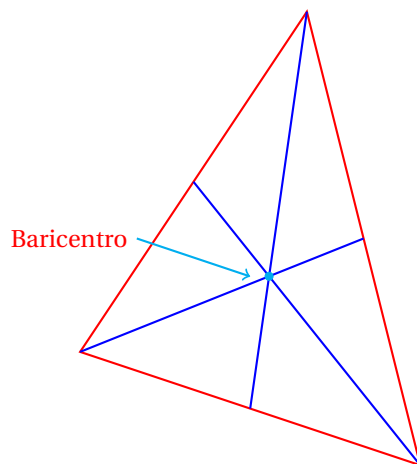
Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto.

Definición 15

BARICENTRO

Es el punto donde se intersectan las tres medianas de un triángulo.

En la siguiente figura se muestra un triángulo con sus tres medianas y el baricentro:

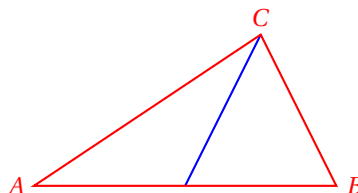


Físicamente, el baricentro representa el centro de gravedad del triángulo.

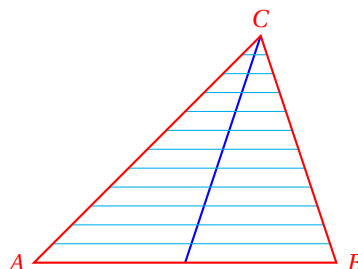
Ejemplo 9

Muestra la interpretación física del baricentro como el centro de gravedad del triángulo.

- Empezamos dibujando el triángulo y una de sus medianas:

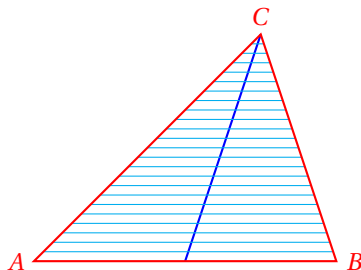


- Ahora vamos a dibujar muchas rectas paralelas a la base del triángulo para dar la interpretación física:

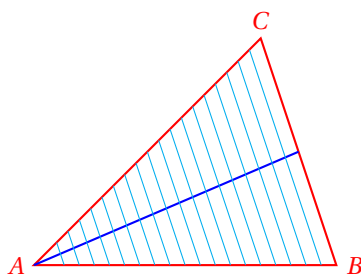


- Observa cada una de las *tiras* horizontales que se formaron con los segmentos agregados al triángulo.
- Si buscamos el punto donde cada tira se equilibra, vamos a encontrarlo muy cerca del punto medio de su longitud.

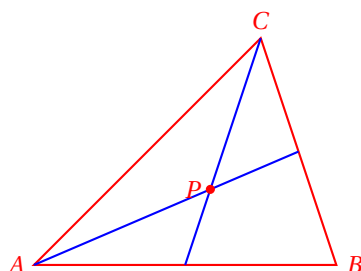
- Si hacemos más *tiras* horizontales, hasta considerar cada tira como un segmento, obtendremos entonces que el punto medio del segmento es el punto donde se equilibra cada tira:



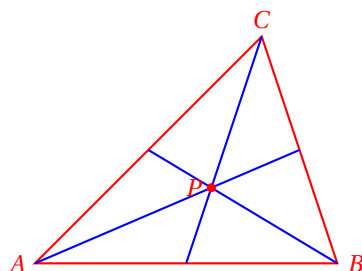
- En otras palabras, la mediana es la recta de equilibrio del triángulo, respecto de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.
- Al considerar una segunda mediana del triángulo, obtenemos otra recta de equilibrio del triángulo:



- De nuevo, podemos argumentar como en el caso anterior y ver que la mediana es la recta de equilibrio para los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.



- El punto P de intersección de las dos medianas, por pertenecer a la primera mediana dibujada, equilibra a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.
- Pero por pertenecer a la segunda mediana dibujada, equilibra a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
- Es decir, en el punto P , el triángulo se equilibra respecto de sus tres lados.
- Entonces, la otra mediana, que equilibra respecto de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, debe pasar por ese punto.

**Teorema 3**

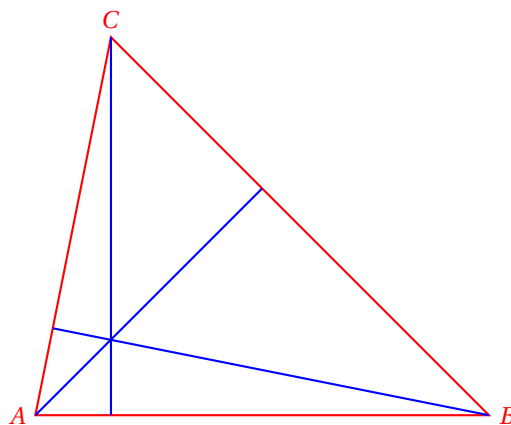
Las tres medianas de un triángulo se cortan en un mismo punto.

Las tres alturas de un triángulo también se cortan en un mismo punto.

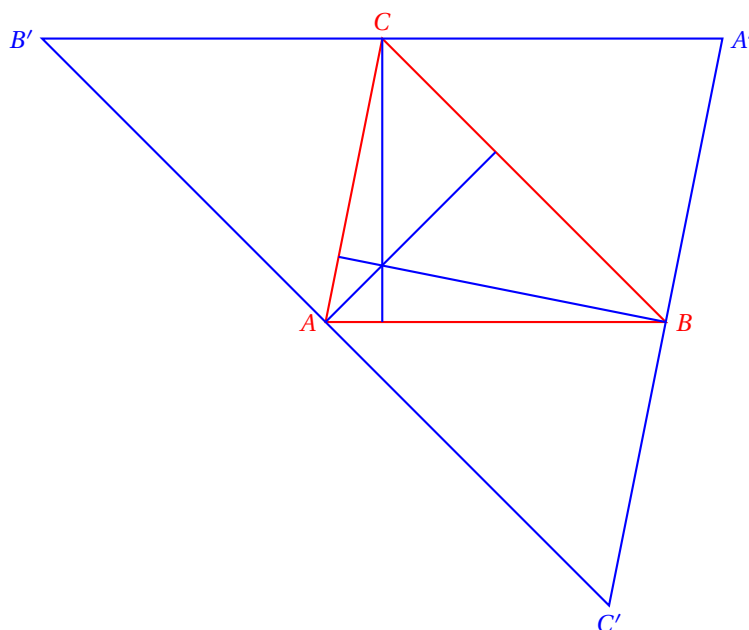
Ejemplo 10

Demuestra que las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto.

- Empezamos dibujando un triángulo con sus tres alturas:



- Dibujamos rectas paralelas a cada uno de los lados que pasen por el vértice opuesto a cada una de ellas para formar otro triángulo:



- Dado que $\overline{AB'} \parallel \overline{BC}$, se tiene que $|\overline{B'C}| = |\overline{AB}|$, porque dos rectas paralelas mantienen la misma distancia entre ellas en cualquiera de sus puntos.
- También se cumple que $\overline{AC} \parallel \overline{BA'}$, por lo que $|\overline{CA'}| = |\overline{AB}|$.
- Con esto probamos que el punto C es el punto medio del segmento $\overline{A'B'}$.
- Y como la altura dibujada al triángulo $\triangle ABC$ que pasa por el punto C es perpendicular al lado $\overline{AB}$ y éste a su vez es paralelo a $\overline{B'A'}$, esta altura es la mediatriz del segmento $\overline{B'A'}$.
- De manera semejante podemos probar que las otras alturas son las mediatrices de los otros lados del triángulo $\triangle A'B'C'$.
- Y como ya habíamos demostrado que las tres mediatrices de un triángulo se intersectan en un mismo punto, las tres alturas del triángulo $\triangle ABC$ se cortan también en un mismo punto por ser las tres mediatrices del triángulo $\triangle A'B'C'$.

ORTOCENTRO

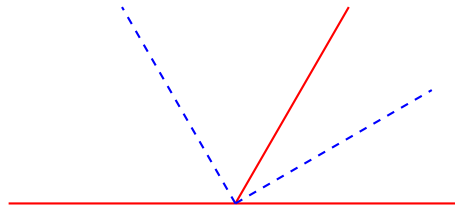
Es el punto donde se intersectan las tres alturas de un triángulo.

Definición 16

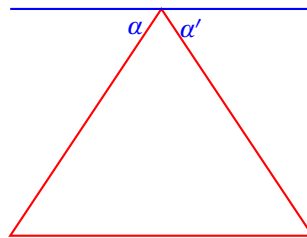
Indica si la declaración es falsa o verdadera para cada uno de los ejercicios. Argumenta tu respuesta. Supón que las figuras mencionadas se encuentran en un plano.

Ejercicios 1.3

- 1) La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo puede ser mayor al tercer lado.
- 2) Ningún ángulo interno de un triángulo puede ser entrante.
- 3) Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son mutuamente perpendiculares.



- 4) Las bisectrices de dos ángulos complementarios son mutuamente perpendiculares.
- 5) Las bisectrices de dos ángulos suplementarios son mutuamente perpendiculares.
- 6) Si se dibuja una línea paralela a la base de un triángulo isósceles que pase por el vértice opuesto, ésta formará dos ángulos de la misma medida con los lados del triángulo.



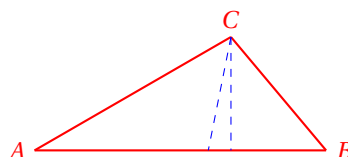
- 7) Si la suma de dos ángulos internos de un triángulo es igual al tercer ángulo, entonces el triángulo es rectángulo.
- 8) Si la mediana de la base de un triángulo es perpendicular a la base, entonces el triángulo es isósceles.
- 9) Una de las medianas de un triángulo isósceles es perpendicular a la base.
- 10) Cualquier triángulo rectángulo isósceles puede dividirse en otros dos triángulos rectángulos isósceles a través de una recta.
- 11) Si la mediatriz de la base de un triángulo coincide con la bisectriz del ángulo con vértice en el vértice opuesto de la base, entonces, el triángulo es isósceles.
- 12) La perpendicular a la bisectriz forma un triángulo isósceles con los lados del ángulo.
- 13) Ningún triángulo puede tener más de un ángulo recto.
- 14) Ningún triángulo puede tener más de un ángulo obtuso.

Instrucciones

Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

- 15) Las medidas de los ángulos internos agudos de un triángulo rectángulo son tales que uno es igual al doble del otro. ¿Cuáles son las medidas de los tres ángulos internos? 30°, 60°, 90°.
- 16) Las medidas de los ángulos internos agudos de un triángulo rectángulo son iguales. ¿Cuáles son las medidas de los tres ángulos internos? 45°, 45°, 90°.
- 17) El ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles mide 50°. ¿Cuánto miden los otros dos ángulos internos? 40°, 40°
- 18) El ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles mide el doble de lo que mide cada uno de los otros dos ángulos. ¿Cuánto miden los ángulos internos de ese triángulo? 45°, 45°, 90°.
- 19) Dentro de qué clasificaciones cae el triángulo del problema anterior? Rectángulo e isósceles

- 20) ¿Qué medida debe tener cada uno de los ángulos adyacentes a la base de un triángulo isósceles para que éste sea acutángulo? $\alpha > 45^\circ$.
- 21) En el triángulo $\triangle ABC$, el ángulo con vértice en A mide 30° y el ángulo externo en B mide 110° . ¿Cuánto mide el ángulo C ? 80° .
- 22) En el triángulo $\triangle ABC$ los ángulos con vértice en A y B miden 50° y 70° , respectivamente. Se forma un triángulo con las bisectrices de estos dos ángulos y el lado $\overline{AB}$. ¿Cuánto mide cada ángulo de este nuevo triángulo? $25^\circ, 35^\circ, 120^\circ$.
- 23) En el siguiente triángulo $\triangle ABC$, $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle CBA = 50^\circ$. ¿Cuánto mide el ángulo formado por la altura y la bisectriz que pasan por C ?



1.3.2 CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Como habrás observado, la idea de que dos segmentos o dos ángulos tienen la misma medida sirve mucho para demostrar teoremas en geometría.

Igualmente, cuando dos triángulos tienen sus lados de la misma medida, uno a uno, sirve para resolver problemas.

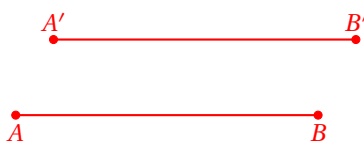
El concepto de congruencia es el que se refiere a la igualdad de objetos geométricos.

CONGRUENCIA

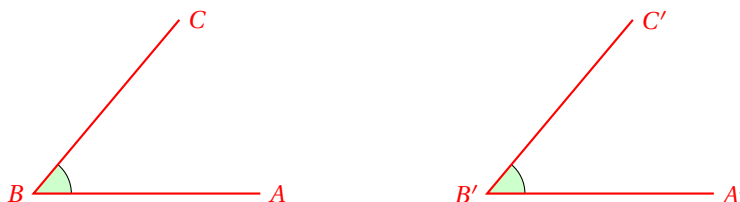
Dos objetos geométricos son congruentes si tienen las mismas medidas y los mismos ángulos.

Definición 1

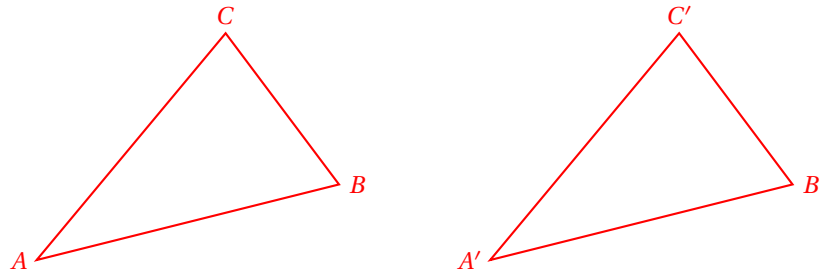
Por ejemplo, los siguientes segmentos son congruentes:



Igualmente, los siguientes dos ángulos son congruentes, pues tienen la misma medida:



Los siguientes triángulos son congruentes, pues tienen las medidas de sus lados y de sus ángulos iguales, uno a uno:



Para denotar matemáticamente que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son congruentes, vamos a usar la notación:

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

y esto se leerá como: «El triángulo ABC es congruente con el triángulo $A'B'C'$ ».

Existen tres criterios para determinar si dos triángulos dados son o no congruentes.

Los criterios son los siguientes:

- i. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, los dos triángulos son congruentes.
- ii. Si un ángulo de un triángulo es congruente con el ángulo de otro triángulo, y además los lados del ángulo considerado en cada triángulo son congruentes, entonces los dos triángulos son congruentes.
- iii. Si las longitudes de los lados de un triángulo son congruentes a las longitudes de los lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

El siguiente teorema es importante:

Teorema 1

La congruencia de triángulos satisface:

- i. $\triangle ABC \cong \triangle ABC$.
- ii. Si $\triangle ABC \cong \triangle PQR$, entonces $\triangle PQR \cong \triangle ABC$.
- iii. Si $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ y $\triangle PQR \cong \triangle RST$, entonces, $\triangle ABC \cong \triangle RST$.

En palabras, la primera afirmación dice en palabras que todo triángulo es congruente a sí mismo. Es decir, la congruencia de triángulos tiene la propiedad reflexiva.

La segunda afirmación dice que si un triángulo es congruente a otro triángulo, el segundo es congruente al primero. Es decir, la congruencia de triángulos tiene la propiedad simétrica.

La tercera afirmación dice que si un primer triángulo es congruente a un segundo triángulo, y a su vez este segundo triángulo es congruente a otro tercer triángulo, entonces el primero y el tercero son congruentes. Es decir, la congruencia entre triángulos tiene la propiedad transitiva.

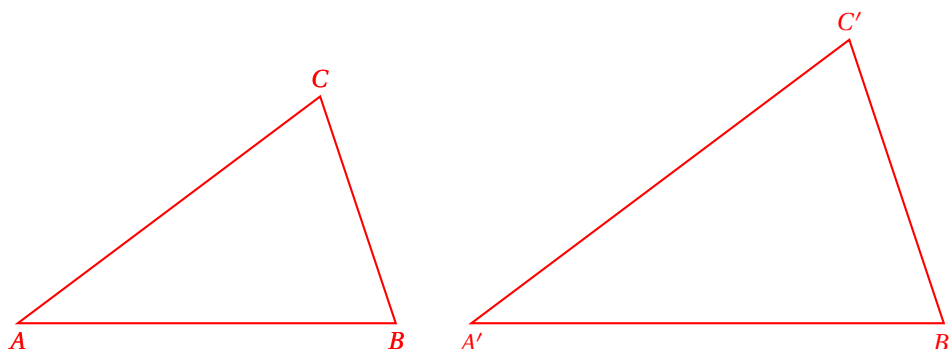
Definición 2

SEMEJANZA DE FIGURAS

Dos figuras geométricas son semejantes si tienen los mismos ángulos internos (uno a uno) y sus lados correspondientes tienen la misma proporción.

Cuando decimos que dos figuras son semejantes queremos decir que ambas tienen la misma forma, pero tal vez una es escala de la otra.

Los siguientes dos triángulos son semejantes:



y matemáticamente lo vamos a denotar por:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Otra forma de definir la semejanza entre dos triángulos es la siguiente:

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Si los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ satisfacen:

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$$

entonces, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Definición 3

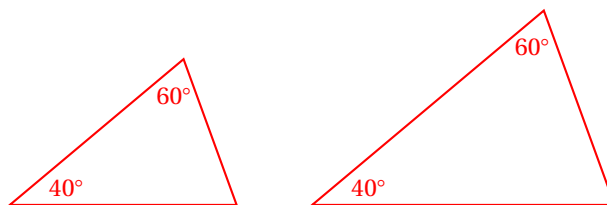
También podemos verificar que dos triángulos son semejantes si dos de sus ángulos internos son iguales uno a uno.

En la figura donde se muestran los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, los ángulos satisfacen: $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, y $\angle ACB = \angle A'C'B'$.

Verifica si los triángulos siguientes son semejantes:

Ejemplo 1

- Dado que los ángulos son congruentes uno a uno, se concluye que los triángulos son semejantes.

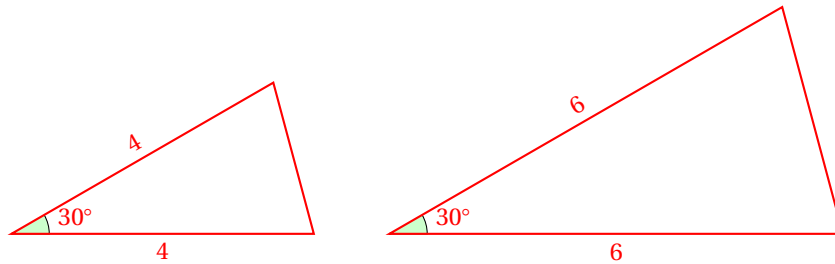


- Observa que el tercer ángulo (de cada triángulo) es el suplemento de $40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$, pues la suma de los tres ángulos internos del triángulo es igual a 180° .

Verifica si los siguientes triángulos son semejantes:

Ejemplo 2

- En este caso, es obvio que hay un ángulo congruente en ambos triángulos, pues en ambos triángulos hay un ángulo que mide 30° .



- Por otra parte, ambos triángulos son isósceles, pues cada lado del ángulo que mide 30° tienen la misma longitud en los dos triángulos.
- Entonces esos lados son proporcionales:

$$\frac{4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

- Por lo que los triángulos son semejantes.

Ejemplo 3

Verifica si los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ con lados $|\overline{AB}| = 5$, $|\overline{BC}| = 3$, $|\overline{AC}| = 4$, $|\overline{A'B'}| = 15$, $|\overline{B'C'}| = 9$, $|\overline{A'C'}| = 12$, son semejantes.

- Ahora utilizaremos la definición que dimos de triángulos semejantes:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{B'C'}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{A'C'}|}$$

$$\frac{5}{15} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

- Como se cumple la igualdad, concluimos que: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.
- Observa que pudimos utilizar:

$$\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{B'C'}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{A'C'}|}{|\overline{AC}|}$$

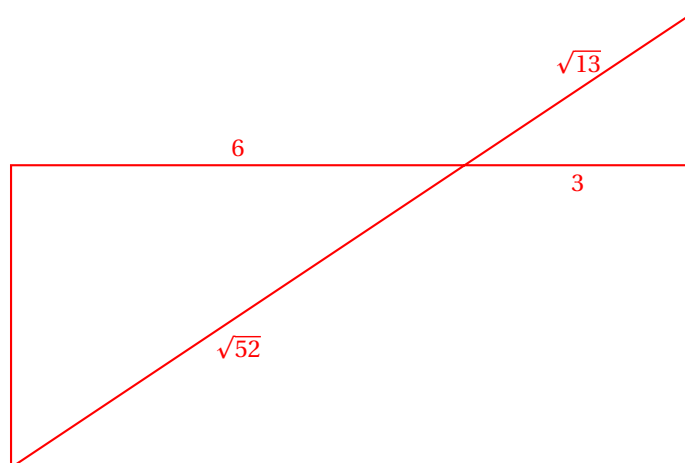
$$\frac{15}{5} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = 3$$

por la propiedad simétrica de la semejanza de triángulos y concluir el mismo resultado.

Ejemplo 4

Verifica si los siguientes triángulos son semejantes:

- Empezamos observando que hay un ángulo congruente en ambos triángulos, debido a que es opuesto por el vértice.



- Ahora vemos inmediatamente que el lado horizontal del triángulo de la izquierda mide el doble que el lado correspondiente del otro triángulo.
- Nos falta ver que el lado inclinado del primer triángulo (de la izquierda) mida exactamente el doble que el de la derecha.
- Observa que: $\sqrt{52} = \sqrt{(4)(13)} = 2\sqrt{13}$.
- Es decir, el lado inclinado del triángulo de la izquierda mide el doble del lado que le corresponde del triángulo de la derecha.
- Entonces, los triángulos son semejantes.

Como puedes ver los tres criterios de congruencia entre triángulos se pueden extender a criterios de semejanza de triángulos como se enlistan enseguida:

- Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, los dos triángulos son semejantes.
- Si un ángulo de un triángulo es congruente con el ángulo de otro triángulo, y además los lados del ángulo considerado en cada triángulo son proporcionales, entonces los dos triángulos son semejantes.
- Si las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a las longitudes de los lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

lo único que hemos hecho es cambiar la palabra «congruente» por «proporcional» cuando se refiere a la longitud de uno o varios lados de los triángulos.

Ahora podemos aplicar los tres criterios para determinar si dos triángulos son semejantes.

Expresa los tres criterios de semejanza de triángulos como teoremas.

Ejemplo 5

• **Primer criterio:**

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con los de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

Teorema 2

Porque si se conocen α y β , el otro ángulo debe medir $180^\circ - \alpha - \beta$.

Entonces los tres ángulos de cada triángulo son congruentes y los triángulos son semejantes.

- Segundo criterio:

Teorema 3

Si uno de los ángulos de un triángulo es congruente con un ángulo de otro segundo triángulo, y los lados de cada uno de estos ángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Porque al ser proporcionales los lados del triángulo y el ángulo entre ellos congruente, se tiene que uno es escala del otro, y el tercer lado de los triángulos queda proporcional, quedando los otros ángulos faltantes congruentes entre los triángulos.

- Tercer criterio:

Teorema 4

Si las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a las longitudes de los lados de un segundo triángulo, los dos triángulos son proporcionales.

Porque uno es escala del otro.

1.3.3 TEOREMA DE PITÁGORAS

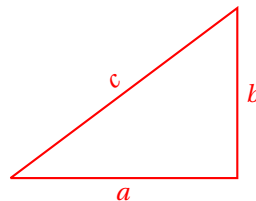
En geometría, uno de los teoremas más importantes es el teorema de Pitágoras porque se aplica muy frecuentemente para resolver problemas.

Teorema 1

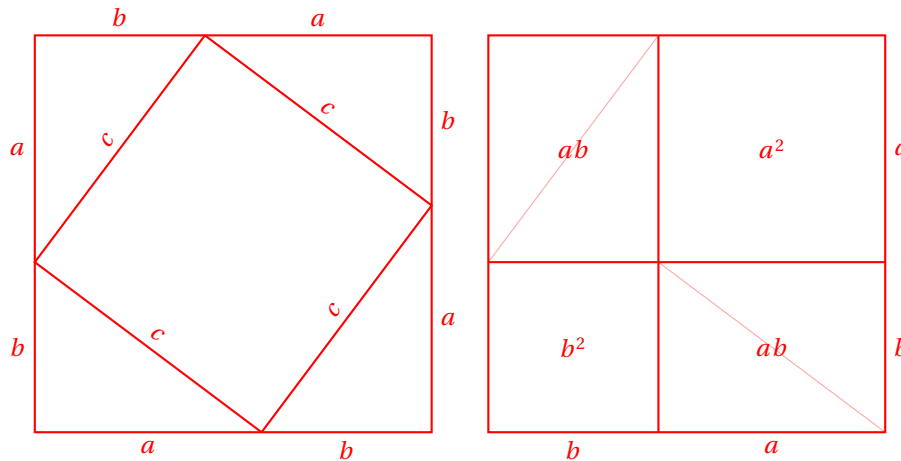
En todo triángulo rectángulo que se encuentra en un plano, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa. Algebraicamente, si a y b son las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo y c es la longitud de su hipotenusa, entonces se cumple:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Para demostrarlo consideramos el siguiente triángulo:



Empezamos creando las siguientes figuras utilizando el triángulo considerado:



En las dos figuras tenemos un cuadrado de lado $a + b$.

Observa que en la figura de la izquierda hay un cuadrado inclinado en medio.

Este es un cuadrado porque de los tres ángulos del triángulo rectángulo los dos agudos suman 90° .

Observa que los tres ángulos que están en cada esquina de la figura de enmedio suman 180° , y que siempre están los dos ángulos agudos del triángulo rectángulo, que suman 90° .

Luego, el ángulo interno del cuadrilátero que está dentro de la figura de la izquierda mide 90° , porque la suma de los tres es 180° .

Entonces, el área de este cuadrado es c^2 , porque su lado mide c unidades.

Por otra parte, cada triángulo que queda alrededor del cuadrado tiene un área de $ab/2$, y en total son cuatro. Entonces, el área de los cuatro triángulos es: $2ab$.

En la figura de la derecha, tenemos un cuadrado que tiene longitud de lado $a + b$.

El área de este cuadrado es: $a^2 + b^2 + 2ab$.

Comparando las áreas de las dos figuras, obtenemos:

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$$

Al restar $2ab$ en ambos lados de la igualdad obtenemos: $a^2 + b^2 = c^2$, que es lo que establece el teorema.

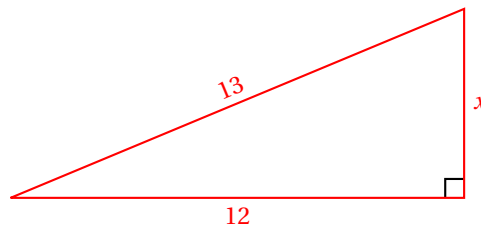
■

El teorema de Pitágoras puede servir para calcular la longitud de uno de los catetos de un triángulo rectángulo, cuando se conocen la hipotenusa y el otro cateto.

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm., y un cateto (horizontal) mide 12 cm. Calcula la longitud x del lado faltante de este triángulo.

Ejemplo 1

- Aplicamos el teorema de pitágoras para calcular el valor de x .



- Nosotros conocemos: $a = 12$, y $c = 13$.

- Debemos determinar el valor de $b = x$:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

- Ahora sustituimos los valores conocidos:

$$b = \sqrt{(13)^2 - (5)^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

- Entonces, la longitud del cateto es 12 unidades.

El teorema de Pitágoras está escrito de manera que parece que se desea calcular la longitud de la hipotenusa:

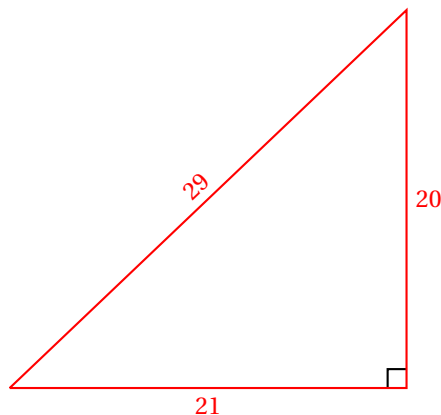
Ejemplo 2

Calcula la longitud de la hipotenusa del triángulo con longitudes de catetos 21 cm y 20 cm, respectivamente.

- Aplicamos directamente el teorema:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ &= (21)^2 + (20)^2 \\ &= 441 + 200 \\ &= 841 \end{aligned}$$

- Entonces, la hipotenusa de ese triángulo rectángulo mide: $c = \sqrt{841} = 29$ cm.
- El triángulo es semejante al siguiente:



Igualmente, el teorema de Pitágoras se puede utilizar par verificar que las longitudes de los lados de un triángulo correspondan a un triángulo rectángulo.

Ejemplo 3

El profesor indicó que un triángulo rectángulo tenía sus lados con medidas: 77 cm, 36 cm y 85 cm. Verifica que se trata de un triángulo rectángulo.

- Si el triángulo es rectángulo, debe satisfacer el teorema de Pitágoras.
- Observa que la hipotenusa siempre es el lado de mayor longitud.

- En este caso, la hipotenusa mide 85 cm.
- Verificamos si se trata de un triángulo rectángulo:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ (85)^2 &\stackrel{?}{=} (77)^2 + (36)^2 \\ 7225 &= 5929 + 1296 \quad \checkmark \end{aligned}$$

- Como las longitudes de los lados del triángulo satisfacen el teorema de Pitágoras, se trata de un triángulo rectángulo.

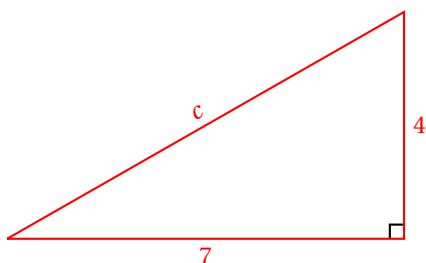
No siempre obtendremos longitudes de lados del triángulo rectángulo con números enteros.

Algunas veces obtendremos números racionales e inclusive números irracionales.

Calcula la longitud de la hipotenusa c del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 7 cm y 4 cm, respectivamente.

Ejemplo 4

- En este caso, $a = 7$, y $b = 4$.



- Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la hipotenusa de este triángulo rectángulo:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65} \approx 8.062257748$$

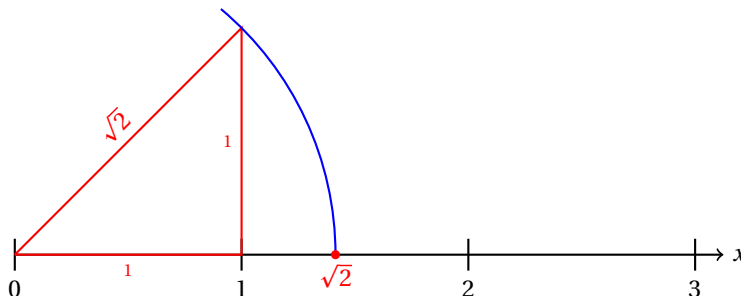
- Observa que la hipotenusa de este triángulo rectángulo mide un poco más de 8 unidades.

Igualmente, podemos utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar geoméricamente la posición de puntos en la recta numérica, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Encuentra la posición de los puntos $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, y $\sqrt{5}$ en la recta numérica.

Ejemplo 5

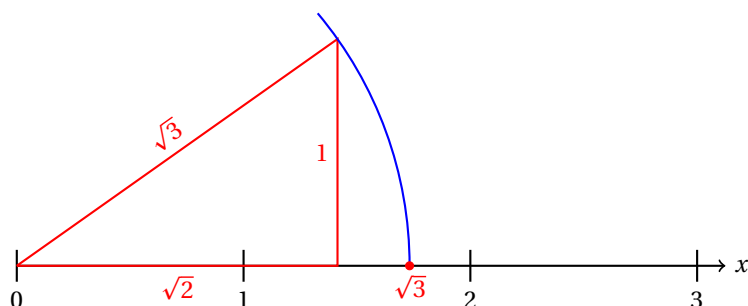
- Para calcular la posición de $x = \sqrt{2}$ vamos a construir un triángulo con catetos de longitud 1:



- Ahora que conocemos la ubicación del punto $x = \sqrt{2}$ vamos a utilizarla para calcular la posición del punto $\sqrt{3}$.
- Para este fin, vamos a dibujar un triángulo con catetos $\sqrt{2}$ y 1.
- La hipotenusa de este triángulo será de:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (1)^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3} \text{ unidades.}$$

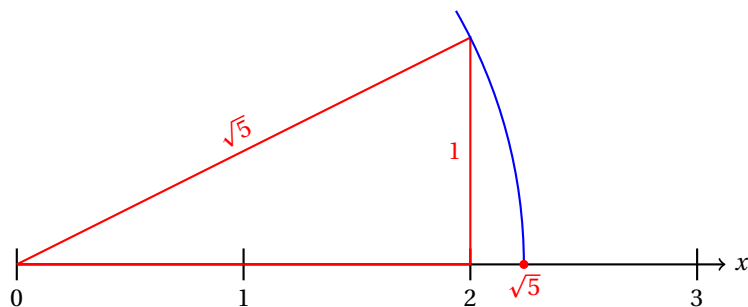
- La figura es la siguiente:



- Finalmente, para calcular la posición del número $\sqrt{5}$, trazamos un triángulo rectángulo con catetos de longitudes 2 y 1, porque así, la hipotenusa medirá:

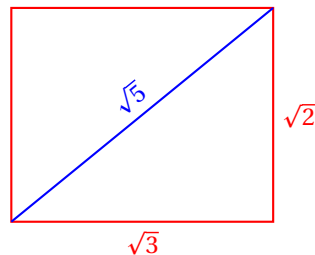
$$c = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \text{ unidades.}$$

- La figura muestra el trazo:



- Otra forma de encontrar el punto que corresponde a $\sqrt{5}$ en la recta numérica es como sigue:
- Construimos un rectángulo de base $\sqrt{3}$ y altura $\sqrt{2}$.
- Trazamos la diagonal de ese rectángulo.
- La diagonal mide $\sqrt{5}$, porque:

$$D = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3 + 2} = \sqrt{5}$$



Muchos problemas aplicados requieren del uso del teorema de Pitágoras.

Al igual que en el caso de problemas aplicados, otras ramas de la matemática utilizan muy frecuentemente el teorema de Pitágoras para resolver problemas.

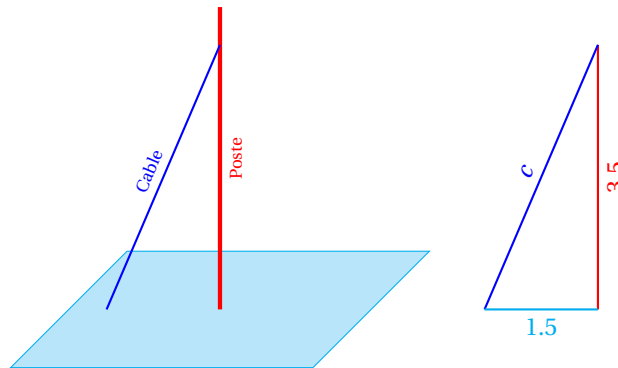
Por ejemplo, para calcular la distancia entre dos puntos en geometría analítica, vamos a utilizar una fórmula que consiste en la aplicación del teorema de Pitágoras.

En cálculo diferencial e integral, en trigonometría, etc., y en muchas diferentes situaciones vamos a necesitar aplicar este teorema para resolver problemas diversos.

Ejemplo 6

A un poste del cableado eléctrico se le colocará un cable tensor de acero para darle soporte. La altura a la cual se colocará este cable de acero es de 3.5 metros y se fijará a 1.25 metros de la base del poste. ¿Qué longitud tendrá el cable? (Omíte el cable requerido para fijarlo)

- Nosotros tenemos la siguiente situación:



- Necesitamos calcular la hipotenusa del triángulo dibujado a la derecha.
- Para eso, aplicamos el teorema de pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(3.5)^2 + (1.5)^2} = \sqrt{12.25 + 2.25} = \sqrt{14.5} \approx 3.807886553 \text{ metros.}$$

- Al cortar el cable antes de colocarlo, deben considerar lo que se requiere para ajustarlo en el suelo y en la parte donde se sujetará del poste.

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios. Las longitudes a y b corresponden a los catetos y c a la hipotenusa.

**Ejercicios
1.3.3**

1) ¿Cuáles de las siguientes longitudes pueden corresponder a los lados de un triángulo rectángulo?

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $a = 3, b = 4, c = 5$. | j) $a = 9, b = 40, c = 41$. |
| b) $a = 8, b = 6, c = 10$. | k) $a = 35, b = 12, c = 37$. |
| c) $a = 5, b = 12, c = 13$. | l) $a = 32, b = 24, c = 40$. |
| d) $a = 15, b = 8, c = 17$. | m) $a = 27, b = 36, c = 45$. |
| e) $a = 12, b = 16, c = 20$. | n) $a = 20, b = 48, c = 52$. |
| f) $a = 7, b = 24, c = 25$. | o) $a = 11, b = 60, c = 61$. |
| g) $a = 24, b = 10, c = 26$. | p) $a = 48, b = 14, c = 50$. |
| h) $a = 21, b = 20, c = 29$. | q) $a = 45, b = 28, c = 53$. |
| i) $a = 16, b = 30, c = 34$. | r) $a = 40, b = 42, c = 58$. |

s) $a = 33, b = 56, c = 65$.

w) $a = 60, b = 32, c = 68$.

t) $a = 24, b = 70, c = 74$.

x) $a = 55, b = 48, c = 73$.

u) $a = 13, b = 84, c = 85$.

y) $a = 48, b = 64, c = 80$.

v) $a = 63, b = 16, c = 65$.

- 2) Cateto 1: 7, Hipotenusa: $\sqrt{53}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 2$
- 3) Cateto 1: 11, Hipotenusa: $\sqrt{265}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 12$
- 4) Cateto 1: 10, Cateto 2: 9. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = \sqrt{181}$
- 5) Cateto 1: 4, Cateto 2: 7. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = \sqrt{65}$
- 6) Cateto 1: 7, Hipotenusa: $\sqrt{170}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 11$
- 7) Cateto 1: 7, Cateto 2: 3. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = \sqrt{58}$
- 8) Cateto 1: 13, Cateto 2: 3. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = \sqrt{178}$
- 9) Cateto 1: 13, Cateto 2: 7. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = \sqrt{218}$
- 10) Cateto 1: 2, Cateto 2: 3. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = \sqrt{13}$
- 11) Hipotenusa: $\sqrt{5}$, Cateto 2: 1. Encontrar la longitud del cateto 1. $a = 2$
- 12) Cateto 1: 12, Cateto 2: 5. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = 13$
- 13) Cateto 1: 9, Hipotenusa: $\sqrt{106}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 5$
- 14) Cateto 1: 11, Hipotenusa: $\sqrt{122}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 1$
- 15) Cateto 1: 9, Hipotenusa: $\sqrt{225}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 12$
- 16) Hipotenusa: $\sqrt{29}$, Cateto 2: 2. Encontrar la longitud del cateto 1. $a = 5$
- 17) Cateto 1: 6, Hipotenusa: $\sqrt{72}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 6$
- 18) Cateto 1: 3, Hipotenusa: $\sqrt{109}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 10$
- 19) Hipotenusa: $\sqrt{8}$, Cateto 2: 2. Encontrar la longitud del cateto 1. $a = 2$
- 20) Cateto 1: 1, Cateto 2: 11. Encontrar la longitud de la hipotenusa. $c = \sqrt{122}$
- 21) Cateto 1: 3, Hipotenusa: $\sqrt{10}$. Encontrar la longitud del cateto 2. $b = 1$
- 22) Utilizando regla y compás encuentra los siguientes puntos en la recta numérica, aplicando el teorema de Pitágoras:
- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| a) $\sqrt{6}$ | f) $\sqrt{12}$ | k) $\sqrt{18}$ | p) $\sqrt{23}$ |
| b) $\sqrt{7}$ | g) $\sqrt{13}$ | l) $\sqrt{19}$ | q) $\sqrt{24}$ |
| c) $\sqrt{8}$ | h) $\sqrt{14}$ | m) $\sqrt{20}$ | r) $\sqrt{26}$ |
| d) $\sqrt{10}$ | i) $\sqrt{15}$ | n) $\sqrt{21}$ | s) $\sqrt{27}$ |
| e) $\sqrt{11}$ | j) $\sqrt{17}$ | o) $\sqrt{22}$ | t) $\sqrt{28}$ |
- 23) ¿Qué distancias irracionales puedes obtener al dibujar triángulos rectángulos con lados de longitudes 9 cm y 7 cm? $\sqrt{130}$ y $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.
- 24) ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado de lado 7 cm? $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.

- 25) ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado de lado 10 cm? $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$
- 26) ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado de lado x cm? $\sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}.$
- 27) ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de base 7 cm y altura 6 cm? $\sqrt{85}$
- 28) ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de base 10 cm y con un área de 50 cm²? $\sqrt{125}$
-

Capítulo 2

Polígonos y Circunferencia

Por aprender...

2.1. Polígonos

- 2.1.1. Definición
- 2.1.2. Clasificación
- 2.1.3. Suma de ángulos
- 2.1.4. Triangulación de polígonos
- 2.1.5. Cálculo de Perímetros y áreas

2.2. Circunferencia

- 2.2.1. Definición y Elementos
- 2.2.2. Rectas tangentes
- 2.2.3. Ángulos en la Circunferencia
- 2.2.4. Perímetros y áreas

Por qué es importante...

Los polígonos forman...

2.1 DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS

Además del triángulo hay una gran cantidad de otras figuras geométricas delimitadas por segmentos de recta que son importantes en geometría.

2.1.1 DEFINICIÓN

POLÍGONO

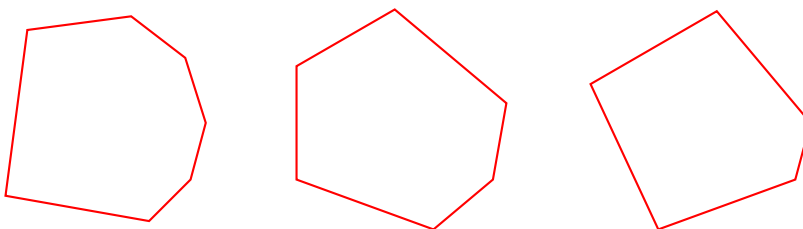
Figura geométrica cerrada delimitada por segmentos de recta. Cada uno de los segmentos de recta es uno de sus lados y los puntos donde se intersecan dos segmentos de recta se llaman vértices.

Definición 1

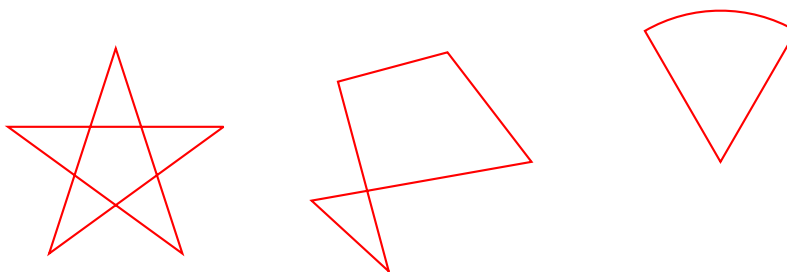
Los polígonos deben cumplir con:

- ✓ Dos lados consecutivos no están sobre la misma recta,
- ✓ Cada lado del polígono interseca a exactamente otros dos lados del polígono, y
- ✓ Los lados del polígono se intersecan por sus extremos.

Por ejemplo, los siguientes son polígonos:



Pero los siguientes no lo son:



Cada polígono recibe su nombre de acuerdo al número de lados que tiene:

Triángulo: polígono de tres lados,

Cuadrilátero: polígono de cuatro lados,

Pentágono: polígono de cinco lados,

Hexágono: polígono de seis lados,

Heptágono: polígono de siete lados,

Octágono: polígono de ocho lados,

Eneágono: polígono de nueve lados,

Decágono: polígono de diez lados, etc.

2.1.2 CLASIFICACIÓN

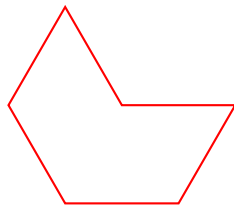
Para facilitar el estudio de las figuras geométricas es conveniente clasificarlas.

Los polígonos se clasifican como:

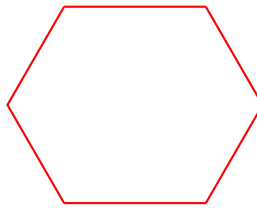
Equilátero: es aquel polígono que tiene todos sus lados iguales.

Equiángulo: es aquel polígono que tiene todos sus ángulos iguales.

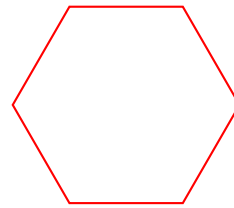
Regular: aquel polígono que es equilátero y equiángulo a la vez. Es decir, un polígono es regular si todos sus lados y todos sus ángulos tienen la misma medida.



Equilátero



Equiángulo



Regular

También se definen:

Cóncavo: es aquel polígono que tiene al menos uno de sus ángulos internos es entrante.

El polígono mostrado como un polígono equilátero, es cóncavo.

Convexo: es aquel polígono que ninguno de sus ángulos internos es entrante.

El polígono mostrado como un polígono equiángulo, es convexo.

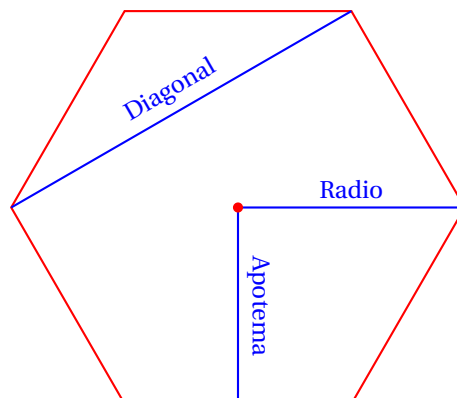
En particular, para el polígono regular de n lados, se definen los siguientes elementos:

Radio: Es el segmento de recta que va del centro del polígono regular a cualquiera de sus vértices.

Apotema: Es el segmento de recta que va del centro del polígono al punto medio de cualquiera de sus lados.

Diagonales: Es el segmento de recta que une dos vértices no consecutivos.

En la siguiente figura se muestran cada uno de los siguientes elementos:

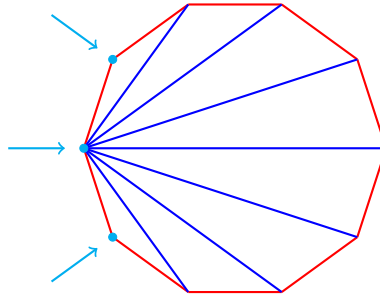


En realidad, la diagonal se define para cualquier polígono, no solamente los polígonos regulares. Podemos calcular el número de diagonales que tiene un polígono convexo de la siguiente manera.

Calcula el número de diagonales que tiene un polígono regular de n lados.

Ejemplo 1

- Empezamos notando que el polígono regular de n lados tiene n vértices.
- Fijándonos en uno de los n vértices, podemos formar $n - 3$ diagonales, porque una diagonal no puede ir de un vértice a sí mismo, ni a los vértices más próximos a él:



- Observa que hay tres nodos que no sirven para trazar una diagonal.
- Los dos vecinos porque en lugar de formar una diagonal generan un lado del polígono.
- El tercer vértice es sobre el cual nos hemos fijado: una diagonal no puede iniciar y terminar en el mismo vértice.
- Pero nosotros podemos fijarnos en cualquiera de los n vértices del polígono.
- Entonces, considerando todos los vértices, podemos trazar $n(n - 3)$ diagonales.
- Sin embargo, debemos tener en cuenta que cada diagonal la hemos contado dos veces: una cuando el vértice es inicial y la otra cuando es el punto final de la diagonal.
- Recuerda que cada diagonal toca dos vértices.
- Es decir, si dividimos entre dos, obtenemos el número de diagonales del polígono regular:

$$D = \frac{n(n - 3)}{2}$$

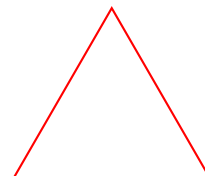
Podemos verificar el resultado calculando para polígonos de un número de lados pequeño.

Calcula el número de diagonales para los polígonos regulares de 3, 4, 5 y 6 lados.

Ejemplo 2

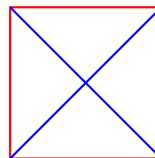
- Empezamos con el triángulo: no se le pueden trazar diagonales.

$$D_3 = \frac{3(3 - 3)}{2} = \frac{3(0)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$



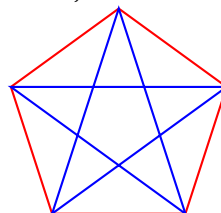
- Ahora el cuadrado: se le pueden trazar dos diagonales.

$$D_4 = \frac{4(4-3)}{2} = \frac{4(1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$



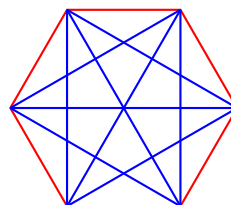
- Sigue el pentágono: se le pueden trazar 5 diagonales (recuerda la estrella).

$$D_5 = \frac{5(5-3)}{2} = \frac{5(2)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$



- Finalmente, el hexágono:

$$D_6 = \frac{6(6-3)}{2} = \frac{6(3)}{2} = \frac{18}{2} = 9$$



Observa que las diagonales siempre van de un vértice a otro vértice no consecutivo del inicial. Siempre debe haber al menos un vértice entre el inicio y fin de la diagonal.

Ejemplo 3

Indica la clasificación de cada polígono.

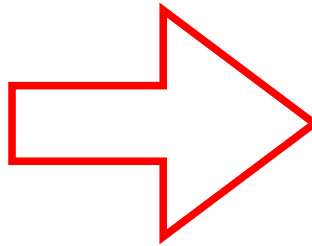
- Este símbolo se utiliza frecuentemente en señalización para indicar advertencia.



- Es un triángulo: *equilátero*, porque todos sus lados tienen la misma medida, y también es equiángulo, porque todos sus ángulos también tienen la misma medida.
- Es decir, el triángulo es regular, pues es equilátero y equiángulo a la vez.
- También se trata de un triángulo convexo, pues ninguno de sus ángulos internos es entrante.
- El siguiente símbolo se utiliza en tránsito:



- Este polígono es un cuadrilátero.
- Al parecer, todos sus lados tienen la misma medida, por lo que se trata de un cuadrilátero regular.
- También tiene las medidas de todos sus ángulos internos iguales, así que es un cuadrilátero equiángulo.
- También es convexo, porque todos sus ángulos internos miden lo mismo que un ángulo recto.
- Siguiendo:

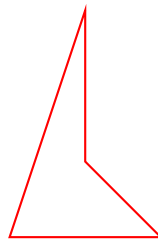


- Ahora tenemos un polígono de siete lados: se trata de un heptágono.
- Este heptágono no es ni equilátero, ni equiángulo.
- Pero tiene algunos ángulos internos entrantes, por eso es cóncavo.

¿A qué clase de polígono pertenece el mostrado?

Ejemplo 4

- Como el polígono tiene 4 lados se trata de un cuadrilátero.



- Dado que tiene un ángulo interno que es entrante se trata de un cuadrilátero cóncavo.
- También es fácil observar que las medidas de todos sus lados es diferente, así que no se trata de un cuadrilátero equilátero.

- Al igual que con sus ángulos. Así que tampoco es equiángulo.

En matemáticas, cuando resolvemos problemas, siempre aplicamos las propiedades de los objetos cuando nos ayudan a la solución.

Es importante que aprendas a identificar cuándo una figura no es un polígono porque no podemos aplicar propiedades de polígonos a cualquier figura.

Si encuentras una figura que no sea polígono, posiblemente no tenga las mismas propiedades que éstos.

Ejemplo 5

¿Es la siguiente figura un polígono? ¿Por qué?

- Esta figura...

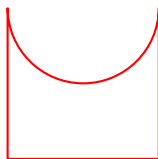


- No es un polígono, porque cada lado debe tocar exactamente dos lados en sus extremos.
- Observa que cada lado de la figura encuentra a otros dos lados en cada uno de sus extremos.
- Es decir, cada lado toca a otros cuatro lados, lo cual no ocurre para los polígonos.

Ejemplo 6

¿Es la siguiente figura un polígono? ¿Por qué?

- Esta figura...



- No es un polígono.
- Un polígono es una figura cerrada formada de segmentos de recta solamente.
- Esta figura tiene un arco en la parte superior.
- Por tanto, no se trata de un polígono.

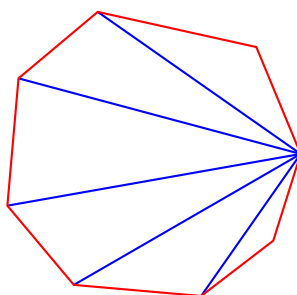
2.1.3 SUMA DE ÁNGULOS

En esta sección vamos a demostrar algunos teoremas que nos ayudarán a resolver problemas más adelante.

La suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es igual a $180(n - 2)^\circ$.

Teorema 1

En un polígono de n lados podemos dibujar $n - 3$ diagonales que forman $n - 2$ triángulos.



La suma de los ángulos internos de esos triángulos es igual a la suma de los ángulos internos del polígono de n lados.

Y como para cada triángulo, la suma de los ángulos internos es 180° , para los $n - 2$ triángulos que se trazaron la suma es: $180(n - 2)^\circ$. ■

Calcula la suma de los ángulos internos de los polígonos de 3, 4, 5, 6, 7 y 8 lados utilizando la fórmula:

$$S_{\text{int}} = 180(n - 2)^\circ$$

Ejemplo 1

- Para $n = 3$, sabemos que la suma es 180° :

$$S_{\text{int}} = 180(n - 2)^\circ = 180(3 - 2)^\circ = 180^\circ$$

- Para $n = 4$ se trata de un cuadrilátero.
- Dentro del cuadrilátero podemos dibujar dos triángulos trazando una de sus diagonales.
- Entonces la suma debe ser: $2 \times 180^\circ = 360^\circ$.
- Ahora aplicamos la fórmula:

$$S_{\text{int}} = 180(n - 2)^\circ = 180(4 - 2)^\circ = 180(2)^\circ = 360^\circ$$

- Para el caso $n = 5$ se trata de un pentágono:

$$S_{\text{int}} = 180(5 - 2)^\circ = 180(3)^\circ = 540^\circ$$

- Para $n = 6$ se trata de un hexágono:

$$S_{\text{int}} = 180(6 - 2)^\circ = 180(4)^\circ = 720^\circ$$

- Para $n = 7$ tenemos un heptágono:

$$S_{\text{int}} = 180(7 - 2)^\circ = 180(5)^\circ = 900^\circ$$

- Y finalmente, para $n = 8$ tenemos un octágono:

$$S_{\text{int}} = 180(8 - 2)^\circ = 180(6)^\circ = 1080^\circ$$

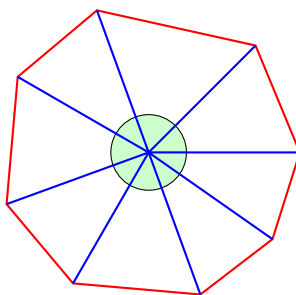
En matemáticas, frecuentemente podemos demostrar un mismo teorema de varias formas.

Por ejemplo, el Teorema de Pitágoras tiene más de cien formas diferentes de demostrarse.

Ejemplo 2

Demuestra de una segunda forma que la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es igual a $180(n - 2)^\circ$.

- Empezamos trazando un polígono de n lados y elegimos un punto dentro del mismo.
- Desde este punto interno trazamos segmentos de recta hasta cada uno de los vértices, como se muestra en la siguiente figura:



- Así hemos formado n triángulos.
- La suma de los ángulos internos todos esos triángulos es $180n^\circ$.
- Pero los ángulos que están alrededor del punto interno al polígono que sirve de vértice común a todos los triángulos que dibujamos, no son parte de los ángulos internos del polígono.
- Estos ángulos adyacentes suman 360° .
- Así que la suma de los ángulos internos del polígono es:

$$S_{\text{int}} = 180n^\circ - 360^\circ = 180(n - 2)^\circ$$

- Y con esto terminamos la demostración.

De este teorema se desprenden los siguientes corolarios.

Corolario 1

Cada ángulo de un polígono equiángulo mide $(180(n - 2)/n)^\circ$.

Corolario 2

La suma de los cuatro ángulos internos de cualquier cuadrilátero es 360° .

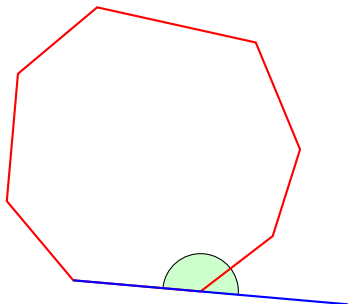
Corolario 3

Si al menos tres ángulos internos de un cuadrilátero son iguales, entonces todos sus ángulos internos miden lo mismo.

Teorema 2

La suma de todos los ángulos externos de un polígono de n lados es 360° .

Ya sabemos que la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es igual a $180(n-2)^\circ$. Podemos prolongar cada lado en uno de sus sentidos para observar que un ángulo externo y su correspondiente interno adyacente suman 180° .



Si sumamos todos los ángulos internos con los externos obtenemos:

$$S_{\text{ext}} + S_{\text{int}} = 180n^\circ$$

Si a este valor le restamos la suma de los ángulos internos obtenemos la suma de los ángulos externos:

$$\begin{aligned} S_{\text{ext}} &= 180n^\circ - S_{\text{int}} \\ &= 180n^\circ - 180(n-2)^\circ \\ &= 180n^\circ - 180n^\circ + 180(2)^\circ \\ &= 360^\circ \end{aligned}$$

Entonces, la suma de los ángulos externos de un polígono de n lados es 360° . ■

De este teorema se desprenden los siguientes corolarios:

Cada ángulo externo de un polígono equiángulo de n lados mide $(360/n)^\circ$.

Corolario 4

La suma de los ángulos externos de un polígono no depende del número de lados.

Corolario 5

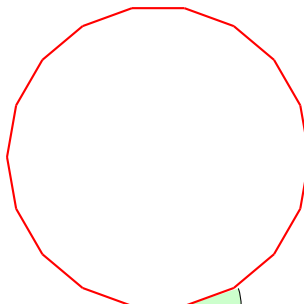
Calcula la medida de cada ángulo externo del polígono de 20 lados.

Ejemplo 3

- En este caso tenemos $n = 20$.
- Sustituyendo en la fórmula obtenemos:

$$\alpha_{\text{ext}} = \frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$$

- Enseguida se muestra el polígono regular de 20 lados y uno de sus ángulos externos:



- Por otra parte, el ángulo interno debe medir: $180^\circ - 18^\circ = 162^\circ$, lo cual podemos verificar usando la fórmula:

$$\alpha_{\text{int}} = \frac{S_{\text{int}}}{n} = \frac{180(n-2)^\circ}{n} = \frac{180(18)^\circ}{20} = 162^\circ$$

Ejemplo 4

Calcula la medida de cada ángulo externo de los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 7, y 8 lados.

- Aplicamos la fórmula en cada caso.
- Empezamos con $n = 3$, el triángulo:

$$\alpha_{\text{ext}} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

Este resultado es obvio, pues el ángulo interno del triángulo equilátero es de 60° , su suplemento debe medir 120° .

- Ahora calculamos el valor del ángulo externo del cuadrilátero regular:

$$\alpha_{\text{ext}} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

- Ahora consideramos al pentágono regular:

$$\alpha_{\text{ext}} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

- A continuación, el hexágono regular:

$$\alpha_{\text{ext}} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

- Ahora el heptágono regular:

$$\alpha_{\text{ext}} = \frac{360^\circ}{7} \approx 51.42857143^\circ$$

- Y finalmente, el octágono regular:

$$\alpha_{\text{ext}} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

Ejemplo 5

¿Cuántos lados tiene el polígono que cumple que la diferencia de la suma de los ángulos internos menos la suma de los ángulos externos es 900° ?

- Definimos por n al número de lados de ese polígono.
- Sabemos que:

$$S_{\text{int}} - S_{\text{ext}} = 900^\circ$$

- Entonces, tenemos que resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} 180(n-2) - 360 &= 900^\circ \\ 180n - 360 &= 900^\circ + 360 \\ 180n &= 1260^\circ + 360 \\ n &= \frac{1620^\circ}{180^\circ} = 9 \end{aligned}$$

- Entonces, se trata de un eneágono, también conocido como nonágono.

¿Cuántos lados tiene el polígono cuyos ángulos internos suman 1800° ?

Ejemplo 6

- Debemos resolver la ecuación:

$$S_{\text{int}} = 1800^\circ$$

- La solución es:

$$\begin{aligned} 180(n-2)^\circ &= 1800^\circ \\ 180n^\circ - 360^\circ &= 1800^\circ \\ 180n^\circ &= 2160^\circ \\ n &= \frac{2160^\circ}{180^\circ} = 12 \end{aligned}$$

- Entonces, se trata de un dodecágono.

¿Cuántos lados tiene el polígono que tiene la propiedad que todos los ángulos internos suman lo mismo que todos los ángulos externos?

Ejemplo 7

- En este caso tenemos la ecuación: $S_{\text{int}} = S_{\text{ext}}$, la cual resolvemos enseguida:

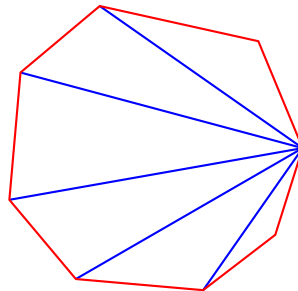
$$\begin{aligned} 180(n-2)^\circ &= 360^\circ \\ 180n^\circ - 360^\circ &= 360^\circ \\ 180n^\circ &= 720^\circ \\ n &= \frac{720^\circ}{180^\circ} = 4 \end{aligned}$$

- Se trata de un cuadrilátero.

2.1.4 TRIANGULACIÓN DE POLÍGONOS

Para calcular el área de un polígono de n lados nos apoyaremos en la fórmula para calcular el área de un triángulo.

Empezamos dibujando $n - 2$ diagonales que partan de un mismo vértice:



Ahora calculamos el área de cada uno de los triángulos que hemos formado dentro del polígono.

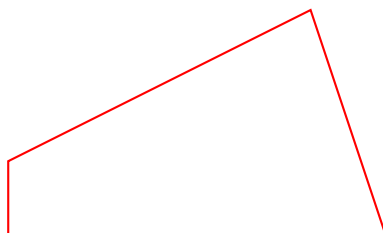
La suma de todas las áreas de los triángulos es igual al área del polígono.

2.1.5 PERÍMETROS Y ÁREAS

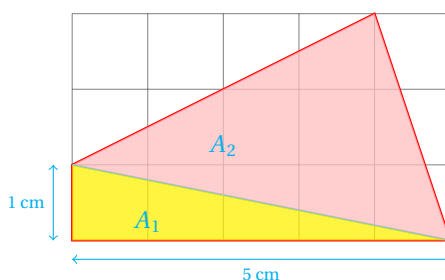
Ejemplo 1

Calcula el área del cuadrilátero mostrado:

- Cuadrilátero:



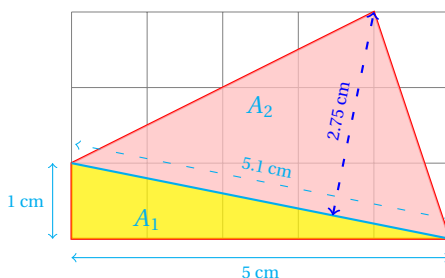
- Empezamos dibujando dos triángulos dentro del cuadrilátero trazando una de sus diagonales:



- Ahora tenemos que calcular el área de dos triángulos.
- Uno de los triángulos es rectángulo. Su base y altura se han indicado en la figura.
- Calcular su área es inmediato:

$$A_1 = \frac{(5)(1)}{2} = \frac{5}{2} \text{ cm}^2$$

- Para calcular el área A_2 del otro triángulo necesitamos medir su altura, como se muestra en la siguiente figura:



- Ahora que sabemos que $h = 2.75 \text{ cm}$ y la base de ese triángulo mide $b = 5.1 \text{ cm}$, podemos calcular el área A_2 :

$$A_2 = \frac{(5.1)(2.75)}{2} = 7.0125 \text{ cm}^2$$

- Al sumar $A_1 + A_2$ obtenemos el área del cuadrilátero:

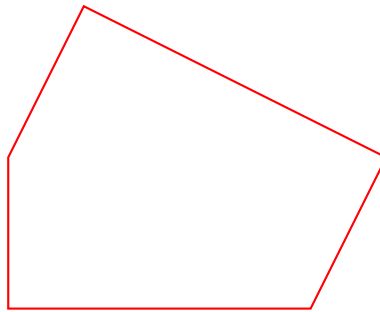
$$A = A_1 + A_2 = 2.5 \text{ cm}^2 + 7.0125 \text{ cm}^2 = 9.5125 \text{ cm}^2$$

De esta manera podemos *triangular* cualquier polígono para calcular su área.

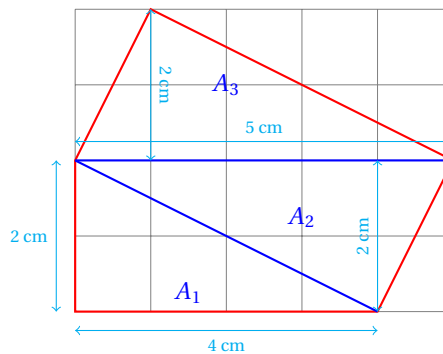
Calcula el área del siguiente polígono por medio de triangulación:

Ejemplo 2

- Polígono a considerar:



- Empezamos dibujando las diagonales del pentágono:



- Ahora solo calculamos el área de cada uno de los triángulos que hemos formado y sumamos estos valores para obtener el área del pentágono:

$$A_1 = \frac{(4)(2)}{2} = 4 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{(5)(2)}{2} = 5 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = \frac{(5)(2)}{2} = 5 \text{ cm}^2$$

- Y el área del polígono es:

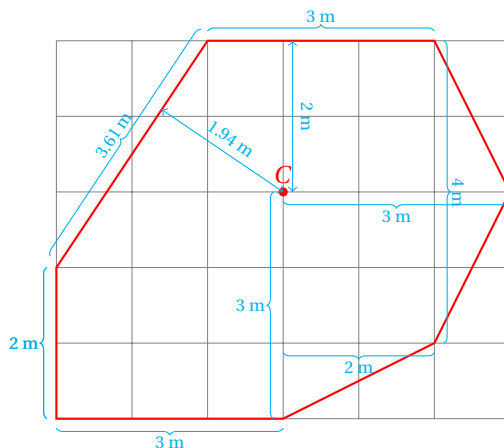
$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 4 \text{ cm}^2 + 5 \text{ cm}^2 + 5 \text{ cm}^2 = 14 \text{ cm}^2$$

Algunas veces conviene considerar un punto dentro del polígono en lugar de un vértice para formar la triangulación.

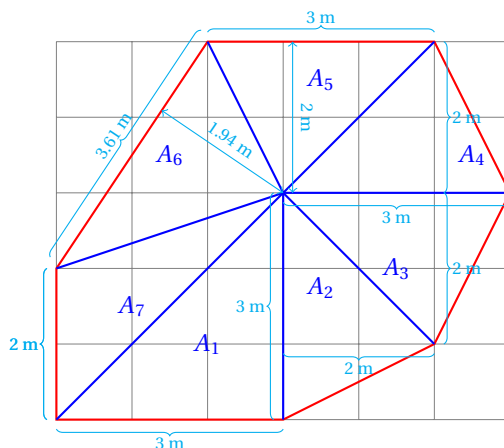
Calcula el área del terreno poligonal siguiente. El plano del terreno se ha cuadrículado para su medición.

Ejemplo 3

- Terreno:



- Empezamos trazando segmentos de recta desde cada vértice del polígono al punto de referencia C marcado en el terreno.
- Así que trazamos los segmentos de recta como se muestran en la siguiente figura:



- Ahora calculamos el área de cada triángulo:

$$A_1 = \frac{(3)(3)}{2} = 4.5 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{(3)(2)}{2} = 3 \text{ m}^2$$

$$A_3 = \frac{(3)(2)}{2} = 3 \text{ m}^2$$

$$A_4 = \frac{(3)(2)}{2} = 3 \text{ m}^2$$

$$A_5 = \frac{(3)(2)}{2} = 3 \text{ m}^2$$

$$A_6 = \frac{(3.61)(1.94)}{2} = 3.5 \text{ m}^2$$

$$A_7 = \frac{(2)(3)}{2} = 3 \text{ m}^2$$

$$\sum A_i = 23 \text{ m}^2$$

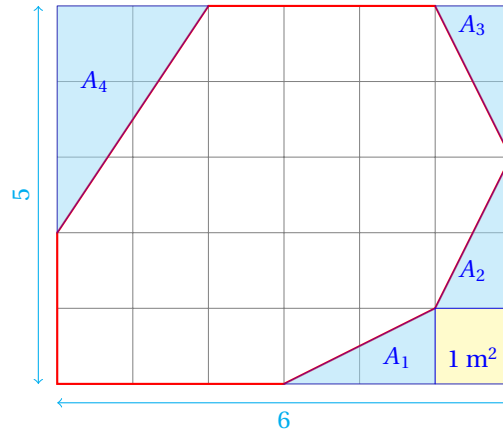
- Entonces, el área del heptágono es: 26 metros cuadrados.

El mismo problema puede atacarse de otra forma: primero calculamos el área de la cuadrícula que se dibujó sobre el plano del terreno y a esta área le restamos las áreas de los triángulos que quedan alrededor del terreno, sobre la cuadrícula.

Calcula el área y el perímetro del terreno del ejemplo anterior calculando el área de la cuadrícula primero y después restando el área de los triángulos que quedan alrededor.

Ejemplo 4

- Empezamos trazando los triángulos que quedan fuera del terreno sobre la cuadrícula:



- La cuadrícula tiene 30 m² de área; $6 \times 5 = 30$.
- Observa que los triángulos A₁, A₂ y A₃ tienen una base de 2 metros y una altura de 1 m.
- Entonces cada uno de ellos tiene un área de 1 metro cuadrado.
- El triángulo A₄ tiene un área de:

$$A_4 = \frac{(3)(2)}{2} = 3 \text{ m}^2$$

- Además hay un cuadrado de área en la esquina inferior derecha de la cuadrícula que no pertenece al terreno.
- Entonces, el área del terreno es:

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{cuadrícula}} - A_{\text{externa}} \\ &= \underbrace{30}_{\text{cuadrícula}} - \left[\underbrace{(3)(1)}_{A_1, A_2, A_3} - \underbrace{3}_{A_4} - \underbrace{1}_{1 \text{ m}^2} \right] \\ &= 23 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

- Como era de esperarse, debemos obtener el mismo resultado usando ambos procedimientos.
- Este nuevo procedimiento lo llamaremos «*triangulación externa*».
- Generalmente la *triangulación externa* es más exacta que la triangulación (interna) porque no requiere del cálculo de área a partir de aproximaciones.
- Recuerda que para calcular el área del triángulo necesitamos de las medidas de la base y la altura.
- Algunas veces vamos a hacer mediciones y obtendremos aproximaciones a los valores reales de estas medidas.
- Por eso, algunas veces es preferible usar el método de *triangulación externa*.
- Para calcular el perímetro vamos a aplicar el teorema de Pitágoras.

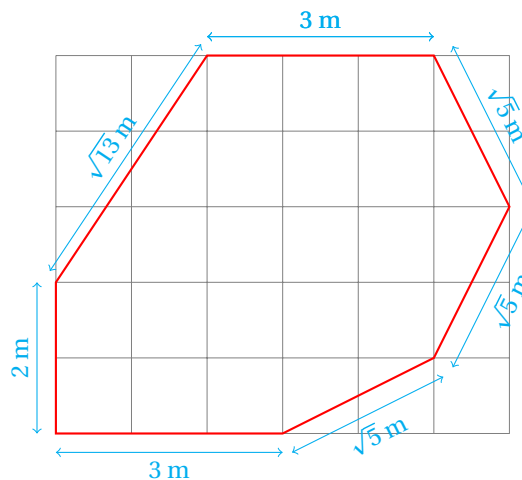
- Empezamos observando que algunos lados del terreno tienen lados enteros, mientras que otros son la diagonal de triángulos rectángulos.
- Para calcular la longitud de estos últimos vamos a aplicar el Teorema de Pitágoras.
- La hipotenusa del triángulo A_4 es:

$$h_4 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \text{ m}$$

- La hipotenusa de cada uno de los triángulos A_1, A_2 y A_3 es:

$$h = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \text{ m}$$

- Mostramos el terreno con las longitudes de todos sus lados:



- El perímetro no es sino la suma de las longitudes de todos los lados del terreno:

$$P = 3 + 3\sqrt{5} + 3 + \sqrt{13} + 2 = 8 + \sqrt{13} + 3\sqrt{13} \approx 18.314 \text{ metros}$$

2.2 CIRCUNFERENCIA

En esta sección vamos a estudiar los conceptos básicos relacionados con el objeto geométrico llamado circunferencia.

2.2.1 DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

La circunferencia muy frecuentemente se confunde con el círculo, que aunque están siempre juntos, son diferentes una figura geométrica de la otra.

CIRCUNFERENCIA

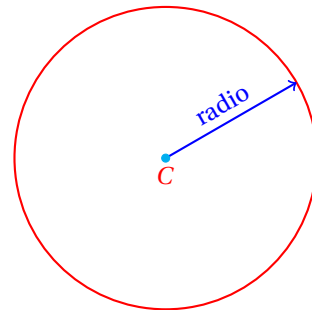
Es la figura geométrica formada por todos los puntos del plano que se encuentran a una distancia constante de un punto fijo llamado centro. La distancia fija se conoce como el radio de la circunferencia.

Definición 1

En la figura de la derecha, el radio es la distancia del centro de la circunferencia a cualquiera de sus puntos. Por eso, también llamamos *radio* al segmento de recta que va del centro a cualquiera de los puntos de la circunferencia.

El centro de la circunferencia está en su centro y está denotado por la literal *C*.

Los elementos de la circunferencia son los siguientes:



CUERDA

Segmento de recta que tiene sus puntos extremo sobre la circunferencia.

Definición 2

DIÁMETRO

Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Todo diámetro de una circunferencia es el eje de simetría de la misma. El diámetro es la mayor cuerda que se puede trazar a una circunferencia.

Definición 3

ARCO

Parte de la circunferencia delimitada por dos puntos de la misma. Estos puntos se llaman extremos del arco.

Definición 4

TANGENTE

Recta que toca a la circunferencia en un punto solamente.

Definición 5

PUNTO DE TANGENCIA

El punto donde la recta tangente toca a la circunferencia a la cual es tangente.

Definición 6

Un elemento más que podemos definir, como una generalización del concepto de tangente es el de secante:

SECANTE

Recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

Definición 7

Algunos elementos más que frecuentemente se requieren en las discusiones geométricas son:

Definición 8

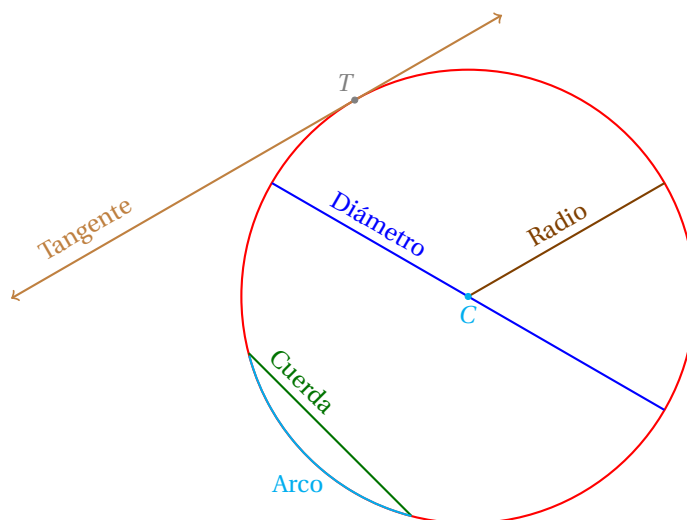
SEMICIRCUNFERENCIA

*Arco que abarca la mitad de la circunferencia.***Definición 9**

SEMICÍRCULO

La mitad de un círculo.

Y estos elementos se muestran en la siguiente figura:



Por la forma de la circunferencia es claro que todas las circunferencias son semejantes entre sí, independientemente de la medida de su radio.

De este hecho se desprende que si dividimos el perímetro de la circunferencia entre su diámetro siempre obtenemos el mismo cociente.

Este resultado se establece como un teorema.

Teorema 1

La razón de la circunferencia al diámetro es constante para todas las circunferencias.

Este teorema da origen a la siguiente definición.

Definición 10 π

El número π es igual al cociente: Circunferencia entre diámetro de una misma circunferencia y este valor es aproximadamente igual a 3.141592654

Matemáticamente, tenemos:

$$\pi = \frac{\text{Circunferencia}}{\text{Diámetro}} = \frac{C}{D} \approx 3.141592654$$

Este número irracional es muy importante en matemáticas y frecuentemente lo aproximamos usando el valor $\pi \approx 3.1416$ para facilitar los cálculos.

Otro concepto relacionado con el de circunferencia es el de *círculo*.

Definición 11

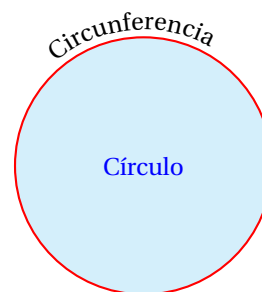
CÍRCULO

Región del plano delimitada por una circunferencia.

Es decir, la curva que delimita al círculo es una circunferencia. En otras palabras, el círculo es el área que queda encerrada por la circunferencia.

Nosotros podemos calcular el área de un círculo, pero no así para la circunferencia. Igualmente, podemos calcular el perímetro de una circunferencia, pero no así del círculo.

La fórmula para calcular el área del círculo se da en el siguiente teorema.



El área A_c del círculo de radio r es igual a:

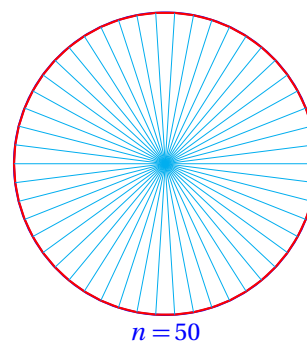
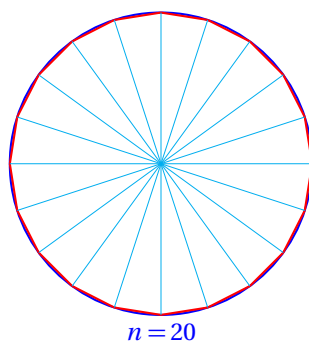
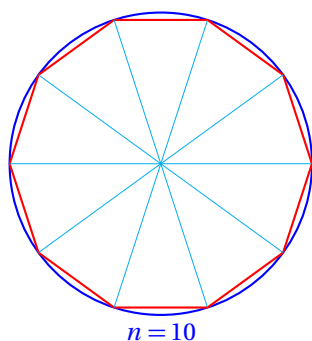
$$A_c = \pi r^2$$

Teorema 2

La demostración de este teorema no es difícil de dar, aunque requiere de la idea de límite, que estudiaremos hasta el curso de cálculo diferencial.

De cualquier manera, enseguida se da una idea general de la demostración.

Consideramos un polígono regular de n lados con vértices sobre la circunferencia de radio r como se muestra en la siguiente figura:



Conforme hacemos crecer el número de lados n del polígono regular, el área del polígono se parece cada vez más al área del círculo.

Nosotros podemos dividir el polígono regular de n lados en n triángulos con vértice en el centro de la circunferencia y base en cada lado del polígono.

Cuando n crece mucho la altura de cada triángulo se acerca mucho al radio de la circunferencia y la suma de todas las bases de los triángulos, que es igual al perímetro del polígono, se acerca cada vez más a la longitud de la circunferencia.

El área del polígono A_p es igual a la suma de las áreas de todos los triángulos que hemos formado:

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{b_1 h}{2} + \frac{b_2 h}{2} + \cdots + \frac{b_n h}{2} \\ &= \left(\frac{h}{2} \right) \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \end{aligned}$$

Pero cuando n crece mucho, la suma de las bases de los triángulos se acerca cada vez más a la longitud de la circunferencia C .

Y ya sabemos que $C = \pi \cdot D$, donde D es la longitud del diámetro y $\pi \approx 3.1416$.

Al sustituir:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = C$$

en la fórmula para calcular el área del polígono regular de n lados, obtenemos:

$$\begin{aligned} A_p &= \left(\frac{h}{2}\right) \cdot C \\ &= \frac{h}{2} \cdot 2\pi r \\ &= \pi hr \end{aligned}$$

Pero ya habíamos dicho que cuando n crece mucho, la altura h de cada triángulo mide lo mismo que el radio de la circunferencia y el área del polígono es igual al área del círculo, luego:

$$A_c = \pi r^2$$

2.2.2 RECTAS TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA

Cuando una recta toca a una circunferencia en un punto, la recta se llama tangente.

Las rectas tangentes a la circunferencia tienen especial interés en la geometría.

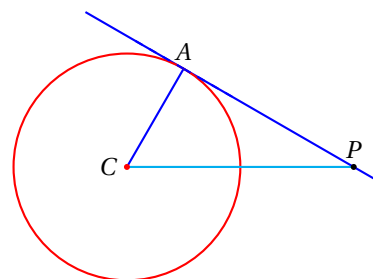
Teorema 1

El radio de una circunferencia trazado al punto de tangencia es perpendicular a la tangente.

Por la desigualdad del triángulo, $\overline{AC} + \overline{AP} > \overline{CP}$, para cualquier punto P que esté sobre la tangente, distinto de A , siendo A el punto de tangencia.

En otras palabras, para cualquier punto P diferente de A , la distancia desde P hasta el centro de la circunferencia es mayor que el radio.

Es decir, el radio es la menor distancia desde el centro de la circunferencia a la recta tangente, y por eso el radio es perpendicular a la recta tangente.



Otra forma de dar este mismo resultado es:

Corolario 1

La perpendicular a una recta tangente a una circunferencia en el punto de tangencia pasa por el centro de la circunferencia.

Teorema 2

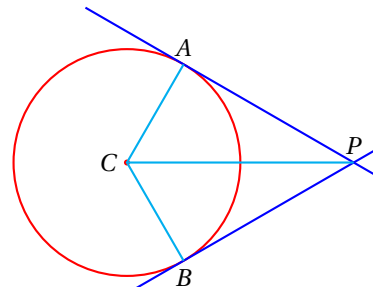
Dos tangentes a una circunferencia que pasan por un mismo punto P externo a la circunferencia y con puntos de tangencia en A y B , respectivamente, cumplen: $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$.

Trazamos dos radios a los puntos de tangencia y el segmento de recta que va del centro de la circunferencia al punto P .

Así hemos formado dos triángulos rectángulo: $\triangle CAP$ y $\triangle CBP$ siendo $\angle CAP$ y $\angle CBP$ ángulos recto.

En estos triángulos los lados $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ tienen la misma medida al ser ambos radios de la misma circunferencia.

Por otra parte, el segmento $\overline{CP}$ es la hipotenusa de ambos triángulos. Luego, los triángulos rectángulo trazados son iguales y los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ miden lo mismo.



El resultado de este teorema se hace evidente al observar la simetría de la figura, gracias a la forma que tiene la circunferencia.

Con este teorema podemos demostrar otros que nos ayudarán a resolver otros problemas más adelante.

Si desde un punto P externo a la circunferencia se dibujan tangentes a la misma, y se dibujan radios a los puntos de tangencia, el segmento que une el centro de la circunferencia y el punto P bisectan:

- El ángulo formado por las tangentes.
- El ángulo formado por los radios.
- La cuerda con extremos en los puntos de tangencia.

Teorema 3

Observa que los triángulos $\triangle CAP$ y $\triangle CBP$ son iguales porque tienen sus tres lados iguales.

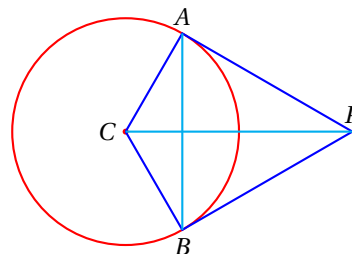
El lado $\overline{CP}$ es común a ambos triángulos, los lados $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ son radios de la circunferencia y el otro lado de cada triángulo se trata de cada tangente, por eso son iguales.

Esto indica que los triángulos $\triangle CAP$ y $\triangle CBP$ son congruentes.

Por eso, los ángulos $\angle APC$ y $\angle BPC$ son iguales.

También, $\angle ACP = \angle BCP$.

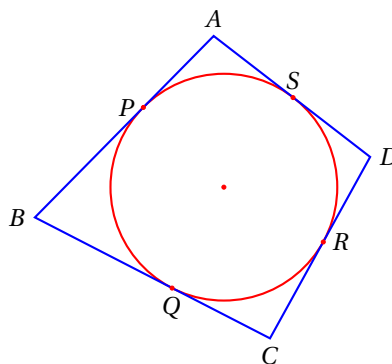
Observa que el segmento $\overline{CP}$ es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, porque el punto P equidista de los puntos A y B , y también C equidista de A y B , que es el método que utilizamos para trazar la mediatriz de un segmento. ■



Demuestra que si los cuatro lados de un cuadrilátero son tangentes a una circunferencia, la suma de las longitudes de dos lados opuestos es igual a la de los otros dos.

Ejemplo 1

- Empezamos trazando la figura correspondiente:



- Considerando la igualdad: $|\overline{AB}| + |\overline{CD}| = |\overline{BC}| + |\overline{AD}|$.
- Pero $|\overline{AB}| = |\overline{AP}| + |\overline{PB}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{BQ}| + |\overline{QC}|$, $|\overline{CD}| = |\overline{CR}| + |\overline{RD}|$, y $|\overline{AD}| = |\overline{AS}| + |\overline{SD}|$.
- Luego:

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| + |\overline{CD}| &= |\overline{BC}| + |\overline{AD}| \\ (|\overline{AP}| + |\overline{PB}|) + (|\overline{CR}| + |\overline{RD}|) &= (|\overline{BQ}| + |\overline{QC}|) + (|\overline{AS}| + |\overline{SD}|) \end{aligned}$$

- Por otra parte, dado que los lados son tangentes a la circunferencia, la distancia desde cualquier vértice del cuadrilátero hasta dos puntos de tangencia consecutivos es constante.
- Entonces, también se cumple: $|\overline{AP}| = |\overline{AS}|$, $|\overline{BP}| = |\overline{BQ}|$, $|\overline{CQ}| = |\overline{CR}|$, y $|\overline{DR}| = |\overline{DS}|$.

- De las cuatro igualdades anteriores, cada uno de los miembros está, bien a la izquierda, bien a la derecha de la ecuación:

$$(|\overline{AP}| + |\overline{PB}|) + (|\overline{CR}| + |\overline{RD}|) = (|\overline{BQ}| + |\overline{QC}|) + (|\overline{AS}| + |\overline{SD}|)$$

Y por eso se cumple la igualdad.

2.2.3 ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

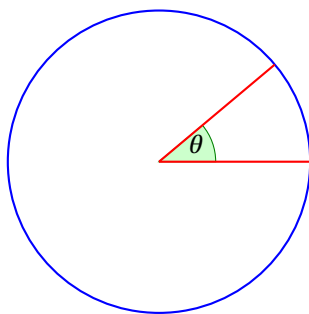
En la circunferencia frecuentemente encontramos ciertos ángulos que nos ayudan a encontrar algunas de sus propiedades y a resolver problemas.

Definición 1

ÁNGULO CENTRAL

En una circunferencia, el ángulo inscrito es aquel que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y cuyos lados son dos radios.

La siguiente figura se muestra un ángulo central θ :



Se dice que un ángulo central es subtendido por el arco cuyos extremos son los puntos donde tocan sus lados a la circunferencia.

Teorema 1

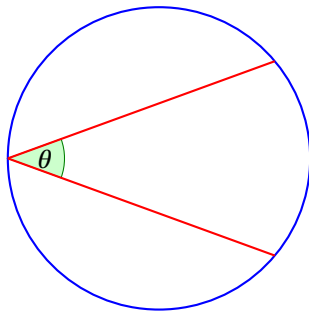
La medida de un ángulo central es igual a la medida del arco que lo subtiende.

Definición 2

ÁNGULO INSCRITO

En una circunferencia un ángulo inscrito tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son cuerdas.

En la figura se muestra un ángulo inscrito:



Teorema 2

Todo ángulo inscrito mide la mitad del arco que subtiende.

Capítulo 3

Funciones Trigonométricas

Por aprender...

- 3.1. Funciones trigonométricas para ángulos agudos
 - 3.1.1. Conversión de grados a radianes y viceversa
 - 3.1.2. Funciones recíprocas
 - 3.1.3. Cálculos de valores para ángulos notables
 - 3.1.4. Resolución de triángulos rectángulos
- 3.2. Funciones trigonométricas para ángulos de cualquier magnitud
 - 3.2.1. En el plano coordenado
 - 3.2.2. En el círculo unitario

Por qué es importante...

Podemos resolver muchas situaciones prácticas utilizando las funciones trigonométricas...

3.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS AGUDOS

La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia la resolución de triángulos.

TRIGONOMETRÍA

Es la rama de las matemáticas que estudia las proporciones de los lados y los ángulos de los triángulos en el plano, sus aplicaciones y relaciones entre las funciones trigonométricas.

Definición 3

En la geometría, para calcular los lados de un triángulo, casi nunca considera las magnitudes de los ángulos.

Por el contrario, en trigonometría, la resolución de triángulos, siempre vamos a utilizar los ángulos internos del triángulo para calcular las longitudes de los lados desconocidos.

Con este fin, en la trigonometría se definen las funciones trigonométricas.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas son razones que caracterizan a un ángulo, de acuerdo a la proporción de dos lados de un triángulo que tiene por ángulo interno al ángulo en consideración.

Las funciones trigonométricas son las siguientes:

✓ Seno ($\sin \theta$)

✓ Cosecante ($\csc \theta$)

✓ Coseno ($\cos \theta$)

✓ Secante ($\sec \theta$)

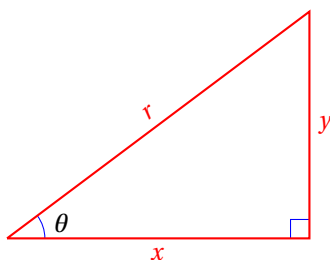
✓ Tangente ($\tan \theta$)

✓ Cotangente ($\cot \theta$)

Definición 4

Las funciones trigonométricas caracterizan a un ángulo θ . En un triángulo rectángulo, las proporciones de sus lados nos dan una idea de los ángulos que lo forman. Esta idea es la que nos ayuda a definir las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

En un triángulo rectángulo, las seis funciones trigonométricas se definen como sigue:



$$\checkmark \sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\checkmark \csc \theta = \frac{r}{y}$$

$$\checkmark \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\checkmark \sec \theta = \frac{r}{x}$$

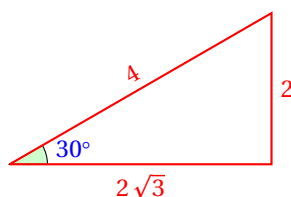
$$\checkmark \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\checkmark \cot \theta = \frac{x}{y}$$

Calcula los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo $\theta = 30^\circ$ mostrado en el siguiente triángulo rectángulo:

Ejemplo 1

- Figura:



- Calculamos los valores de cada una de las funciones trigonométricas a partir de la definición dada en el triángulo rectángulo:

$$\sin 30^\circ = \frac{y}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{y}{x} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\csc 30^\circ = \frac{r}{y} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\sec 30^\circ = \frac{r}{x} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{x}{y} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

3.1.1 CONVERSIÓN DE GRADOS A RADIANES

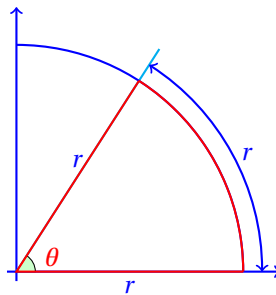
Para medir la magnitud de un ángulo, además de los grados sexagesimales tenemos otra unidad de medida conocida como el radián.

Definición 1

RADIÁN

Unidad de medida de ángulo que es igual al ángulo que subtendido por un arco de longitud igual al radio. El radián se abrevia como rad.

En la siguiente figura se muestra el ángulo θ que mide un radián:



Como el radio cabe $2\pi \approx 6.2831853$ veces en el perímetro de la circunferencia, tenemos que $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$.

Entonces, para hacer la conversión de grados a radianes o de radianes a grados aplicaremos una regla de tres directa.

Ejemplo 1

Convierte 180° y 90° a radianes.

- Aplicamos directamente la regla de tres:

	Grados	$\Rightarrow$	Radianes
Datos conocidos:	360°	$\Rightarrow$	$2\pi \text{ rad}$
Para calcular:	180°	$\Rightarrow$	x

- De donde:

$$x = \frac{180^\circ (2\pi \text{ rad})}{360^\circ} = \pi \text{ rad}$$

- Para el caso del ángulo recto:

Datos conocidos:	180°	$\Rightarrow$	$\pi \text{ rad}$
Para calcular:	90°	$\Rightarrow$	y

- Entonces,

$$y = \frac{90^\circ (\pi \text{ rad})}{180} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Convierte 1 radián a grados sexagesimales.

Ejemplo 2

- Aplicamos de nuevo la regla de tres:

	Grados	⇒	Radianes
Datos conocidos:	180°	⇒	π rad
Para calcular:	x°	⇒	1 rad

- Al calcular el valor de x obtenemos:

$$1 \text{ rad} = x = \frac{180}{\pi}^\circ \approx 57.29577951^\circ = 57^\circ 17' 44.81''$$

- Si el valor de π fuera 3, la división daría 60° .
- Al ser el valor de $\pi > 3$, el resultado de la división es ligeramente menor a 60° .

¿Cuánto mide el ángulo interno del triángulo equilátero en radianes?

Ejemplo 3

- Ya sabemos que el ángulo interno del triángulo equilátero mide 60° .
- Vamos a convertirlo a radianes:

	Grados	⇒	Radianes
Datos conocidos:	180°	⇒	π rad
Para calcular:	60°	⇒	x

- De donde obtenemos:

$$x = \frac{(60^\circ)(\pi \text{ rad})}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

El procedimiento para convertir las unidades de un ángulo de grados a radianes y de radianes a grados es muy importante, porque frecuentemente vamos a requerir conversiones, no solamente en matemáticas, sino también en otras ramas de la ciencia como la física o la química.

Una ciclista viaja a 6 m/s en una carrera. Si la llanta de su bicicleta tiene un diámetro de 50 cm ¿qué ángulo barre uno de los puntos sobre la llanta (respecto de su centro) en cada segundo?

Ejemplo 4

- Sabemos que en un segundo la llanta recorre 6 metros.
- Y que el diámetro de ésta es de 50 cm.
- Vamos a calcular cuántas vueltas da la llanta por segundo:

$$\omega = \frac{\text{Distancia recorrida}}{\text{Perímetro}} = \frac{600 \text{ cm}}{50 \text{ cm}} = 12 \text{ rev/s}$$

- En una revolución completa recorre 360° , o bien 2π radianes.
- Pero como da 12 revoluciones en un segundo, el ángulo que barre un punto de la llanta respecto de su centro es:

$$\begin{aligned}\omega &= 12 \text{ rev/s}(360^\circ/\text{rev}) = 4320^\circ/\text{s} \\ \omega &= 12 \text{ rev/s}(2\pi \text{ rad/rev}) = 24\pi \text{ rad/s}\end{aligned}$$

- Las dos últimas magnitudes dadas son equivalentes.
- Cada una representa la misma velocidad angular.

3.1.2 FUNCIONES RECÍPROCAS

Ya se definieron las funciones trigonométricas.

De las seis funciones definidas anteriormente, las funciones trigonométrica recíprocas son las siguientes:

$$\checkmark \csc \theta$$

$$\checkmark \sec \theta$$

$$\checkmark \cot \theta$$

El adjetivo «recíprocas» viene del hecho que podemos establecer las siguientes identidades:

$$\checkmark \sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$$

$$\checkmark \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$$

$$\checkmark \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$$

La demostración de esto es inmediata:

$$1) \sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} = \frac{1}{\left(\frac{r}{y}\right)} = \frac{y}{r}$$

$$2) \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} = \frac{1}{\left(\frac{r}{x}\right)} = \frac{x}{r}$$

$$3) \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{y}{x}$$

■

Evidentemente, también se cumplen:

$$\checkmark \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\checkmark \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\checkmark \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

y su demostración es muy parecida a la que se acaba de dar.

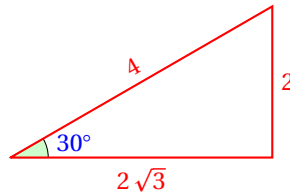
3.1.3 CÁLCULOS DE VALORES PARA ÁNGULOS NOTABLES

Los ángulos notables son aquellos que aparecen frecuentemente en la resolución de problemas.

Estos ángulos son los que miden: 30° , 45° y 60° .

Para calcular los valores de las funciones trigonométricas vamos a dibujar triángulos rectángulos que tengan a estos ángulos en uno de sus ángulos internos.

Para esto, utilizamos la figura utilizada en secciones anteriores:

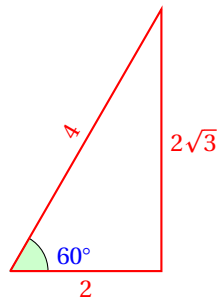


Dado que el triángulo es rectángulo, y uno de los ángulos agudos mide 30° , el otro debe medir 60° .

Con eso, podemos calcular los valores de las funciones trigonométricas de estos ángulos.

Ya calculamos los valores para 30° en la página 82.

Ahora calculamos los valores para 60° modificando la figura como se muestra enseguida:



Observa que la altura del cuadrado mide $2\sqrt{3}$, porque al aplicar el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{(4)^2 - (2)^2} = \sqrt{12} = \sqrt{(3)(4)} = \sqrt{(3)(2)^2} = 2\sqrt{3}$$

Los valores de las funciones trigonométricas para $\theta = 60^\circ$ son:

$$\sin 60^\circ = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

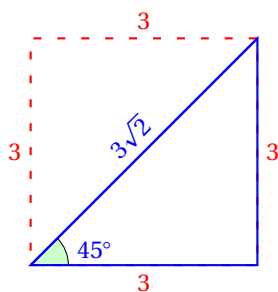
$$\tan 60^\circ = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\csc 60^\circ = \frac{r}{y} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{r}{x} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\cot 60^\circ = \frac{x}{y} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para calcular los valores correspondientes al ángulo de 45° , vamos a trazar un cuadrilátero regular (un cuadrado) y vamos a considerar una de sus diagonales:



Para calcular la longitud de la diagonal del cuadrado utilizamos el teorema de Pitágoras:

$$D = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{2(3)^2} = 3\sqrt{2}$$

Consideramos solamente el triángulo que se forma con dos de los lados del cuadrado y su diagonal que corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo:

$$\sin 45^\circ = \frac{y}{r} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\csc 45^\circ = \frac{r}{y} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{x}{r} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{r}{x} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{y}{x} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{x}{y} = \frac{3}{3} = 1$$

Con los valores obtenidos podemos crear la siguiente tabla de resumen de los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables:

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\csc \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Estos valores nos serán de gran utilidad para resolver problemas en lo sucesivo.

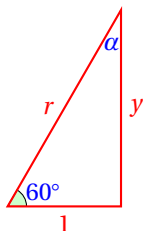
3.1.4 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Ahora vamos a aplicar las funciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos.

Ejemplo 1

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:

- Figura:



- Empezamos notando que podemos utilizar la información de la tabla de resumen de valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables (página 86).
- Para calcular el valor de r podemos aplicar la función coseno, pues esta función incluye a r , x (que es el valor que conocemos) y al ángulo $\theta = 60^\circ$:

$$\sec \theta = \frac{r}{x} \quad \Rightarrow \quad r = x \sec \theta = (1)(2) = 2$$

- Para calcular el otro cateto desconocido del triángulo, tenemos varios métodos:
- **Primer Método:** (Teorema de Pitágoras)

$$y^2 = r^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{3}$$

- **Segundo Método:** (Aplicar $\sin \theta$)

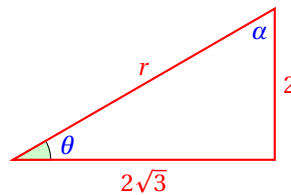
$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad y = r \sin \theta = 2 \sin(60^\circ) = (2) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3} \text{ cm}$$

- El ángulo α , es el complemento del ángulo $\theta = 60^\circ$, porque los dos ángulos agudos de cualquier triángulo rectángulo suman 90° .
- Entonces, $\alpha = 90^\circ - \theta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.
- Y terminamos.

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:

Ejemplo 2

- Figura:



- Empezamos observando que desconocemos la medida de la hipotenusa.
- Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$r = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

- Ahora vamos a calcular cada uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo.
- Utilizamos la definición de tangente:

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- Del resumen de los valores de las funciones trigonométricas (página 86) vemos que $\theta = 30^\circ$.

- Entonces, dado que: $\alpha + \theta = 90^\circ$, se sigue que:

$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

- Y terminamos.

Cuando los valores de las funciones trigonométricas no estén en la tabla de resumen, tendremos que utilizar una calculadora científica.

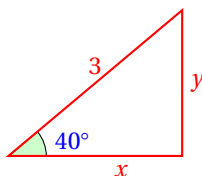
Recuerda antes de hacer los cálculos que debes indicar en la calculadora que las medidas de los ángulos que utilizaremos están en grados sexagesimales.

Tu profesor de matemáticas te puede ayudar a configurar la calculadora para que los cálculos se realicen en grados sexagesimales y no en radianes.

Ejemplo 3

Calcula la longitud de cada uno de los catetos del triángulo rectángulo siguiente:

- Figura:



- De la figura, sabemos que $r = 3$ cm, y $\theta = 40^\circ$.
- A partir de las definiciones de las funciones trigonométricas $\sin \theta$ y $\cos \theta$ podemos calcular los valores de y y x respectivamente.
- Para eso, vamos a sustituir los valores conocidos y despejar la incógnita en cada caso.
- Empezamos calculando el valor de x :

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad x = r \cos \theta = 3 \cos(40^\circ) \approx 2.2981$$

- Ahora calculamos el valor de y usando el mismo procedimiento:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad y = r \sin \theta = 3 \sin(40^\circ) \approx 1.92836$$

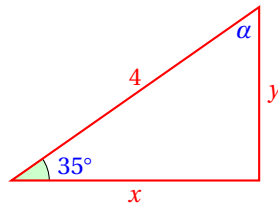
- El otro ángulo agudo mide 50° , porque los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.
- Y terminamos.

Recuerda que resolver un triángulo significa calcular las longitudes de todos sus lados y las medidas de todos sus ángulos.

Ejemplo 4

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo a partir de la información dada:

- Figura:



- Empezamos calculando el ángulo agudo desconocido.
- Dado que la suma de los tres ángulos internos es 180° y uno de ellos es un ángulo recto, tenemos que la suma del ángulo desconocido más 35° es igual a 90° .
- Entonces, si α es la medida del ángulo desconocido tenemos:

$$35^\circ + \alpha = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

- Para calcular las longitudes de los lados aplicamos la definición de las funciones trigonométricas $\cos \theta$ y $\sin \theta$:

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad x = r \cos \theta = 4 \cos(35^\circ) \approx 3.2766$$

- Ahora calculamos el valor de y usando el mismo procedimiento:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad y = r \sin \theta = 4 \sin(35^\circ) \approx 2.2943$$

- Y terminamos.

Algunas veces no vamos a tener el valor de algún ángulo agudo del triángulo rectángulo y además, no estará en la tabla de resumen (página 86).

En esos casos tendremos que aplicar las funciones trigonométricas inversas.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Funciones que calculan el valor de un ángulo a partir del valor de una función trigonométrica del mismo ángulo.

Definición 1

Las funciones trigonométricas son:

- ✓ Arcoseno: $\arcsin y$
- ✓ Arcocoseno: $\arccos x$
- ✓ Arcotangente: $\arctan m$

Si nosotros conocemos que el seno de $30^\circ = 0.5$, cuando aplicamos este valor (0.5) a la función seno inverso nos devuelve 30° .

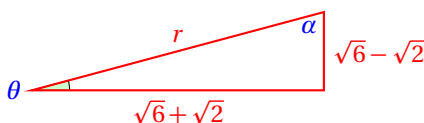
Es decir, una función inversa contesta a la pregunta: «Sé que el valor de la función trigonométrica $f(\theta)$ es u . ¿Cuánto vale el ángulo θ ?»

Nosotros sustituimos el valor u en la función trigonométrica y nos devuelve el valor del ángulo θ .

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:

Ejemplo 5

- Figura:



- En este caso solamente conocemos uno de los ángulos del triángulo: el ángulo recto.
- Podemos empezar calculando la hipotenusa del triángulo rectángulo aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{(6 + 2\sqrt{12} + 2) + (6 - 2\sqrt{12} + 2)} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \end{aligned}$$

- Teniendo las longitudes de los lados del triángulo, podemos calcular cualquiera de los valores de las funciones trigonométricas del ángulo θ :

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

- Ahora, para calcular el ángulo θ podemos aplicar una función trigonométrica inversa.
- **Primer Método:** (Aplicar $\arcsin y$)

$$\theta = \arcsin y = \arcsin(\sin \theta) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) = 15^\circ$$

- **Segundo Método:** (Aplicar $\arccos x$)

$$\theta = \arccos x = \arccos(\cos \theta) = \arccos\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = 15^\circ$$

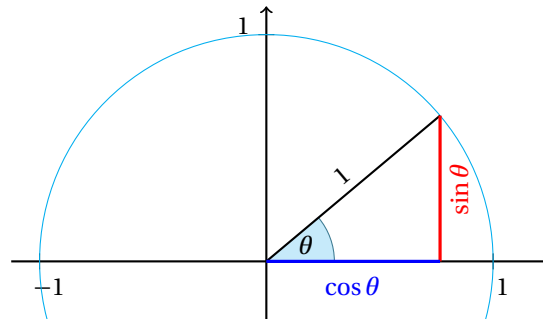
- **Tercer Método:** (Aplicar $\arctan m$)

$$\theta = \arcsin y = \arctan(\tan \theta) = \arctan\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}\right) = 15^\circ$$

- El otro ángulo agudo del triángulo rectángulo debe medir: $90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

Una interpretación geométrica de las funciones $\sin \theta$ y $\cos \theta$ que nos servirá para resolver algunos problemas es la siguiente.

Considera una circunferencia unitaria, y en ésta traza un radio, como se muestra en la siguiente figura:



Observa que las funciones trigonométricas están representadas por segmentos de recta que resultan de las proyecciones, horizontal para el coseno y vertical para el seno, porque si la hipotenusa del triángulo rectángulo mide 1, entonces,

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \quad \text{y también,} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

3.1.5 F. TRIG. PARA ÁNGULOS DE CUALQUIER MAGNITUD

Ahora vamos a utilizar la circunferencia unitaria para descubrir algunas propiedades de las funciones trigonométricas.

Empezamos con las funciones $\sin \theta$ y $\cos \theta$.

Al variar el valor del ángulo θ el radio sobre la circunferencia unitaria va girando desde 0° hasta 360° y para valores mayores los valores de las funciones trigonométricas se vuelven a repetir.

Recuerda que la proyección horizontal del radio es igual al valor de la función coseno y que la proyección vertical del radio es igual al valor de la función seno.

Observa que cuando $\theta = 0^\circ = 0 \text{ rad}$, la función coseno tiene una proyección horizontal de longitud igual al radio. Es decir, $\cos(0) = 1$.

Conforme los valores de θ van creciendo, los valores de la función $\cos \theta$ van decreciendo, hasta llegar al valor cero cuando $\theta = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$.

Para ángulos mayores a 90° las proyecciones horizontales del radio se van al lado negativo, pues no caen sobre el lado inicial del ángulo, y los valores de la función $\cos \theta$ van creciendo, pero con valores negativos, hasta llegar a tomar el valor -1 cuando $\theta = 180^\circ = \pi \text{ rad}$.

Cuando θ rebasa los 180° , los valores de la función coseno vuelven a decrecer (siendo negativos), hasta llegar al valor 0 cuando $\theta = 270^\circ = (3\pi/2) \text{ rad}$.

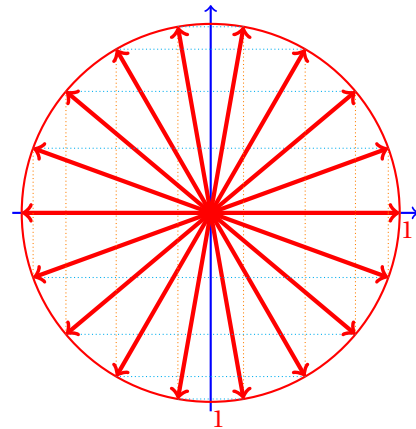
Finalmente, cuando el ángulo θ rebasa los 270° , la función coseno vuelve a tomar valores positivos crecientes, hasta que alcanza el máximo valor a los $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$, y los valores se vuelven a repetir de nuevo.

Una discusión similar corresponde a la función seno.

Cuando $\theta = 0^\circ$, la proyección vertical del radio es un punto, por eso, $\sin(0) = 0$.

Conforme el ángulo θ va creciendo, las proyecciones verticales también crecen, y son positivas, llegando a un máximo cuando $\theta = 90^\circ$. Entonces, $\sin \theta = 1$, siendo $\theta = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$.

Al seguir creciendo $\theta > 90^\circ$, los valores de la función seno van decreciendo, pero siguen siendo positivos,



hasta que θ alcanza un valor de 180° , porque en ese punto la proyección vertical del radio de nuevo es un punto al igual que al inicio y tenemos: $\sin(180^\circ) = 0$.

Cuando θ rebasa los 180° , las proyecciones verticales del radio quedan por debajo del eje horizontal y por eso son negativas. Los valores de la función seno van creciendo negativamente hasta alcanzar el valor -1 para un ángulo $\theta = 270^\circ$.

Para ángulos θ entre 270° y 360° los valores de la función seno van decreciendo en valor absoluto, pero siendo negativos y llegando a cero cuando $\theta = 360^\circ$.

Todo este ciclo se repite de nuevo si hacemos crecer aún más el ángulo θ . Por eso, generalmente nos quedamos con el estudio de los valores de las funciones trigonométricas utilizando solamente el intervalo $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, pues para valores mayores de θ podemos imaginarnos que giramos varias veces (cuantas veces sea necesario) para que θ coincida con un ángulo en el intervalo inicial ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$) y obtener los valores de las funciones de aquí.

En otras palabras, los valores de las funciones trigonométricas se van repitiendo cada 360° . Por eso decimos que las funciones trigonométricas son periódicas.

Definición 1**FUNCIÓN PERIÓDICA**

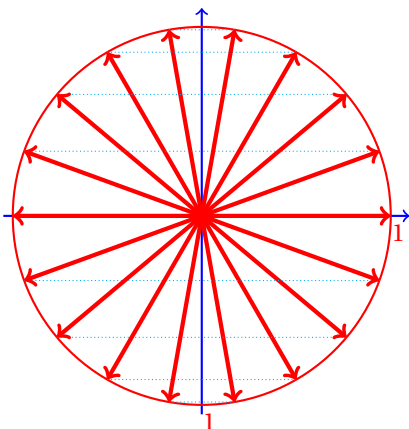
Si una función f que tiene la propiedad: $f(x) = f(x + k)$ para un k dado característico de cada función, entonces decimos que la función es periódica.

Definición 2**PERIODO DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA**

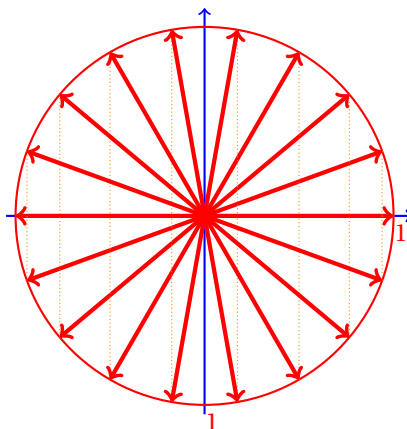
Sea f una función periódica. El valor mínimo de k que hace que se cumpla: $f(x) = f(x + k)$ para toda x en el dominio de la función f es el periodo de la función.

Observa que por la simetría se cumple:

$$\cos \theta = \cos(-\theta)$$



$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$



Recuerda que el ángulo positivo gira en contra de las manecillas del reloj, mientras que el ángulo negativo a favor de las manecillas.

Si cambiamos el valor de θ por $(-\theta)$, obtenemos el mismo valor de la función. Es decir, las proyecciones horizontales de radios con inclinaciones θ o $(-\theta)$ son iguales.

Observa que en los triángulos rectángulos equivalentes:



los ángulos θ y β son complementarios.

Lo único que hemos hecho es cambiar la posición del triángulo para obtener el de la izquierda a partir del triángulo de la derecha.

Observa que $\sin \theta = \cos \beta$, porque:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \text{y} \quad \cos \beta = \frac{y}{r}$$

También se cumple: $\sec \theta = \csc \beta$, porque:

$$\sec \theta = \frac{r}{y} \quad \text{y} \quad \csc \beta = \frac{r}{y}$$

Y finalmente, también: $\tan \theta = \cot \beta$, porque:

$$\tan \theta = \frac{r}{y} \quad \text{y} \quad \cot \beta = \frac{r}{y}$$

Ahora observa los nombres de las funciones relacionadas como se ha indicado:

Función	Cofunción
Seno ($\sin \theta$)	Coseno ($\cos \beta$)
Secante ($\sec \theta$)	Cosecante ($\csc \beta$)
Tangente ($\tan \theta$)	Cotangente ($\cot \beta$)

Y al recordar que los ángulos θ y β son complementarios, puedes imaginar de dónde viene el prefijo «co» de las cofunciones.

COFUNCIÓN

La cofunción $C(\beta)$ de una función trigonométrica $f(\theta)$ es la función trigonométrica que cumple:

$$f(\theta) = C(90^\circ - \theta)$$

para: $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

Definición 3

Este resultado se establece como un teorema:

Las funciones trigonométricas tienen las siguientes propiedades:

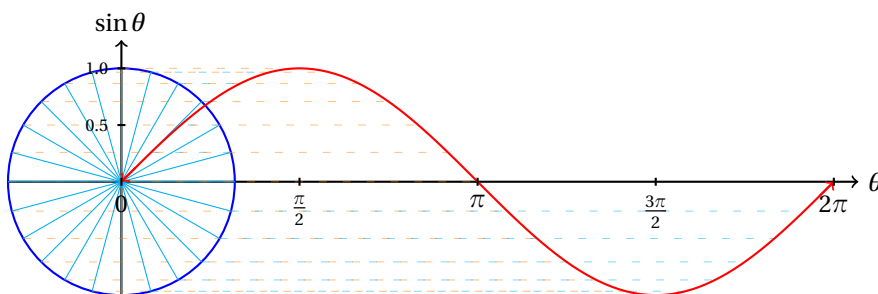
$$\begin{array}{lll} \checkmark \sin \theta = \cos(90^\circ - \theta) & \checkmark \sec \theta = \csc(90^\circ - \theta) & \checkmark \tan \theta = \cot(90^\circ - \theta) \\ \checkmark \cos \theta = \sin(90^\circ - \theta) & \checkmark \csc \theta = \sec(90^\circ - \theta) & \checkmark \cot \theta = \tan(90^\circ - \theta) \end{array}$$

En palabras, cualquier función de θ es igual a la cofunción del complemento de θ .

Teorema 1

Para graficar las funciones trigonométricas utilizamos los argumentos dados anteriormente y trazamos solamente un *periodo* de la función, y después solamente debemos repetir la gráfica, por la definición de función periódica.

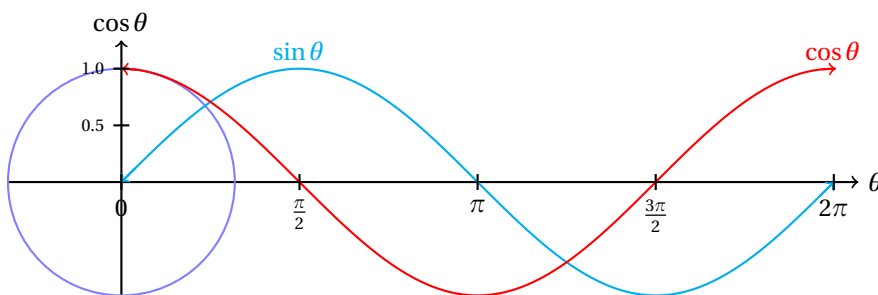
Enseguida se muestra la gráfica de la función seno:



Conforme vamos aumentando el valor del ángulo θ , vamos recorriendo el punto sobre el eje horizontal y graficamos el valor de $\sin \theta$. Al considerar varios puntos podemos obtener una idea de la gráfica de la función.

Al recordar que la función es periódica, podemos extenderla en ambas direcciones repitiendo la forma de la función tantas veces como se requiera.

Por otra parte, la gráfica de la función coseno se obtiene fácilmente al recordar que: $\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$, haciendo una traslación horizontal de la gráfica de la función $\sin \theta$ como se muestra en la siguiente figura:



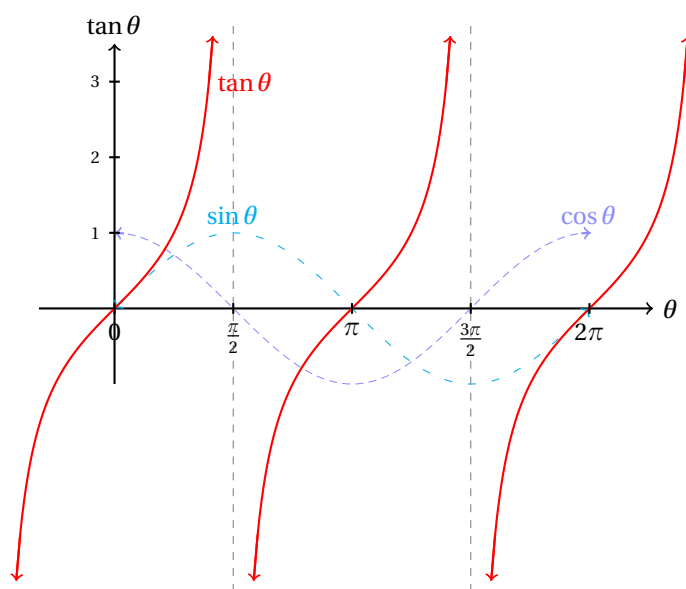
Para obtener la gráfica de la función $\tan \theta$ basta observar del triángulo rectángulo que usamos para definir las funciones trigonométricas que:

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Es decir, si dividimos el valor de $\sin \theta$ entre el valor de $\cos \theta$ obtenemos el valor de $\tan \theta$.

Cuando los valores de la función $\sin \theta$ van acercándose a cero, los valores de $\tan \theta$ también y $\tan \theta = 0$ exactamente en los mismos puntos para los cuales $\sin \theta = 0$.

Cuando los valores de la función $\cos \theta$ se acercan a cero, los valores del cociente $\sin \theta / \cos \theta$ crecen cada vez más, y cuando $\cos \theta = 0$, la división no está definida, así que en esos puntos la gráfica de la función $\tan \theta$ tampoco estará definida.



Como puedes ver, la gráfica de la función tangente también es periódica, pues sus valores se van repitiendo cada π rad.

La gráfica de $\tan \theta$ está compuesta de muchas ramas idénticas. Dado que no es posible dibujar la gráfica de la función tangente sin levantar el lápiz del papel sobre la cual se le dibuja, decimos que la gráfica es discontinua.

Los puntos de discontinuidad de la gráfica de la función tangente están en los puntos en donde $\cos \theta = 0$; es decir, en todos los múltiplos impares de $\pi/2$ radianes.

Resuelve los siguientes ejercicios.

Ejercicios
3.1.5

- 1) Utilizando la propiedad $\cot \theta = \tan(90^\circ - \theta)$ obtén la gráfica de la función $\cot \theta$.
- 2) Verifica que la gráfica de la función $\cot \theta$ que obtuviste en el ejercicio anterior cumple con que los puntos de discontinuidad están en donde $\sin \theta = 0$ usando las gráficas de las funciones $\sin \theta$ y $\cos \theta$.
- 3) En el texto se menciona: «Los puntos de discontinuidad de la gráfica están en los puntos en donde $\cos \theta = 0$; es decir, en todos los múltiplos impares de $\pi/2$ radianes.» Corrige esta frase adaptándola para el caso de la gráfica de la función $\cot \theta$.
- 4) Adapta la frase del ejercicio anterior para indicar en qué puntos se encuentran los ceros de la función seno.
- 5) Adapta la frase del ejercicio anterior para indicar en qué puntos se encuentran los ceros de la función coseno.

Capítulo 4

Leyes de Senos y Cosenos

Por aprender...

4.1. Leyes de Senos y Cosenos

- 4.1.1. Ley de senos
- 4.1.2. Ley de cosenos
- 4.1.3. Resolución de triángulos oblicuángulos
- 4.1.4. Aplicaciones prácticas

Por qué es importante...

Las leyes de senos y cosenos generalizan la solución de triángulos. En el anterior capítulo solamente resolvimos triángulos rectángulos. Estas leyes nos permiten resolver triángulos de cualquier tipo.

4.1 LEY DE SENOS

Hasta ahora hemos resuelto triángulos rectángulos, pero también es común encontrar problemas con triángulos que no son rectángulos, como acutángulos u obtusángulos.

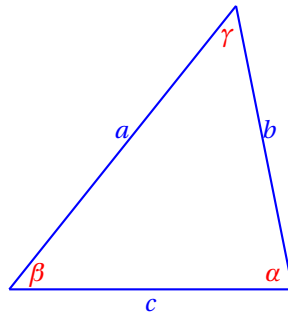
Para resolver estos problemas el método que hemos utilizado no funciona, pero podemos utilizar la ley de senos.

LEY DE SENOS

Para cualquier triángulo que se encuentre en el plano, con ángulos internos α, β, γ , y longitudes de lados opuestos a, b, c respectivamente, se cumple:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Teorema 2



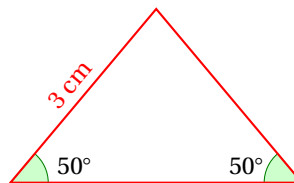
En palabras, la ley de senos dice: «para cualquier triángulo que se encuentra en un plano, las longitudes de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos».

Si nosotros conocemos la longitud de uno de los lados del triángulo y sus ángulos internos, podemos calcular las longitudes de los otros dos lados utilizando esta ley.

Resuelve el siguiente triángulo isósceles:

Ejemplo 1

- Figura:



- Como el triángulo es isósceles, los dos lados inclinados miden 3 cm.
- Vamos a demostrarlo usando la ley de senos.
- Para esto definimos: $a = 3$ cm, $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 50^\circ$ y necesitamos calcular b .
- Utilizando:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$$

podemos despejar b para obtener:

$$b = \frac{a \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{3 \sin(50^\circ)}{\sin(50^\circ)} = 3 \text{ cm}$$

- Con esto queda demostrado que es un triángulo isósceles.
- Para calcular la longitud de la base, debemos notar que la suma de los dos ángulos conocidos es 100° y que el tercer ángulo debe medir 80° .
- Con esto podemos volver a utilizar la ley de senos para calcular la longitud de c :

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c} \Rightarrow c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

- Ahora solamente sustituimos los valores conocidos:

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{3 \sin(80^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 3.85673 \text{ cm}$$

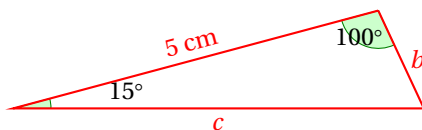
- Y con esto hemos resuelto este triángulo acutángulo.

La ley de senos también funciona para triángulos obtusángulos, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2

Resuelve el siguiente triángulo obtusángulo:

- Figura:



- En este caso $a = 5 \text{ cm}$, $\beta = 15^\circ$, $\gamma = 100^\circ$ y podemos calcular α :

$$\alpha = 180^\circ - 15^\circ - 100^\circ = 65^\circ$$

- Ahora podemos calcular la longitud del lado b aplicando la ley de senos:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \Rightarrow \frac{\sin(65^\circ)}{5} = \frac{\sin(15^\circ)}{b}$$

- Despejando y resolviendo obtenemos: $b \approx 1.427876 \text{ cm}$.

- Finalmente, podemos calcular el valor de c :

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c} \Rightarrow c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

- Sustituyendo los valores obtenemos:

$$c = \frac{5 \sin(100^\circ)}{\sin(65^\circ)} \approx 5.4330756 \text{ cm}$$

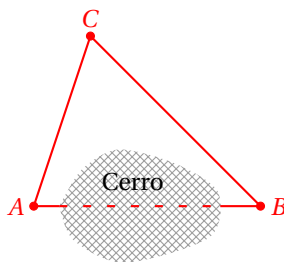
- Y terminamos.

La ley de senos sirve también para resolver problemas aplicados.

Una compañía constructora va a perforar un tunel a través de un cerro para reducir el tiempo de transporte de Acatlán (punto A en la figura) a Bacatlán (punto B). Si el tunel está sobre la recta que pasa por los puntos A y B , ¿cuál será la distancia de la carretera? Cazatlán es el punto C indicado en la siguiente figura. Se midieron: $|\overline{AC}| = 31.6$ km, $\angle CBA = 45^\circ$ y $\angle CAB = 71.6^\circ$.

Ejemplo 3

- Figura:



- Empezamos notando que podemos calcular el valor del ángulo $\angle ABC$:

$$\angle ABC = 180^\circ - 45^\circ - 71.6^\circ = 63.4^\circ$$

- Ahora podemos calcular la distancia entre los puntos A y B aplicando la ley de senos:

$$|\overline{AB}| = \frac{31.6 \sin(45^\circ)}{\sin(63.4^\circ)} \approx 39.9 \text{ km}$$

- También podemos calcular la distancia entre el punto C y Bacatlán:

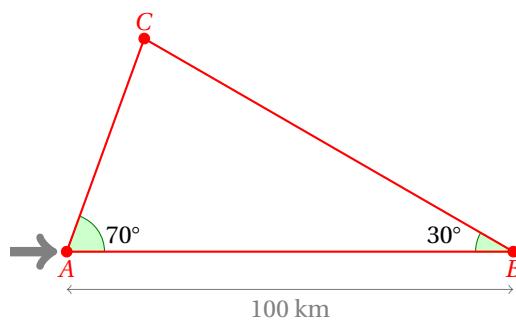
$$|\overline{BC}| = \frac{31.6 \sin(71.6^\circ)}{\sin(45^\circ)} \approx 42.4 \text{ km}$$

- Con esto hemos resuelto completamente el triángulo $\triangle ABC$.
- Esto significa que actualmente para llegar desde Acatlán a Bacatlán recorren, al menos, 31.6 km desde Acatlán hasta Cazatlán primero, y después 42.4 km desde Cazatlán hasta Bacatlán.
- $31.6 \text{ km} + 42.4 \text{ km} = 74 \text{ km}$ en total.
- Con la nueva carretera que pasará a través del tunel, la distancia se acorta a 40 km, aproximadamente.

En el punto A se encuentra un avión que viaja hacia el este, desde ahí a 70° grados hacia el norte (izquierda del frente del avión) se encuentra un aeropuerto. Si avanza 100 kilómetros, ubicándose el avión ahora en el punto B , el mismo aeropuerto está a 70° al sur respecto del mismo avión. ¿A qué distancia se encuentran los puntos A y B del aeropuerto?

Ejemplo 4

- Empezamos elaborando un diagrama para tener una mejor idea del problema:



- Definimos: $\alpha = 70^\circ$, y $\beta = 30^\circ$.
- El tercer ángulo $\gamma = 80^\circ$, porque $70^\circ + 30^\circ + 80^\circ = 180^\circ$.
- Para calcular las distancias que queremos conocer aplicamos la ley de senos.

$$\frac{|\overline{BC}|}{\sin(70^\circ)} = \frac{100}{\sin(80^\circ)} \Rightarrow |\overline{BC}| = \frac{100 \sin(70^\circ)}{\sin(80^\circ)} \approx 95.42 \text{ km}$$

- La distancia desde el punto A hasta el punto C es:

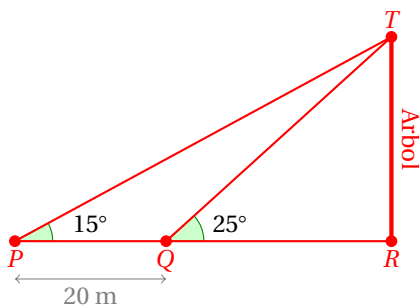
$$\frac{|\overline{AC}|}{\sin(30^\circ)} = \frac{100}{\sin(80^\circ)} \Rightarrow |\overline{AC}| = \frac{100 \sin(30^\circ)}{\sin(80^\circ)} \approx 50.77 \text{ km}$$

- Y hemos terminado.

Ejemplo 5

Marco notó que se forma un ángulo de 15° desde un punto P en el suelo hasta la copa de un árbol, pero si avanza horizontalmente 20 metros hacia el árbol a un punto Q , el ángulo que se forma es de 25° . ¿Cuál es la altura del árbol?

- Empezamos haciendo un bosquejo de la situación:



- Dado que los ángulos $\angle RQT$ y $\angle TQP$ son suplementarios y $\angle RQT$ mide 25° , se sigue que $\angle TQP$ mide 155° .
- Ahora que conocemos dos ángulos internos del triángulo $\triangle PQT$ podemos calcular la medida del ángulo $\angle PQT$:

$$\angle PQT = 180^\circ - 15^\circ - 155^\circ = 10^\circ$$

- Ahora podemos aplicar la ley de senos para calcular la medida del lado $\overline{QT}$:

$$\frac{|\overline{QT}|}{\sin(15^\circ)} = \frac{20}{\sin(10^\circ)} \quad \Rightarrow \quad |\overline{QT}| = \frac{20 \sin(15^\circ)}{\sin(10^\circ)} \approx 29.81 \text{ metros}$$

- Ahora podemos calcular la longitud del segmento $\overline{QR}$, aplicando la definición de la función coseno en el triángulo rectángulo $\triangle QRT$:

$$|\overline{QR}| = |\overline{QT}| \cos(25^\circ) = 29.81 \cos(25^\circ) \approx 27.02 \text{ metros}$$

- Finalmente, podemos aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $\triangle QRT$ para calcular la altura del árbol.
- En este triángulo, la hipotenusa mide $|\overline{QT}| = 29.81$, y el cateto conocido: $|\overline{QR}| = 27.02$.

$$\begin{aligned} |\overline{RT}| &= \sqrt{|\overline{QT}|^2 - |\overline{QR}|^2} \\ &= \sqrt{(29.81)^2 - (27.02)^2} \\ &= \sqrt{888.64 - 730.08} \\ &= \sqrt{158.55} \\ &\approx 12.59 \text{ metros} \end{aligned}$$

- Y hemos terminado.
-

CRÉDITOS

**Albert
Einstein**

Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero no más.

Este material se extrajo del libro *Matemáticas II* escrito por Efraín Soto Apolinar. La idea es compartir estos trucos para que más gente se enamore de las matemáticas, de ser posible, mucho más que el autor.

Autor: Efraín Soto Apolinar

Edición: Efraín Soto Apolinar

Composición tipográfica: Efraín Soto Apolinar

Diseño de figuras: Efraín Soto Apolinar

Productor general: Efraín Soto Apolinar

Año de edición: 2010

Año de publicación: Pendiente.

Última revisión: December 7, 2012.

Derechos de autor: Todos los derechos reservados a favor de Efraín Soto Apolinar. México. 2010.

Espero que estos trucos se distribuyan entre profesores de matemáticas de todos los niveles y sean divulgados entre otros profesores y sus alumnos.

Este material es de distribución gratuita.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

efrain@aprendematematicas.org.mx