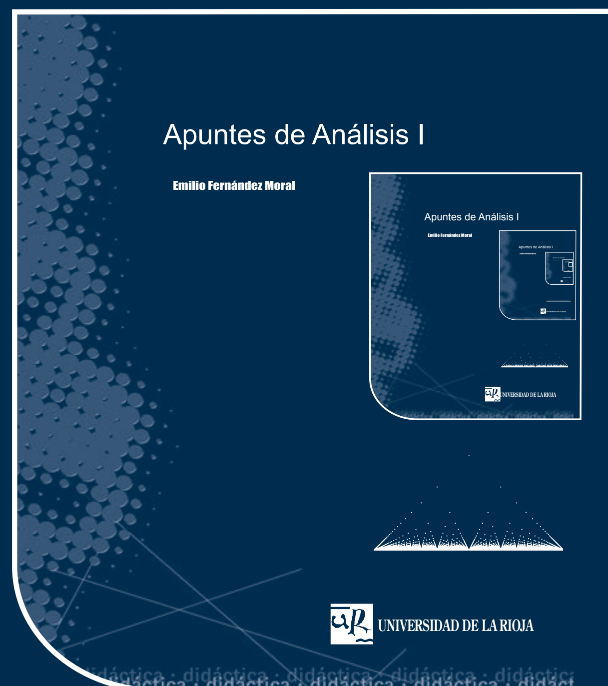
Apuntes de Análisis I

Emilio Fernández Moral



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

didáctica · didáctica · didáctica · didáctica · didáctica

Apuntes de Análisis I

MATERIAL DIDÁCTICO

Matemáticas

nº 4

Emilio Fernández Moral

APUNTES DE ANÁLISIS I

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA
SERVICIO DE PUBLICACIONES
2014

publicaciones.unirioja.es

E-mail: publicaciones@unirioja.es

ISBN: 978-84-697-0118-8

a los estudiantes de la Universidad de La Rioja,
y al recuerdo de Chicho Guadalupe.

De tierra, de alma, de cielo
uno discurre y estudia,
y según voy diciendo los nombres,
idea de todo
en mí se dibuja:
todo está en la pizarra y el mapa,
todo en su sitio y figura;
pero esto que pasa y que pasa en el tanto
que uno razona y calcula,
de esto, ¿qué sé?,
¿qué ciencia lo trata?
¿qué asignatura? ...

(De *Ismena*, Agustín García Calvo)

Índice de contenidos

Presentación

“Timeo hominem unius libri” (Tomás de Aquino)

ESTOS APUNTES se confeccionaron para las clases de Análisis I del primer cuatrimestre de primero de Matemáticas de la Universidad de La Rioja del curso 2001-02, a partir de lo que habían ido siendo las clases de esa asignatura durante los tres cursos anteriores, y recogen en su versión actual una experiencia docente real de cuatro años.

Un estudiante con tiempo para la curiosidad podrá ir adquiriendo un conocimiento más rico, de los elementos teóricos y prácticos del cálculo con funciones de una variable real en este caso, consultando textos didácticos de mayor alcance, como el *Calculus* de M. Spivak, o los *Principios de Análisis Matemático* de W. Rudin, combinados con la primera mitad de los *5000 Problemas de Análisis Matemático* de B. P. Demidovich. Unos apuntes de clase como éstos sólo le podrán servir de soporte parcial, y siempre condicionado por el énfasis particular de un profesor, en ese propósito. Pero para este profesor fue bueno no tener que escribir en la pizarra todo lo que creía que debía escribir, pudiendo entonces llevar adelante las clases de una manera más razonable (el último de los cursos mencionados).

No se ha consignado una bibliografía final al uso, pero en cambio a lo largo de los tres capítulos desarrollados se van precisando, con respeto y fidelidad a sus respectivos autores, al menos las diversas referencias bibliográficas de donde se han tomado cosas literalmente. Los apuntes se han compuesto prácticamente a base de tomar retazos de los libros que citan de M. Spivak, G. Klambauer, G. Pedrick, J. Rey Pastor, M. de Guzmán y B. Rubio, etc., y coserlos sobre otro buen fondo de apuntes de teoría y hojas de problemas elaborados por Chicho Guadalupe, que mantuvo la responsabilidad de la asignatura muchos años en el Colegio Universitario de Logroño y luego en la Universidad de La Rioja. Si viviera hoy Chicho el que esto escribe sería sólo un segundo autor.

Algunos de los temas tratados es difícil “tener tiempo de verlos”, como el último teorema del primer capítulo, el de la función implícita para dos variables del segundo, o todo lo que va desde la página 118 hasta el final del tercero. Pero es que al ver demostrado el teorema de aproximación de Weierstrass en el libro de Pedrick motivando el estudio de la continuidad uniforme, uno siente el deber irresistible de hacerlo igual en su clase. Por otro lado, fundamentar en esta primera etapa de estudios la derivación implícita de una ecuación $F(x, y) = 0$ también lo hace Pedrick, y la verdad es que un toque cíclico a este resultado, el de aquí previo al posterior más general en la asignatura de varias variables no tiene por qué sobrar. Presentar la versión original de Riemann del “lema de Riemann-Lebesgue” (dibujando alguna figura en la pizarra) será un lujo didáctico cuando sea posible. La introducción a las integrales múltiples se puede considerar un complemento del programa de la asignatura. Y la lectura final recomendada siempre quedará para algún verano.

Al incluir en las clases algunos detalles históricos sólo seguimos, en la medida de lo posible, el consejo que daba Otto Toeplitz el año 1926 y que puede leerse en el prólogo a su obra póstuma *The Calculus: A Genetic Approach*:

"Al prestar atención a los tópicos básicos del cálculo infinitesimal que hoy se enseñan como requisitos canónicos, como el teorema del valor medio, las series de Taylor, el concepto de convergencia, la integral definida, y la misma derivada, nunca se plantea la pregunta de por qué son así, o de cómo se llegó a ellos. Pero todos fueron en su día metas de una investigación urgente, respuestas a cuestiones candentes en el momento en que se crearon. Si nos remitiéramos a los orígenes de estas ideas, perderían esa apariencia yerta que tienen como de barcos en una botella y cobrarían nuevamente una vida fresca y vibrante. ... Sigan ustedes el curso genético de las ideas, que es el camino que el hombre ha recorrido en su comprensión de las matemáticas, y verán cómo la humanidad ascendió de lo simple a lo complejo. Grandes desarrollos ocasionalmente intuitivos podrían entenderse así como indicadores de pausados y metódicos progresos precedentes. Los métodos didácticos pueden beneficiarse enormemente del estudio simultáneo de la historia.

Leed a Euler: él es el maestro de todos nosotros (Laplace).

Este trabajo debe reconocimiento a muchas personas. Los errores que contenga son sólo míos, todo lo demás es como si lo hubiera escrito con mi mano alguno de los muy buenos profesores o de los muy buenos compañeros (o ambas cosas) que he tenido. Cercanamente hablando, debe la mitad de su existencia al Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja, a cuyo buen hacer matemático quisiera añadirse, y la otra mitad a los estudiantes que sufrieron las clases. En sus apuntes manuscritos están, por cierto, todas las figuras que aquí faltan, incluso primorosamente dibujadas en algún caso memorable. Ellos siempre fueron generosos conmigo en las evaluaciones de docencia, y yo siento de veras no haber correspondido del mismo modo a la hora de poner sus calificaciones.

Debo citar más especialmente a Juan Luis Varona, cuyo curso de TEX de 1995 hizo posible cada página impresa ahora, a Mercedes Sánchez, que me regaló los Pólya-Szegö y el Bottazzini, a Manuel Benito como autor de la gráfica de la función de las "palomitas de maíz" que aparece en la portada, a Oscar Ciaurri como creador de varios de los problemas originales incluidos, y a Luis Español por sus comentarios, correcciones y las notas marginales de las págs. 3 y 43. A la insistencia y ánimo de todos ellos en primer lugar, así como a la amabilidad del Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Rioja, se debe que estos apuntes se hayan publicado. La estudiante Beatriz Múgica advirtió y corrigió varias erratas de la primera versión en la zona del cálculo de primitivas.

La construcción de la portada se basa en el documento `test.tex` de la distribución de Guido Sawade (Berlin) del programa `dvips` de Tomas Rokicki (Stanford). Y el formato general y tipografía de los apuntes son copia de los del libro *Concrete Mathematics* de R. L. Graham, D. E. Knuth y O. Patashnik, quienes dejaron a libre disposición (`gkpmac.tex`) las "macros" con la que se compuso ese original libro de matemática CONtinua y disCRETA.

1

Funciones continuas

$\mathbb{R}$ *es un cuerpo:*

$a+(b+c)$
$\quad = (a+b)+c$
$a+b=b+a$
$a+0=a$
$a+(-a)=0$
. . . .
$a(bc)=(ab)c$
$ab=ba$
$a\cdot 1=a$
$aa^{-1}=1\ (a\neq 0)$
. . . .
$a(b+c)=ab+ac$

EL ANÁLISIS de las propiedades de las **funciones reales de una variable real** o aplicaciones con valores reales definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}$, que comenzamos en este capítulo con el estudio de la **continuidad**, ha de basarse en un manejo riguroso de las propiedades básicas que entendemos que posee el propio conjunto $\mathbb{R}$ y que conforman su estructura.

1.1 PRELIMINARES

En primer lugar, dos números reales se pueden sumar (y restar) y multiplicar (y dividir, si el divisor no es 0). Las propiedades que cumplen estas operaciones dan a $\mathbb{R}$ la estructura algebraica de **cuerpo**.

En segundo lugar, un número real es de una de estas tres clases: positivo, negativo, o cero. Esta observación primitiva hace aparecer el subconjunto $\mathbb{R}^+\subset\mathbb{R}$ de los **números positivos**, que cumple:

$$\text{Si}\quad a,b\ \in\ \mathbb{R}^+,\quad \text{entonces}\quad a+b\quad \text{y}\quad ab\ \in\ \mathbb{R}^+,$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a<b, c>0 \\ \Downarrow \\ ac<bc. \\ a<b,\ ab>0 \\ \Downarrow \\ b^{-1}<a^{-1}. \end{array}}$$

y que da a $\mathbb{R}$ estructura de cuerpo **ordenado**: sean $a,b\in\mathbb{R}$; se define $a<b$ (o $b>a$) si $b-a\in\mathbb{R}^+$. Se puede comprobar que $a<b$ y $b<c\Rightarrow a<c$ (**transitividad**), y que siempre ocurrirá una de estas tres posibilidades: $a=b$, $a<b$ ó $a>b$ (**tricotomía**). La **relación binaria** $a\leq b$ (o $b\geq a$) $\Longleftrightarrow a<b$ ó $a=b$ es de **orden total** en $\mathbb{R}$.

$\leq$ *es un orden total:*

$a\leq a$
$a\leq b, b\leq c\Rightarrow a\leq c$
$a\leq b, b\leq a\Rightarrow a=b$
$a\leq b$ ó $b\leq a$

Es a partir de esta estructura de orden que tiene sentido decir que un subconjunto $S\subset\mathbb{R}$ está **acotado superiormente (inferiormente)** cuando $\exists c\in\mathbb{R}$ tal que $c\geq s$ ($c\leq s$) $\forall s\in S$. Los números c se llaman **cotas superiores (inferiores)** de S.

Si c y c' son dos cotas superiores (inferiores) de S, diremos que c es **más fina** que c' si $c\leq c'$ ($c\geq c'$). La última propiedad primitiva definitoria de la estructura de $\mathbb{R}$ es que sus subconjuntos acotados admiten un refinamiento definitivo de sus cotas. Lo que quiere decir que si $S\neq\emptyset$ está acotado superiormente, hay un único número $c^*\in\mathbb{R}$ que es la **menor cota superior** o **supremo** de S ($c^*=\sup(S)$), y que si $S\neq\emptyset$ está acotado inferiormente,

$c^*=\sup(S)$:
(a) $c^*\geq s\ \forall s\in S$,
(b) $\forall\varepsilon>0\ \exists s\in S$ *tal que* $s>c^*-\varepsilon$.

hay un único número $c^* \in \mathbb{R}$ que es la **mayor cota inferior** o **ínfimo** de S ($c^* = \inf(S)$).

Admitida esta propiedad (**axioma de completitud**) en una cualquiera de las dos formas expuestas, a la que nos referiremos abreviadamente como (AC), $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado **completo**. De hecho, es el único conjunto que tiene esta estructura.

Si C es un cuerpo ordenado completo, hay una biyección $i\colon \mathbb{R} \to C$ tal que

$$i(a+b) = i(a) \oplus i(b)$$
$$i(ab) = i(a) \cdot i(b)$$
$$a < b \Rightarrow i(a) < i(b)$$

Ejemplo.– Sea $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. El conjunto A no es vacío y está acotado inferiormente (por ejemplo, 0 es una cota inferior de A). Aplicando (AC), $\exists a = \inf(A) \geq 0$.

El ínfimo es una cota inferior de A, luego en particular se tiene que $a \leq \frac{1}{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, deduciéndose que $2a$ también es una cota inferior de A. Como el ínfimo es la mayor cota inferior, será $2a \leq a$, luego $a = 2a - a \leq 0$.

Como $a \geq 0$ y $a \leq 0$, se sigue que $\inf(A) = 0$.

Lo que implica que $\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \frac{1}{n} < \varepsilon}$ (**propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$**), porque de lo contrario $\exists \varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y 0 no sería el ínfimo del conjunto A.

Arquímedes, Sobre la esfera y el cilindro, Postulado 5

Sucesiones monótonas acotadas

Cuando $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$, se dice que la **sucesión** de números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ **converge a** 0, o **tiene límite** 0, escribiéndose $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Y en general, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ cuando $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$. La propiedad arquimediana, unida al hecho del decrecimiento de los términos sucesivos de la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$, asegura que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Una sucesión (a_n) es **monótona creciente (decreciente)** cuando $m > n \Rightarrow a_m \geq a_n$ ($a_m \leq a_n$). Una sucesión (a_n) está acotada cuando sus términos forman un conjunto acotado. El axioma de completitud admite una segunda versión en la siguiente forma:

(SMA) Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

(AC) $\Rightarrow$ (SMA): Supongamos que (a_n) es una sucesión monótona creciente y acotada superiormente. Sea $a = \sup(a_n)$ (hemos aplicado (AC)). Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Si $n > n_0$, se tiene $|a_n - a| = a - a_n \leq a - a_{n_0} < \varepsilon$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(SMA) $\Rightarrow$ (AC): Supongamos que $S \neq \emptyset$ es un conjunto acotado superiormente. Sean c_1 una cota superior de S y $s_1 \in S$. Si c_1 es la menor cota superior de S o $s_1 \geq s\ \forall s \in S$, es $\sup(S) = c_1$ o $\sup(S) = s_1$. Si no, sea $a_2 = \frac{s_1 + c_1}{2}$. Si, ahora, $a_2 \geq s\ \forall s \in S$, sean $c_2 = a_2$ y $s_2 = s_1$; si no, sea s_2 un elemento cualquiera de S mayor que a_2 y $c_2 = c_1$. En cualquier caso, si c_2 es la menor cota superior de S o $s_2 \geq s\ \forall s \in S$, será $\sup(S) = c_2$ o $\sup(S) = s_2$. Si no, $\ldots$, y prosiguiendo de esta forma, o bien encontramos el supremo de S al cabo de un número finito de pasos, o bien quedan construídas dos sucesiones (alguna de ellas posiblemente constante a partir de un cierto lugar). Una es creciente, (s_n), formada por elementos de S y acotada superiormente por c_1, y la otra es decreciente, (c_n), está formada por cotas superiores de S y está acotada inferiormente por s_1. Aplicando (SMA), sea $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$. Veamos que $c = \sup(S)$:

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $c_n \geq s$ $\forall s \in S$, luego también será $c \geq s$ $\forall s \in S$. Porque si fuera $c < \sigma$ para un cierto $\sigma \in S$, sea $\varepsilon_0 = \sigma - c > 0$; por la definición de límite, $\exists n_0$ tal que $|c_{n_0} - c| = c_{n_0} - c < \varepsilon_0$; luego $c_{n_0} < \sigma$, absurdo.

Reducción al absurdo: Una proposición falsa sólo puede venir implicada por otra proposición falsa, luego No-A implica Falso demuestra que A es Verdad. Falso suele encontrarse en la forma B y No-B (ley de contradicción).

(b) Sea $\varepsilon > 0$ un número arbitrariamente prefijado. Hay que probar que $\exists s \in S$ tal que $s > c - \varepsilon$. En cada paso de la construcción se tiene $c_n - s_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}(c_1 - s_1)$, luego aplicando la propiedad arquimediana $\exists \nu$ tal que $c_\nu - s_\nu < \varepsilon$. Luego $s_\nu > c_\nu - \varepsilon \geq c - \varepsilon$.

Intervalos cerrados encajados

Los **intervalos** son los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de alguno de los tipos siguientes $(a, b \in \mathbb{R})$:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ a < x < b\}$, intervalo **abierto de extremos** a y b.
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}\colon\ a \leq x \leq b\}$, intervalo **cerrado de extremos** a y b.
- $(a, b]$ o $[a, b)$, definidos obviamente. Hasta aquí, incluyendo el conjunto $\emptyset = (a, a)$, intervalos acotados. La **longitud** de un intervalo acotado I de extremos $a \leq b$ es $|I| = b - a$.
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ a < x\}$, semirrecta abierta de extremo izquierdo a.
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x < b\}$, semirrecta abierta de extremo derecho b.
- $[a, +\infty)$ o $(-\infty, b]$, semirrectas cerradas.
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

El axioma de completitud admite una tercera versión de contenido intuitivo sencillo que constituye por eso un recurso que se usa ampliamente en el análisis real:

(ICE) Sea (I_n) una sucesión de intervalos cerrados tal que $I_{n+1} \subset I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (**encajados o anidados**) y $\lim\limits_{n\to\infty} |I_n| = 0$. Entonces $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

De hecho, habrá un único punto común a todos los intervalos, pues si hubiera dos distintos, $c_1 < c_2$, como las longitudes de los intervalos forman una sucesión que tiende a 0, dado el número positivo $c_2 - c_1$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $|I_m| < c_2 - c_1$; pero como c_1 y c_2 están los dos por hipótesis en I_m, debería ser $c_2 - c_1 \leq |I_m|$, llegándose al absurdo $c_2 - c_1 < c_2 - c_1$.

Es necesario que los intervalos I_n sean cerrados, pues, por ejemplo, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}] = \emptyset$.

Vamos a probar a continuación la equivalencia entre las formas (SMA) e (ICE) del axioma de completitud:

(SMA) $\Rightarrow$ (ICE): Sea (I_n) una sucesión de intervalos como en la hipótesis de (ICE). Por la condición sobre las longitudes, se puede suponer que todos los intervalos son acotados, así que $I_n = [a_n, b_n]$ con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

Ahora, por la condición de encaje, la sucesión (a_n) de los extremos izquierdos es monótona creciente, y se tiene $a_n \leq b_m$ para todo n y $m \in \mathbb{N}$; aplicando (SMA), sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup(a_n) = a$. Se tiene $a_n \leq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y también $a \leq b_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$, pues b_m es cota superior de (a_n) para cada m fijo. Luego $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$.

(ICE) $\Rightarrow$ (SMA): Sea (c_n) una sucesión monótona creciente y acotada superiormente; sean $a_1 = c_1$ y b_1 una cota superior de (c_n). Si $\frac{1}{2}(a_1 + b_1) \geq c_n$ $\forall n$, sean $a_2 = c_2$ y $b_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$; si $c_m > \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$, sean $a_2 = c_m$ y $b_2 = b_1$. Prosígase sucesivamente esta construcción, que genera una sucesión de intervalos cerrados acotados $\big([a_n, b_n]\big)$ tales que $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ y $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0$; sea, por (ICE), $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{a\}$. Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

1.2 LÍMITES DE FUNCIONES

Nomenclatura y definiciones

Sea $D \subset \mathbb{R}$. Una aplicación $f\colon D \to \mathbb{R}$ es una **función real de una variable real, de dominio** D. El conjunto $f(D) = \{f(x)\colon x \in D\} \subset \mathbb{R}$ se llama **conjunto imagen, rango** o **recorrido** de la función f. El conjunto $G(f) = \big\{\big(x, f(x)\big)\colon x \in D\big\} \subset \mathbb{R}^2$, representable en el **plano cartesiano**, es la **gráfica** de f, o de $y = f(x)$.

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. La **bola abierta de centro a y radio ε**, o **entorno abierto simétrico del punto a de radio ε** es el intervalo $B_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Se tiene $x \in B_\varepsilon(a) \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon$. La **bola cerrada de centro a y radio ε** es el intervalo $\overline{B}_\varepsilon(a) = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$. Se llama **entorno de a** a todo subconjunto E de $\mathbb{R}$ que contenga una bola $B_\varepsilon(a)$ con $\varepsilon > 0$. Si E es un entorno de a, el conjunto $E^* = E - \{a\}$ es un **entorno reducido de a**; por ejemplo, $B^*_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$, unión de dos **semientornos reducidos de a**, y se tiene $x \in B^*_\varepsilon(a) \Leftrightarrow 0 < |x - a| < \varepsilon$.

Sea f una función definida en un entorno reducido del punto a, o en apropiados semientornos reducidos de a, y l un número real. Cuando $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ tal que $x \in B^*_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(l)$, se dice que el **límite de f(x) cuando x tiende a a existe y es** l, escribiéndose $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Cuando $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ tal que $x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(l)$, se dice que el **límite de f(x) cuando x tiende a a por la izquierda existe y es** l, escribiéndose $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a^-) = l$.

Cuando $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(l)$, se dice que el **límite de f(x) cuando x tiende a a por la derecha existe y es** l, escribiéndose $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a^+) = l$. Los números $f(a^-)$ y $f(a^+)$ son los **límites laterales de** f **en** a. Se tiene

$$\boxed{\exists \lim_{x\to a} f(x) = l \iff \exists f(a^-) = l \text{ y } \exists f(a^+) = l.}$$

La implicación hacia la derecha es trivial. Hacia la izquierda, sea $\varepsilon > 0$ fijo; por las hipótesis,

$$\begin{cases} \exists \delta_1 > 0 \text{ tal que } |f(x) - l| < \varepsilon \text{ si } x \in (a - \delta_1, a), \\ \exists \delta_2 > 0 \text{ tal que } |f(x) - l| < \varepsilon \text{ si } x \in (a, a + \delta_2); \end{cases}$$

luego tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene que $x \in B^*_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Un caso especial de no existencia de límite en un punto a, pero en el que convencionalmente se dice que el límite es **infinito**, y se escribe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (o alternativamente $-\infty$), es cuando ocurre que $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $x \in B^*_\delta(a) \Rightarrow f(x) > M$ (o $f(x) < -M$). Se pueden dar definiciones correspondientes para límites laterales infinitos.

Las semirrectas $(M, +\infty)$ juegan el papel de entornos de $+\infty$. Así, finalmente, se definen también

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 \text{ tal que } x > M \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(l),$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M_1 > 0 \ \exists M_2 > 0 \text{ tal que } x > M_2 \Rightarrow f(x) > M_1,$$

y definiciones análogas con $-\infty$ en cualquier sitio en vez de $+\infty$.

Ejemplos

1.— $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Basta probarlo para $x \to 0^+$, pues

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(-y)}{-y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y},$$

ya que $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen} y$.

Para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ un argumento geométrico de comparación de longitudes y áreas da, en primer lugar, las desigualdades $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$, que divididas por $\operatorname{sen} x > 0$ dan $1 < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{1}{\cos x}$, o, invertidas, $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$, de donde se sigue $1 - \cos x > 1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} > 0$.

Pero, como $\operatorname{sen} x < 1$,

$$1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) < 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) < 2\left(\frac{x}{2}\right) = x,$$

luego dado $\varepsilon > 0$ fijo, tomando $\delta = \varepsilon$, cuando $0 < x < \delta$ se tiene

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right| = 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} < x < \varepsilon\,.$$

2.— La función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, definida para $x \neq 0$, no tiene límite en 0.

El problema es equivalente al de la existencia del $\lim\limits_{y\to+\infty} \operatorname{sen} y$. Veamos que este límite no puede ser ningún número real.

Sea $l \in \mathbb{R}$ cualquiera. La bola $\left(l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\right)$ no puede contener a la vez a los puntos 0 y 1, pero dado cualquier $M > 0$ hay puntos ($y = n\pi$, con n convenientemente grande) de la semirrecta $(M, +\infty)$ donde el seno vale 0 y otros puntos ($y = (4n+1)\pi/2$) donde vale 1.

Propiedades de los límites

En las propiedades siguientes se podrían considerar por todas partes límites solamente laterales, en cuyo caso los resultados que exponen la segunda y la tercera se cumplirían en correspondientes semientornos reducidos. Se puede señalar que, aunque se suelen demostrar las propiedades para $a \in \mathbb{R}$, podría ser también $a = \pm\infty$ y todos los resultados se cumplirían. Las funciones f, g, etc., se suponen definidas en un mismo entorno reducido de a.

1.— Unicidad del límite: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ está bien definido, es decir que si existe es un único valor (incluso si es $+\infty$ o $-\infty$).

2.— Conservación del signo en un entorno reducido: Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l > 0$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que $f(x) > 0\ \forall x \in B^*_\delta(a)$.

3.— Acotación en un entorno reducido: Si $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, entonces $\exists\delta > 0$ y M tales que $|f(x)| < M\ \forall x \in B^*_\delta(a)$.

4.— Paso al límite en operaciones algebraicas: Suponiendo que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, se tienen:

(i) Suma: $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = l_1 \pm l_2$.
Además, $\infty + \infty = \infty$ y $-\infty - \infty = -\infty$.

(ii) Producto: $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = l_1\, l_2$.
Además, $\infty \cdot \infty = \infty$.

(iii) Cociente: Si $l_2 \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$.
Además, $\frac{l_1}{\infty} = 0$, incluso si $l_1 = 0$. Y $\frac{l_1}{0} = \infty$ salvo si $l_1 = 0$.

(iv) Potencia: Si $f(x) \geq 0$ en el entorno y $l_1 \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a}\big[f(x)\big]^{g(x)} = l_1^{l_2}$.

Indeterminaciones:

$$\infty - \infty$$
$$0 \cdot \infty$$
$$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0}$$
$$\infty^0 \quad 0^0 \quad 1^\infty$$

Además, $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$, $(+\infty)^{-\infty} = 0$, $r^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 1, \\ 0 & \text{si } 0 \le r < 1, \end{cases}$

$r^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 1, \\ +\infty & \text{si } 0 \le r < 1, \end{cases}$ $+\infty^{r} = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0, \\ 0 & \text{si } r < 0, \end{cases}$ $0^{r} = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 0, \\ +\infty & \text{si } r < 0. \end{cases}$

5.— Extensión de desigualdades: (i) Si $f(x) \le g(x)$ (e incluso si la desigualdad es siempre estricta) $\forall\, x$ en un entorno reducido de a, y existen los dos límites siguientes, se tiene $\lim\limits_{x \to a} f(x) \le \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

(ii) Regla del sandwich: Si $f(x) \le g(x) \le h(x)$ $\forall x$ en un entorno reducido de a, y existen los límites cuando x tiende a a de $f(x)$ y de $h(x)$ y son iguales ambos a l, entonces también $\exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.

*Demostración de **1**.* Por reducción al absurdo. Si $f(x)$ tiene dos límites $l_1 < l_2$ en el punto a, considerando $\varepsilon = \frac{1}{2}(l_2 - l_1) > 0$, se tendría

$$\begin{cases} \exists \delta_1 > 0 \text{ tal que } |\, f(x) - l_1| < \varepsilon \text{ si } x \in B^*_{\delta_1}(a), \\ \exists \delta_2 > 0 \text{ tal que } |\, f(x) - l_2| < \varepsilon \text{ si } x \in B^*_{\delta_2}(a); \end{cases}$$

luego tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene que $x \in B^*_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < l_2 - l_1$.

Desigualdad triangular:

$|a \pm b| \le |a| + |b|$

Pero $|f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| \ge \big|\big(f(x) - l_1\big) - \big(f(x) - l_2\big)\big| = l_2 - l_1$, absurdo.

*Demostración de **5**(ii).* Para cada x en el entorno reducido de a donde están definidas las funciones,

$$|g(x) - l| = |g(x) - l + f(x) - f(x)| \le |g(x) - f(x)| + |f(x) - l|\,,$$

pero

$$|g(x) - f(x)| = g(x) - f(x) \le h(x) - f(x) = |h(x) - f(x)| \le |h(x) - l| + |f(x) - l|\,,$$

luego

$$|g(x) - l| \le |h(x) - l| + 2\,|f(x) - l|\,.$$

Dado $\varepsilon > 0$, $|h(x) - l| < \frac{\varepsilon}{3}$ si $x \in B^*_{\delta_1}(a)$, y $|\, f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{3}$ si $x \in B^*_{\delta_2}(a)$. Si $x \in B^*_\delta(a)$ con $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene $|g(x) - l| < \varepsilon$.

En la sección siguiente quedarán ilustradas las demostraciones de las propiedades ***2***, ***3*** y ***4***(i)–(iii). Y en la última la de ***4***(iv).

1.3 CONTINUIDAD. RESULTADOS LOCALES

Definiciones

$A \subset B$: $y \in A \Rightarrow y \in B$

Sea f una función real definida en un entorno E de $a \in \mathbb{R}$. Se dice que f es **continua en** a cuando

(i) $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, es decir, si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $f\big(B_\delta(a)\big) \subset B_\varepsilon\big(f(a)\big)$.

o, equivalentemente, cuando

(ii) Para cualquier sucesión $(x_n) \subset E$ que verifique $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

En primer lugar veamos la equivalencia de ambas definiciones:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $(x_n) \subset E$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. $\boxed{\text{Dado } \varepsilon > 0,}$ aplicando (i), $\exists \delta > 0$ tal que $x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon\big(f(a)\big)$.

Para este $\delta > 0$, por la definición de la convergencia a a de la sucesión (x_n) se tiene que $\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq n_0 \Rightarrow}$ $x_n \in B_\delta(a)$. Pero entonces, $\boxed{f(x_n) \in B_\varepsilon\big(f(a)\big).}$ Lo recuadrado prueba (ii) para la sucesión arbitraria (x_n).

No (i) $\Rightarrow$ No (ii) Supongamos, negando (i), que $\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ $\exists x \in E \cap B_\delta(a)$ tal que $f(x) \notin B_{\varepsilon_0}\big(f(a)\big)$.

$A \Rightarrow B$
$\Updownarrow$
No $B \Rightarrow$ No A

En particular para cada $\delta_n = \frac{1}{n}$, $\exists x_n \in E$ tal que $|\, x_n - a| < \frac{1}{n}$ (luego $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), pero $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$ (luego $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$).

Una función f es **continua por la izquierda en** a si $\exists f(a^-) = f(a)$, (hace falta que esté definida en un semientorno $(a-\delta, a]$) y es **continua por la derecha en** a si $\exists f(a^+) = f(a)$. Cuando se dice que f es continua en el intervalo abierto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ se entiende que es continua en todos los puntos $x \in (a, b)$, y cuando se dice, por ejemplo, que f es continua en un intervalo cerrado acotado $[a, b]$, se entiende que f es continua en (a, b), continua por la izquierda en b y continua por la derecha en a (si perjuicio de que, como veremos más adelante, pudiera haber discontinuidades de segunda especie en alguno de los extremos).

Ejemplos

1.— Recordemos que $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales, es decir, de las fracciones $\frac{p}{q}$ con p, q enteros y $q \neq 0$. La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ es discontinua en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

Pues sea $a \in \mathbb{Q}$; para cada $n \in \mathbb{N}$ el número $a_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n}$ es irracional. La sucesión (a_n) tiende a a. Se tiene $f(a_n) = 1$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$, pero $f(a) = 0$.

Y sea $a \notin \mathbb{Q}$; para cada $n \in \mathbb{N}$ el número $a_n = 10^{-n}\lfloor 10^n a\rfloor$ es racional (mediante la notación $\lfloor y \rfloor$ se expresa la **parte entera del número** y, es decir, el mayor número entero que es menor o igual que y). La sucesión (a_n) (formada por las sucesivas truncaciones del desarrollo decimal de a) tiende a a. Se tiene $f(a_n) = 0$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$, pero $f(a) = 1$.

2.— La función $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua en 0.

Como $|\operatorname{sen} y| \leq 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$, se tiene $0 \leq |f(x)| \leq |x|\ \forall x$, luego $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

3.— La función $f(x) = x^2$ es continua en $\mathbb{R}$.

Sea $a \in \mathbb{R}$, vamos a probar directamente (la propiedad ***4*** de los límites no la hemos demostrado) que $\lim\limits_{h\to 0}(a+h)^2 = a^2$. Si suponemos $|h| < \delta \leq 1$, se tiene

$$\left|(a+h)^2 - a^2\right| = |h(2a+h)| = |h|\ |2a+h| < \delta\big(2|a| + \delta\big) \leq \delta\big(2|a| + 1\big);$$

luego

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|a|+1}\right\} > 0 \text{ tal que } |h| < \delta \Rightarrow \left|(a+h)^2 - a^2\right| < \varepsilon.$$

4.— La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Sea $a \in \mathbb{R}-\{0\}$. Probaremos directamente que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}$. Si suponemos $|x-a| < \delta \leq \frac{|a|}{2}$, se tiene $|x| > |a| - \delta > \frac{|a|}{2}$ y

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{|a|\ |x|} < \frac{2\delta}{a^2},$$

luego

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \text{mín}\left\{\frac{|a|}{2}, \frac{a^2\varepsilon}{2}\right\} > 0 \text{ tal que } |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon.$$

5.— La función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ irreducible} \end{cases}$ es continua solamente en los puntos donde vale 0, ya que $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ $\forall a \in [0,1]$.

Sea $a \in [0,1]$ fijo y consideremos un número positivo ε. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$; si llamamos S al conjunto finito $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$, se tiene que $|f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in [0,1] - S$. Sea $\delta = \text{mín}\big\{|s-a| : s \in S - \{a\}\big\} > 0$; si $x \in B^*_\delta(a) \cap [0,1]$, entonces $|f(x)| < \varepsilon$.

Tipos de discontinuidades

Cuando una función no es continua en un punto a, se dice que es **discontinua**, o que presenta una discontinuidad, en ese punto. Naturalmente sólo tendrá sentido decir esto en puntos donde pueda plantearse la existencia de, al menos, uno de los límites laterales, para lo que la función deberá estar definida al menos en un semientorno reducido de a. Así, decimos que la función $\frac{1}{x}$ es discontinua en 0, pero no vamos a plantear la continuidad de $\sqrt{x}$ en los números negativos. La nomenclatura en la clasificación que sigue se encuentra, por ejemplo, en J. Rey Pastor, *Elementos de la teoría de funciones*, Madrid.

Discontinuidad evitable. Cuando $\exists \lim_{x\to a} f(x)$.

Por ejemplo, la función $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ tiene una discontinuidad evitable en 0, dado que no existe $f(0)$ pero $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. En el ejemplo ***2*** anterior esta discontinuidad se ha "evitado".

La función $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ tiene una discontinuidad evitable en 1, pues $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$.

Las discontinuidades de la función del ejemplo ***5*** anterior son evitables.

Discontinuidad de primera especie. (i) Finita, cuando $\exists f(a^-)$ y $\exists f(a^+)$ pero son distintos. El **salto en** a es igual a $f(a^+) - f(a^-)$.

Por ejemplo, la función $\dfrac{1}{2^{1/x}-1}$ tiene un salto finito en 0. La función $\lfloor x \rfloor$ tiene saltos finitos de una unidad en cada $n \in \mathbb{Z}$, siendo siempre continua por la derecha.

(ii) Infinita, cuando $f(a^-)$ o $f(a^+)$ (o ambos) son ∞. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f en el plano cartesiano, por uno de los dos lados, o por ambos.

Así, la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ tiene ramas infinitas por ambos lados en $x = 1$. (La discontinuidad que presenta en $x = -1$ es evitable.)

Para la función $g(x) = \begin{cases} 2^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, se tiene $g(0^-) = g(0) = 0$, $g(0^+) = +\infty$. En 0 es continua por la izquierda y tiene una discontinuidad infinita de primera especie.

Discontinuidad de segunda especie. Cualquier otro tipo de discontinuidad. Por ejemplo la que presenta en cada punto de $\mathbb{R}$ la función del ejemplo ***1*** anterior. En algún caso podrían describirse como oscilaciones finitas, así la discontinuidad en 0 de la función $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, o incluso infinitas, como el comportamiento en 0^+ de la función $(1/x)\operatorname{sen}(1/x)$.

O las discontinuidades por falta de dominio a un lado, así, la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ tiene discontinuidades de segunda especie en -1 y en 0; se tiene $f(-1^-) = +\infty$ y $f(0^+) = 1$ (este segundo límite es difícil de calcular para nosotros aún), pero f no está definida en el intervalo $[-1, 0]$ (ejemplo tomado de Rey Pastor, *op. cit.*).

Propiedades locales de las funciones continuas

Las dos primeras son muy básicas e importantes. Las otras dos aumentan notablemente el repertorio de funciones continuas. Aplicando la tercera, por ejemplo, se demuestra que cualquier **polinomio** $P(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ y que una **función racional** $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, es continua salvo en los ceros del denominador.

1.— Conservación del signo en un entorno: Si f es continua en a y $f(a) > 0$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ $\forall x \in B_\delta(a)$.

Demostración. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}f(a) > 0$; $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in B_\delta(a)$ se tiene $f(x) \in \left(\frac{1}{2}f(a), \frac{3}{2}f(a)\right)$, y, en particular, $f(x) > 0$.

2.— Acotación en un entorno: Si f es continua en a, entonces $\exists \delta > 0$ y M tales que $|f(x)| < M$ $\forall x \in B_\delta(a)$.

Demostración. Sea $\varepsilon = 1$; $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in B_\delta(a)$ se tiene $f(x) \in \big(f(a) - 1, f(a) + 1\big)$, luego $|f(x)| \le \text{máx}\big\{|f(a) - 1|, |f(a) + 1|\big\}$.

3.— Operaciones algebraicas: Si f y g son continuas en a, sea $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, etc. Se tiene:

(i) La suma y la resta $f \pm g$ son continuas en a.

(ii) El producto fg es continua en a.

(iii) Si $g(a) \neq 0$, el cociente $\frac{f}{g}$ es continua en a.

Demostración. (i) Sea $\varepsilon > 0$; $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ tales que $f(x) \in B_{\varepsilon/2}\big(f(a)\big)$ $\forall x \in B_{\delta_1}(a)$ y $g(x) \in B_{\varepsilon/2}\big(g(a)\big)$ $\forall x \in B_{\delta_2}(a)$.

Luego $\forall x \in B_\delta(a) = B_{\delta_1}(a) \cap B_{\delta_2}(a)$ se tiene $f(x) \pm g(x) \in B_\varepsilon\big(f(a) \pm g(a)\big)$.

(ii) Considerando primero $(fg)(x) - (fg)(a) = f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)$, y aplicando la propiedad ***2*** para f, se consigue la acotación

$$|(fg)(x) - (fg)(a)| \le M\,|g(x) - g(a)| + |g(a)|\;|f(x) - f(a)|\,,$$

con $M > 0$, cuando $x \in B_{\delta_1}(a)$.

Dado $\varepsilon > 0$, $|g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ cuando $x \in B_{\delta_2}(a)$ y $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2|g(a)|}$ cuando $x \in B_{\delta_3}(a)$. Para todo x en la más pequeña de las tres bolas se tiene $|(fg)(x) - (fg)(a)| < \varepsilon$.

(iii) Considerando $\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a) = \frac{1}{g(x)g(a)}\big(f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)\big)$ y aplicando la propiedad ***1*** para g, se consigue la acotación

$$\left|\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)\right| \le \frac{2}{g(a)^2}\big(|g(a)|\;|f(x) - f(a)| + |f(a)|\;|g(a) - g(x)|\big)$$

cuando $x \in B_{\delta_1}(a)$. La argumentación se completa como la anterior.

4.— Composición: Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, la composición $g \circ f$ es continua en a. Como caso particular, el valor absoluto $|f|$ es continua en a.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $g\Big(B_\delta\big(f(a)\big)\Big) \subset B_\varepsilon\Big(g\big(f(a)\big)\Big)$, pues g es continua en $f(a)$. Y para este δ, por ser f continua en a, $\exists \gamma > 0$ tal que $f\big(B_\gamma(a)\big) \subset B_\delta\big(f(a)\big)$. Luego $g\Big(f\big(B_\gamma(a)\big)\Big) \subset B_\varepsilon\Big(g\big(f(a)\big)\Big)$.

1.4 RESULTADOS GLOBALES

Las noticias históricas de esta sección están tomadas en su mayor parte del libro de U. Bottazzini, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Springer-Verlag, 1986.

El teorema de Bolzano

El monje bohemio Bernhard Bolzano (1781–1848) era profesor de filosofía de la religión en Praga cuando en las *Actas de la Real Sociedad Bohemia de Ciencias* del año 1817 se publicó un artículo suyo, que iba a ser poco conocido en vida de su autor, y cuyo propósito era dar la primera demostración *completamente correcta* de un resultado que se usaba desde antiguo para calcular aproximadamente las raíces reales de un polinomio, a saber: si los valores $P(a)$ y $P(b)$ de un polinomio (de coeficientes reales) $P(x)$ tienen distinto signo, entonces la ecuación $P(x) = 0$ debe tener al menos una solución comprendida entre los números a y b.

Bolzano le iba a dar un rango de validez más amplio al probarlo para funciones continuas, de las que los polinomios son casos particulares. Su noción de continuidad, que es la misma que la contemporánea de A. L. Cauchy (1789–1857), y que es en las *Lecciones* de K. Weierstrass (1815–1897) en la Universidad de Berlín en 1861 cuando toma la forma ε-δ de hoy, es como sigue:

> *Una función cambia según la ley de continuidad para todos los valores de x que están dentro o fuera, de ciertos límites si, cuando x es un tal valor, la diferencia $f(x+\omega)-f(x)$ puede hacerse (en valor absoluto) más pequeña que un valor cualquiera dado con tal de tomar ω lo pequeño que haga falta.*

y el resultado anunciado es el siguiente

> **Teorema [B].** *Si dos funciones de x, $f(x)$ y $\phi(x)$, varían según la ley de continuidad para todos los valores de x o al menos para los comprendidos entre α y β, y además si $f(\alpha) < \phi(\alpha)$ y $f(\beta) > \phi(\beta)$, entonces siempre hay un cierto valor de x comprendido entre α y β para el cual $f(x) = \phi(x)$.*

Bolzano no plantea objeciones contra la corrección, ni contra la evidencia geométrica (una línea continua debía trazarse mediante un movimiento sin interrupciones, y sus puntos se sucederían uno a otro sin dejar ningún intervalo hueco entre ellos) de esta proposición, que quedan para él fuera de toda duda.

> *Pero es igual de claro que es una insufrible ofensa contra un método correcto el tratar de deducir las verdades de la matemática pura (es decir, de la aritmética, el álgebra o el análisis) a partir de consideraciones que pertenecen a una rama aplicada de la misma, como es la geometría ...*
> *... nadie puede negar que el concepto de tiempo, y aún más el devenimiento, es tan ajeno a la matemática pura como el de espacio ...*
> *Las demostraciones científicas no pueden ser meros procedimientos para fabricar evidencias, sino más bien fundamentos, es decir, presentaciones de todas las causas objetivas que tenga la verdad a ser probada.*

Bolzano basa la demostración del teorema *[B]* en la siguiente propiedad, que es su particular versión del axioma de completitud:

> ***Teorema [ACB].*** *Si una propiedad M no se verifica para todos los valores de una cantidad variable x, pero sí para todos los que son menores que un cierto valor u, entonces siempre va a existir una cantidad U que es la mayor de aquellas para las que se puede afirmar que todos los números x menores que U tienen la propiedad M.*

Naturalmente, la ingeniosa demostración que daba Bolzano para este "teorema" *[ACB]* caía en círculo vicioso, como él mismo reconoció posteriormente. Pero utilizándolo, su demostración del teorema *[B]* era la siguiente:

> *Suponemos que $\alpha < \beta$. Como $f(\alpha) < \phi(\alpha)$, entonces también $f(\alpha+\omega) < \phi(\alpha+\omega)$ para ω suficientemente pequeño, por la ley de continuidad, y se puede asegurar que será $f(\alpha+\omega) < \phi(\alpha+\omega)$ para todo ω menor que un cierto número u dado. Indiquemos por M la propiedad que puede tener un número ω cuando $f(\alpha+\omega) < \phi(\alpha+\omega)$. No todo número la tiene, pues por ejemplo, $\beta-\alpha$ no la tiene. Sea así U la cantidad cuya existencia afirma el teorema ([ACB]). Entonces, U está comprendido entre 0 y $\beta-\alpha$, y se tiene $f(\alpha+U) = \phi(\alpha+U)$, pues no es posible, por la naturaleza de U, ni que $f(\alpha+U) < \phi(\alpha+U)$, ni que $f(\alpha+U) > \phi(\alpha+U)$.*

Veamos ahora la versión moderna usual ($\phi(x) = 0$) del **teorema de Bolzano**, y una demostración que, utilizando la forma (AC) del axioma de completitud, sigue los mismos pasos de la original:

Teorema. Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demostración. Sea $N = \{x \in [a,b] \colon f(x) < 0\}$. El conjunto N no es vacío, pues a (y también todos los puntos de un semientorno a su derecha, por la continuidad a la derecha en a) pertenece a N. Y está acotado superiormente por b (y también por todo punto de un semientorno a la izquierda de b, por la continuidad a la izquierda en b).

Sea $c = \sup(N)$. Se tiene $c \in (a, b)$ por las explicaciones dadas entre paréntesis, luego f es continua en c. Veamos que $f(c) = 0$:

Si $f(c) < 0$, por continuidad $\exists \delta > 0$ tal que $f(c + \delta) < 0$, luego $c + \delta \in N$, absurdo pues c es una cota superior de N.

Si $f(c) > 0$, por continuidad $\exists \gamma > 0$ tal que $f(\xi) > 0$ $\forall \xi \in (c - \gamma, c)$; pero $c - \gamma$ no es una cota superior de N (ya que es menor que el supremo de N), luego $\exists \xi_0 \in N$ (así que $\xi_0 < c$ y $f(\xi_0) < 0$) tal que $c - \gamma < \xi_0$, absurdo.

De las consecuencias que ahora siguen, las tres primeras son otras tantas formulaciones equivalentes del teorema. La primera es la importante **propiedad de los valores intermedios**, que denotaremos en lo sucesivo por (TVI), para una función continua. La segunda, el enunciado original de Bolzano con dos funciones. La tercera es un enunciado sólo aparentemente más general. Otras consecuencias sencillas de probar son la que se conoce como **teorema de punto fijo para funciones continuas**, y el resultado que asegura la existencia de (al menos) una raíz real para todo polinomio en una variable de grado impar. Nuestra última consecuencia adelanta un poco el contenido de la sección siguiente, en un ejemplo particular.

Corolarios. (i) (TVI) Si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a) < y < f(b)$, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.

(ii) Si $f, \phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ son continuas, $f(a) < \phi(a)$ y $f(b) > \phi(b)$, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = \phi(c)$.

(iii) Si I es un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ es continua, entonces el conjunto imagen $f(I)$ es también un intervalo (admitamos aquí que el conjunto $\{a\}$ es el intervalo $[a, a]$).

(iv) Si $f\colon [a, b] \to [a, b]$ es continua, entonces $\exists x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$.

(v) Si $P(x)$ es un polinomio de grado impar, la ecuación $P(x) = 0$ tiene al menos una solución real.

(vi) Si $a > 0$, $\exists x > 0$ tal que $x^2 = a$ (existencia de raíz cuadrada para los números positivos).

Demostraciones i) Se aplica el teorema a la función $\phi(x) = f(x) - y$.

(ii) Se aplica el teorema a la función $f - \phi$.

(iii) Supongamos que f no es constante. Si $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 < y_2$ e $y \in (y_1, y_2)$, entonces por (TVI) también $y \in f(I)$, luego $[y_1, y_2] \subset f(I)$.

Sean $c = \inf\big(f(I)\big)$ ($c = -\infty$ si $f(I)$ no está acotado inferiormente), y $d = \sup\big(f(I)\big)$ ($d = +\infty$ si $f(I)$ no está acotado superiormente). Se tiene $c < d$ (porque f no es constante). Sea $y \in (c, d)$: por la definición de ínf y sup existirán $y_1, y_2 \in f(I)$ tales que $c \leq y_1 < y < y_2 \leq d$, y por lo que se ha visto arriba, se tiene que $y \in f(I)$. Luego $(c, d) \subset f(I)$; pero tal como se han definido c y d es obvio que $f(I) \subset [c,d]$. Luego $f(I)$ es en cualquier caso un intervalo.

(iv) Como por hipótesis se tiene $f(a) \geq a$ y $f(b) \leq b$, si ni a ni b son puntos fijos de la función f, se aplica el teorema a la función $\phi(x) = x - f(x)$.

(v) Podemos suponer que el coeficiente del término de mayor grado de $P(x)$ es positivo. Entonces, $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$, luego $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $P(a) < 0$, y $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$, luego $\exists b \in \mathbb{R}$, $b > a$, tal que $P(b) > 0$. Se aplica el teorema a la función $P(x)$ en $[a,b]$.

(vi) La función $f(x) = x^2$ es continua en $[0,+\infty)$. Entonces, por (iii), el conjunto imagen $f\big([0,+\infty)\big)$ debe ser un intervalo, y un intervalo no acotado, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$. Como $f(x) \geq 0$ y $f(0) = 0$, el intervalo imagen es $[0,+\infty)$.

El teorema de Weierstrass

El teorema de Bolzano dice que la imagen de un intervalo por una función continua es otro intervalo. El siguiente teorema afirma que la imagen de un intervalo cerrado y acotado por una función continua es (otro intervalo) también cerrado y acotado.

Teorema. Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

(i) está acotada, es decir, $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq K \ \forall x \in [a,b]$.

(ii) Y alcanza su máximo y su mínimo valor en puntos del intervalo, es decir, $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \forall x \in [a,b]$.

Demostración. (i) Supongamos que f no está acotada en $I_0 = [a,b]$. Entonces f no estará acotada en una (al menos) de las dos mitades, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ o $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ de I_0. Llamemos (eligiendo una si es preciso) a esa mitad I_1. Procedamos igual con I_1, y sucesivamente con I_2, etc. Se genera así una sucesión (el proceso no termina nunca, pues si f estuviera acotada en I_n lo estaría también en I_{n-1}) (I_n) de intervalos cerrados, acotados y tales que $\lim\limits_{n \to \infty} |I_n| = 0$. Sea, aplicando (ICE), $c \in I_n \ \forall n$. Entonces $c \in [a,b]$ y, como f es continua en c, f va a estar acotada en una $B_\delta(c)$; pero $\exists n_0$ tal que $B_\delta(c) \supset I_{n_0}$, luego f estaría acotada en I_{n_0}, absurdo.

(ii) Por el apartado (i) ya probado de este teorema, el conjunto $J = f\big([a,b]\big)$ está acotado superiormente. Sea, aplicando (AC), $M = \sup(J)$. Veamos, por reducción al absurdo, que $\exists x_2 \in [a,b]$ tal que $f(x_2) = M$ (se procede análogamente para el ínfimo).

Si $M - f(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$, la función (de valores positivos) $\phi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ es continua en $[a,b]$, luego, otra vez por el apartado (i), $\exists K > 0$ tal que $\phi(x) < K \ \forall x \in [a,b]$. Entonces se tendría $f(x) < M - \frac{1}{K} \ \forall x \in [a,b]$, absurdo pues el supremo del conjunto imagen de f era M.

1.5 MONOTONÍA. FUNCIÓN INVERSA

Definiciones

Una función f, definida en un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ que no se reduce a un solo punto, se dice **creciente (decreciente) en** S cuando $\forall x, y \in S$ tales que $x < y$ se tiene $f(x) \le f(y)$ $\big(f(x) \ge f(y)\big)$. Y se dice **estrictamente creciente (decreciente) en** S cuando $\forall x, y \in S$ tales que $x < y$ se tiene $f(x) < f(y)$ $\big(f(x) > f(y)\big)$. En cualquiera de los casos, f se dice **monótona en** S.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$; la función $\lfloor x \rfloor$ es creciente en $\mathbb{R}$; la función $\frac{1}{x}$ no es monótona en $B_1^*(0)$.

Recordemos aquí que una función $f\colon S \to \mathbb{R}$ es **inyectiva** si $\forall x, y \in S$ tales que $x \neq y$ se tiene $f(x) \neq f(y)$, así que una función estrictamente monótona es inyectiva. Y cuando f es inyectiva, queda definida la **función inversa de** f, $f^{-1}\colon f(S) \to S$, por $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$.

Por ejemplo, la inversa de la función $f\colon B_1^*(0) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ es $f^{-1}\colon (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$. La inversa de la función $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ es $g^{-1}\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (gracias al teorema de Bolzano hemos podido probar que $g\big([0, +\infty)\big) = [0, +\infty)$.)

Notemos también que, cuando f es estrictamente creciente (decreciente) en S, la función inversa es estrictamente creciente (decreciente) en $f(S)$, como es fácil de probar.

Propiedades

1.— Una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ monótona en el intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ sólo puede tener, en puntos de I, discontinuidades finitas de primera especie.

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que f es creciente, y sea $a \in I$. Sea $[\alpha, \beta] \subset I$ un entorno cerrado de a. El conjunto $S = \big\{f(x)\colon a < x \le \beta\big\}$ no es vacío (por ejemplo, $f(\beta) \in S$) y está acotado inferiormente (por ejemplo, por $f(\alpha)$, pues f es creciente). Aplicando (AC), sea $s = \operatorname{ínf}(S)$. Veamos que $\exists f(a^+) = s$:

$\boxed{\text{Dado } \varepsilon > 0,}$ el número $s + \varepsilon$ no puede ser cota inferior de S (es mayor que el ínfimo), luego $\exists \xi \in (a, \beta]$ tal que $f(\xi) < s + \varepsilon$.

$\boxed{\text{Sea entonces } \delta = \xi - a > 0\text{; si } 0 < x - a < \delta,}$ es $a < x < \xi$ y se tiene $s \le f(x) \le f(\xi) < s + \varepsilon$, luego $\boxed{f(x) \in (s, s + \varepsilon).}$

De la misma manera se prueba que $\exists f(a^-) = \sup\big\{f(x)\colon \alpha \le x < a\big\}$.

Finalmente, si la discontinuidad en a fuera evitable, sería por ejemplo $f(a) > \lim\limits_{x \to a} f(x)$, y eso implicaría, por la propiedad de conservación del signo de los límites en un entorno, que $\exists \delta > 0$ tal que $f(a) > f(z)$ $\forall z \in (a, a + \delta)$, en contradicción con ser f creciente.

Nota. Si I fuera un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, lo único que hay que añadir, para f creciente, es que podrían ser $f(a^+) = -\infty$ y/o $f(b^-) = +\infty$.

2.— Sea f monótona en el intervalo I. Entonces, f es continua en $I \Longleftrightarrow f(I)$ es un intervalo (o f verifica (TVI), que es lo mismo).

Demostración. La implicación hacia la derecha la da el teorema de Bolzano. Veamos la implicación hacia la izquierda:

Supongamos que f es creciente. Si f no es continua, sea a un punto de discontinuidad (que será finita de primera especie por la propiedad ***1*** anterior. Sea $y \in (f(a^-), f(a^+))$ tal que $y \neq f(a)$. Entonces, $y \notin f(I)$, porque si $y = f(x)$ con $x < a$ (y análogamente si $x > a$), como es $f(x) > f(a^-)$, por la propiedad de conservación del signo de un límite lateral, $\exists \delta > 0$, que puede considerarse menor que $a - x$, tal que $f(x) > f(a - \delta)$; pero $x < a - \delta$, absurdo, pues f era creciente.

3.— Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva en el intervalo I, entonces: (i) f es estrictamente monótona en I, y (ii) la función inversa f^{-1} es continua en el intervalo $f(I)$.

Demostración. (i) Por reducción al absurdo, supongamos que (por ejemplo) $\exists x, y, z \in I$ tales que $x < y < z$ y $f(x) < f(z) < f(y)$. Aplicando (TVI) para f en $[x, y] \subset I$, $\exists w \in (x, y)$ (luego $w \neq z$) tal que $f(w) = f(z)$.

(ii) Supongamos, ya que tenemos el apartado (i) probado, que f es estrictamente creciente. Sea $b = f(a) \in f(I)$, debemos probar que $\lim\limits_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$. (Si a es un extremo de un I cerrado, hay que arreglar un poco lo que sigue).

Dado $\varepsilon > 0$ tal que $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset I$ (basta considerar estos valores de ε), como f es continua se sigue que $f\big([a - \varepsilon, a + \varepsilon]\big)$ es un intervalo contenido en el intervalo $f(I)$. Sea $\delta = \text{mín}\big\{f(a + \varepsilon) - f(a), f(a) - f(a - \varepsilon)\big\} > 0$; si y verifica $f(a) - \delta < y < f(a) + \delta$, entonces $y \in \big(f(a - \varepsilon), f(a + \varepsilon)\big) \subset f(I)$, luego $\exists f^{-1}(y)$, y, por ser f^{-1} también estrictamente creciente, se tiene finalmente

$$\begin{aligned} &f(a - \varepsilon) < y < f(a) + \varepsilon \\ &\qquad \Longrightarrow f^{-1}\big(f(a - \varepsilon)\big) = a - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}\big(f(a + \varepsilon)\big) = a + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ejemplos

1.— Raíz n–ésima. Para $n \in \mathbb{N}$, la función $f(x) = x^n$ es continua. **Si n es par**, f es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$, y como $f(0) = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, el intervalo imagen por f del intervalo $[0, +\infty)$ es $[0, +\infty)$. Así que la función inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ está definida y es continua en $[0, +\infty)$.

Si n es impar, f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, y $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. En este caso, entonces, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ está definida y es continua en $\mathbb{R}$.

2.— Funciones inversas de las funciones circulares. Aunque la definición geométrica de las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, etc. no satisfaría la exigencia de rigor de Bolzano, olvidemos eso ahora. La función $\operatorname{sen} x$ es continua en $\mathbb{R}$, pues para cada a fijo, dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon$. Si $|h| < \delta$,

$$|\operatorname{sen}(a + h) - \operatorname{sen} a| = 2\left|\cos\left(a + \frac{h}{2}\right)\right| \left|\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{h}{2}\right| = |h| < \varepsilon.$$

Y es estrictamente creciente en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (se toma precisamente este intervalo para definir la función inversa de la función seno); como $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, la función inversa $\operatorname{sen}^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x$ está definida y es estrictamente creciente y continua en el intervalo $[-1, 1]$.

La función $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ es continua en $\mathbb{R}$, y es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, \pi]$ (se toma precisamente este intervalo para definir la función inversa); como $\cos(0) = 1$ y $\cos(\pi) = -1$, la función inversa $\cos^{-1}(x) = \arccos x$ está definida y es estrictamente decreciente y continua en el intervalo $[-1, 1]$.

La función $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es continua en $\mathbb{R} - \left\{k\frac{\pi}{2} \colon k \text{ entero impar}\right\}$, y es estrictamente creciente en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (se toma precisamente este intervalo para definir la función inversa); como $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}^{+}\right) = -\infty$ y $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}^{-}\right) = +\infty$, la función inversa $\operatorname{tg}^{-1}(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ está definida y es estrictamente creciente y continua en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Las gráficas de una función y de su inversa son simétricas, en el plano x-y, respecto de la recta $y = x$.

1.6 CONTINUIDAD UNIFORME

Definición

Sea $f \colon D \to \mathbb{R}$. Se dice que f es **uniformemente continua** en $\emptyset \neq S \subset D$ si $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que $\forall x, y \in S$ tales que$|\, x - y| < \delta$ se tiene $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

La función f es continua en S cuando, $\forall\, \varepsilon > 0$ y $\forall\, s \in S$, $\exists\, \delta > 0$ (este δ dependerá de ε y de s) tal que la gráfica cartesiana de la función f está, en torno al punto $\big(s, f(s)\big)$, dentro de una *ventana* rectangular, centrada en dicho punto, de altura 2ε y anchura 2δ.

Cuando la función es uniformemente continua en S, dado $\varepsilon > 0$, la misma ventana sirve para contener la gráfica en torno a cualquier punto. Su anchura, 2δ, no depende de s. Se deduce que, en particular, f es continua en S.

Ejemplos

1.— La función x^2 no es uniformemente continua en $[0, \infty)$. (Sí lo es en $[0, M]$ para todo $M > 0$ fijo.)

Pues si suponemos que $\exists\, \delta > 0$ tal que $\left|x^2 - a^2\right| < 1$ para todo $a > 0$ y para todo $x \in B_\delta(a)$, en particular para $x = a + \frac{\delta}{2}$ se tendría $\left|x^2 - a^2\right| = a\delta + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 < 1$, implicando $a\delta < 1$ para todo $a > 0$, absurdo.

2.— La función $\frac{1}{x}$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

Pues sea $\varepsilon = 1$: $\forall \delta$ tal que $0 < \delta < 1$ se pueden considerar los puntos $x_1 = \delta$ y $x_2 = \frac{\delta}{2}$ de $(0, 1)$, que verifican $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$ y $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \frac{1}{\delta} > 1$.

3.— Se dice que $f \colon D \to \mathbb{R}$ es **lipschitziana** en D si $\exists\, \lambda > 0$ tal que $\forall x, y \in D$ se tiene $|f(x) - f(y)| < \lambda\, |x - y|$.

Si f es **lipschitziana** en D, entonces f es uniformemente continua en D, pero el enunciado recíproco es falso. Por ejemplo, la función $\sqrt{x}$ es uniformemente continua en $[0,1]$ (aplicando el teorema ***2*** de esta sección), pero no es lipchitziana en $[0,1]$, aunque sí lo es en todo $[a,1]$ con $a>0$.

Funciones exponenciales y logarítmicas

El mayor interés de la definición de función uniformemente continua (véase G. Pedrick, *A First Course in Analysis*, Springer-Verlag, 1994, pág. 106 y ss.) es que estas funciones admiten extensiones continuas únicas a la **clausura topológica** del conjunto donde son uniformemente continuas.

La clausura del conjunto S es, por definición, el conjunto

$$\overline{S} = \{x \in \mathbb{R}\colon B_\delta(x) \cap S \neq \emptyset \ \forall \delta > 0\}.$$

Por ejemplo, $\overline{(a,b)} = [a,b]$ y $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Enunciaremos solamente, sin dar la demostración, el siguiente resultado:

Teorema 1. Si f es uniformemente continua en S, entonces existe una única función $\overline{f}\colon \overline{S} \to \mathbb{R}$ tal que $\overline{f}(s) = f(s)$ $\forall s \in S$ ($\overline{f}$ es una extensión de f) y $\overline{f}$ es continua en $\overline{S}$.

Si $n \in \mathbb{N}$ *y* $m \in \mathbb{Z}$:

$a^0 = 1$

$a^n = a \overset{(n \text{ veces})}{\cdots} a$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

Así, dado un número $a>0$ fijo (la **base**), tenemos definida (ya hemos demostrado la existencia de la raíz n–ésima de todo número positivo) en $\mathbb{Q}$ la función exponencial $f(q) = a^q$, que cumple la **ecuación funcional** $f(p+q) = f(p)\cdot f(q)$ $\forall p,q \in \mathbb{Q}$.

Propiedades. Sea $a>0$ fijo. La función $f(q) = a^q$ verifica:

(i) Es estrictamente creciente (decreciente) en $\mathbb{Q}$ si $a>1$ (si $a<1$).

(ii) $\lim\limits_{q\to 0} a^q = 1$; si $a>1$, $\lim\limits_{q\to -\infty} a^q = 0$ y $\lim\limits_{q\to +\infty} a^q = +\infty$ (si $a<1$, estos dos límites dan al revés).

(iii) Es uniformemente continua en todo subconjunto acotado de $\mathbb{Q}$.

Demostración. (i) Sea $a>1$ y $r,s \in \mathbb{Q}$ tales que $r<s$. La diferencia $s-r$ es un número racional positivo, digamos $s-r = \frac{m}{n}$ con $m,n \in \mathbb{N}$. Como $a^m > 1$ y la raíz n-ésima es estrictamente creciente en $[0,+\infty)$, $a^{m/n} = (a^m)^{1/n} > 1^{1/n} = 1$. Ahora, $a^{s-r} > 1$ implica (multiplicando por a^r) que $a^s > a^r$.

(ii) Sea $a>1$. Veamos que $\lim\limits_{q\to 0^+} a^q = 1$ (de una forma similar se prueba que el límite por la izquierda es también igual a 1, y con los dos tenemos también cubierto el caso $a<1$):

Dado $\varepsilon > 0$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a-1}{n} < \varepsilon$; esta condición y la **fórmula del binomio de Newton** dan

$$(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon > a,$$

luego como la raí n–ésima es estrictamente creciente, se tiene $1+\varepsilon > a^{1/n}$, y $a^{1/n} - 1 < \varepsilon$.

Sea entonces $\delta = \frac{1}{n}$; si $q \in \mathbb{Q}$ y $0 < q < \delta$, se tiene $1 < a^q < a^{1/n}$, luego $a^q - 1 < a^{1/n} - 1 < \varepsilon$.

Dado $M > 0$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 + n(a-1) > M$. Si $q \in \mathbb{Q}$ y $q > n$, se tiene

$$a^q > a^n = \big(1 + (a-1)\big)^n > 1 + n(a-1) > M,$$

luego $\displaystyle\lim_{q\to+\infty} a^q = +\infty$.

Y entonces el límite $\displaystyle\lim_{q\to-\infty} a^q$ es de la forma $\frac{1}{\infty}$, luego es 0.

(iii) Suponiendo por ejemplo que es $a > 1$, probemos un poco más: a^q es uniformemente continua en $(-\infty, M] \cap \mathbb{Q}$ para cada $M > 0$ fijo.

Dado $\varepsilon > 0$, como $\displaystyle\lim_{q\to 0^+} a^q = 1$, $\exists\delta > 0$ tal que $\left|a^h - 1\right| < \frac{\varepsilon}{a^M}$ cuando es $0 < h < \delta$. Entonces si $p, q \in \mathbb{Q}$, $p > q$ y $p - q = h < \delta$, se tiene

$$\left|a^{q+h} - a^q\right| = a^q \left|a^h - 1\right| \leq a^M \left|a^h - 1\right| < \epsilon,$$

quedando ya todas las propiedades probadas.

Usando la propiedad (iii) y el Teorema ***1***, se tiene que, para cada $M > 0$ fijo, la función a^q, uniformemente continua en $[-M, M] \cap \mathbb{Q}$, tiene una (única) extensión continua, a^x al intervalo $[-M, M]$. Entonces, deberá ser, para cada $x \in [-M, M]$,

$$a^x \;=\; \lim_{\substack{q_n \to x \\ q_n \in [-M,M]\cap\mathbb{Q}}} a^{q_n}.$$

Con esto tenemos definida, en cada $[-M, M]$, una función exponencial de base a que es (uniformemente también) continua. Por la unicidad de las extensiones, va a quedar definida en todo $\mathbb{R}$ una única **función exponencial de base** a que es continua en $\mathbb{R}$.

Esta función es también estrictamente monótona, y su recorrido es el intervalo $(0, +\infty)$, luego, por lo que se vio en la sección anterior, la función inversa, $\log_a(x)$ (**logaritmo en base** a), es estrictamente monótona y continua en $(0, \infty)$.

En el caso de base e, la función inversa de la exponencial e^x es el **logaritmo neperiano**, que denotaremos indistintamente en estos apuntes como $\log x$ o $\ln x$. En el tratamiento de los límites de **funciones potencial–exponenciales** (propiedad ***4*** de la segunda sección) se puede tener en cuenta que una definición útil de estas funciones es

$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
$= 2'718\ldots$

$$\big(f(x)\big)^{g(x)} \;=\; e^{g(x)\ln\left(f(x)\right)},$$

siendo necesario, por lo tanto, para empezar, que $f(x)$ sea positiva en el dominio considerado.

Dada la definición del número e, es un pequeño ejercicio demostrar que

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e^{\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)}.$$

Pero entonces debe ser $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=1$, verificándose, en un entorno de 0, la **equivalencia** $\ln(1+x)\sim x$.

$f(x)\sim g(x)$ en un entorno reducido de a $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$

Las funciones hiperbólicas y sus inversas

Las funciones **seno hiperbólico**, **coseno hiperbólico** y **tangente hiperbólica** se definen, $\forall x\in\mathbb{R}$, respectivamente por

$$\mathrm{Sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \mathrm{Ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \mathrm{Th}(x)=\frac{\mathrm{Sh}\,x}{\mathrm{Ch}\,x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

Verifican un repertorio de fórmulas muy parecidas a las fórmulas trigonométricas, por ejemplo:

- $\mathrm{Sh}(-x)=-\mathrm{Sh}\,x\ \forall x\in\mathbb{R}$ (Es una **función impar**.)
- $\mathrm{Ch}(-x)=\mathrm{Ch}\,x\ \forall x\in\mathbb{R}$ (Es una **función par**.)
- $\mathrm{Ch}^2 x-\mathrm{Sh}^2 x=1$ (la **hipérbola** $x^2-y^2=1$ viene así **parametrizada** por $\begin{cases}x=\mathrm{Ch}\,t\\ y=\mathrm{Sh}\,t\end{cases}$ para $t\in\mathbb{R}$, del mismo modo que la **circunferencia** $x^2+y^2=1$ se parametriza con $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\operatorname{sen} t\end{cases}$ para $t\in[0,2\pi)$.
- $\mathrm{Sh}(a\pm b)=\mathrm{Sh}\,a\,\mathrm{Ch}\,b\pm\mathrm{Ch}\,a\,\mathrm{Sh}\,b,\qquad \mathrm{Sh}(2a)=2\,\mathrm{Sh}\,a\,\mathrm{Ch}\,a.$
- $\mathrm{Ch}(a\pm b)=\mathrm{Ch}\,a\,\mathrm{Ch}\,b\pm\mathrm{Sh}\,a\,\mathrm{Sh}\,b,\qquad \mathrm{Ch}(2a)=\mathrm{Ch}^2 a+\mathrm{Sh}^2 a.$

La función $f(x)=\mathrm{Sh}\,x$ es continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Su recorrido, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{Sh}\,x=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{Sh}\,x=+\infty$, es todo $\mathbb{R}$. La función inversa, que es impar, continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ es $f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\mathrm{Arg\,Sh}\,x$, y se denomina **argumento del seno hiperbólico**.

La función $g(x)=\mathrm{Ch}\,x$ es continua en $\mathbb{R}$, y es estrictamente creciente en el intervalo $[0,+\infty)$, con $\mathrm{Ch}(0)=1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{Ch}\,x=+\infty$. La gráfica de esta función es una curva que se llama **catenaria**. La función inversa, $g^{-1}(x)=\mathrm{Arg\,Ch}\,x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, denominada **argumento del coseno hiperbólico**, está definida y es continua y estrictamente creciente en $[1,+\infty)$.

La función $h(x)=\mathrm{Th}\,x$ es continua (pues $\mathrm{Ch}\,x\neq 0\ \forall x$) y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Su recorrido, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{Th}\,x=-1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{Sh}\,x=1$, es el intervalo $(-1,1)$. La función inversa, impar, continua y estrictamente creciente en este intervalo es $h^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\mathrm{Arg\,Th}\,x$. Se denomina **argumento de la tangente hiperbólica**.

Continua en un compacto ⇒ Uniformemente continua

Hemos dicho ya que una función uniformemente continua es continua. En los ejemplos ***1*** y ***2*** han quedado reflejados los problemas que hay para ir en la dirección opuesta. El mayor interés del resultado que viene a continuación es que ahorra trabajo en la demostración de otros más notables del Análisis. Se cumple lo mismo si en lugar del intervalo $[a,b]$ se pone un subconjunto **compacto** S de $\mathbb{R}$, es decir, **cerrado** ($\overline{S}=S$) y acotado.

Teorema 2. Si f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$.

Demostración. Si no, $\exists\,\varepsilon_m>0$ tal que para cada $n\in\mathbb{N}$, $\exists\,x_n,y_n\in[a,b]$ tales que $|\,x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ y $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_m$.

Ahora, por bisección sucesiva del intervalo $[a,b]$, se encuentra una sucesión de intervalos cerrados encajados $[a,b]=J_0\supset J_1\supset\cdots\supset J_k\supset\cdots$ tal que $|\,J_k|=\frac{b-a}{2^k}$ y cada J_k conteniendo infinitos términos de la sucesión $(x_n)_{n\geq1}$, en particular conteniendo uno x_{n_k} tal que $n_k>n_{k-1}$. Por (ICE), $\displaystyle\bigcap_{k\geq1}J_k=\{c\}\in[a,b]$, y se tiene, por la construcción, que la *subsucesión* $(x_{n_k})_{k\geq1}$ converge a c.

Como $|x_{n_k}-y_{n_k}|<\dfrac{1}{n_k}$, se deduce, aplicando la desigualdad triangular, que la subsucesión $(y_{n_k})_{k\geq1}$ también converge a c. Pero f es continua en c, luego $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(c)$ y $\lim\limits_{k\to\infty}f(y_{n_k})=f(c)$, y entonces

$$\lim_{k\to\infty}\Big(f(x_{n_k})-f(y_{n_k})\Big)=0,$$

lo que está en contradicción con que $|\,f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\varepsilon_m$ para todo k.

El Teorema de aproximación de Weierstrass

El resultado de este epígrafe, que data de 1885, asegura que los valores de una función continua en un intervalo cerrado y acotado se pueden aproximar por los valores de un cierto polinomio dentro de un error absoluto prefijado. Se trata, pues, de una **aproximación polinómica global** para una función continua. Al estudiar la derivabilidad veremos cómo se consiguen aproximaciones polinómicas mejores, aunque locales, para las funciones derivables.

La idea probabilística que origina la siguiente demostración, debida a S. Bernstein (1912), puede leerse (y la propia demostración, tomada de estas referencias) en J. MARSDEN, *Elementary Classical Analysis*, Freeman and Co., San Francisco, 1974, pág. 119 y ss, y también en G. PEDRICK, *op. cit.*, pág. 124 y ss. El considerar $[0,1]$ en lugar de un intervalo $[a,b]$ no resta generalidad a la prueba (pues bastaría escribir $\frac{x-a}{b-a}$ en lugar de x en todas partes, en ese otro caso), y le añade en cambio claridad.

Teorema 3. Si $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $\forall\, \varepsilon > 0$ hay un polinomio $P(x)$ tal que $|\, f(x) - P(x)| < \varepsilon \ \forall\, x \in [a,b]$.

Por ejemplo, para $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)$,

$B_1 f(x) = 0$,
$B_2 f(x) = 0$,
$B_3 f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} x(1-3x+2x^2)$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el polinomio

$$B_n f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

se denomina n–**ésimo polinomio de Bernstein** de la función f.

Vamos a ver que, dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $|\, B_n f(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [0,1]$, con lo que el teorema quedará probado de una manera *constructiva.* Sea ahora $x \in [0,1]$ arbitrario pero fijo en lo que sigue:

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$.

$$\begin{aligned}|B_n f(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

Ahora, por el Teorema 2, f es uniformemente continua en $[0,1]$, luego $\exists\, \delta > 0$ (independiente de x) tal que $f\big(B_\delta(x) \cap [0,1]\big) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}\big(f(x)\big)$, y lo siguiente es dividir la suma anterior en dos partes, una extendida a los índices k para los que $\frac{k}{n} \in B_\delta(x)$ y otra a los demás:

$$|B_n f(x) - f(x)| \leq \left(\sum_{\substack{k \text{ tales que} \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta}} + \sum_{\substack{k \text{ tales que} \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta}} \right) \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k};$$

para la primera parte se tiene

$$\sum_{\substack{k \text{ tales que} \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta}} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\substack{k \text{ tales que} \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2},$$

independientemente de n y de x, y sólo queda acotar la segunda suma también con $\frac{\varepsilon}{2}$ independientemente de x. Esto se conseguirá para n suficientemente grande:

Por el teorema de Weierstrass $\exists M$ tal que $|\, f(x)| \leq M \ \forall\, x \in [0,1]$, así que

$$\sum_{\substack{k \text{ tales que} \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta}} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq 2M \cdot \sum_{\substack{k \text{ tales que} \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

y ahora nos queda encontrar un n tal que para todo $x \in [0,1]$ sea

$$\sum_{\substack{k \text{ tales que} \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \;<\; \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Cuando $\left|\frac{k}{n}-x\right| \geq \delta$, se tiene $(k-nx)^2 \geq n^2\delta^2$, o bien $1 \leq \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}$, y se puede hacer la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k \text{ tales que} \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} &\leq \sum_{\substack{k \text{ tales que} \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}} \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\end{aligned}$$

y queda ver que, para n grande,

$$S = \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} < \frac{n^2\delta^2\varepsilon}{4M} \quad \forall x \in [0,1].$$

Es un buen ejercicio ponerse a probar la igualdad $S = nx(1-x)$ sin mirar el lema siguiente. Con ella,

Desigualdad de las medias aritmética y geométrica de dos números positivos:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y).$$

$$S = nx(1-x) \leq \frac{n}{4} < \frac{n^2\delta^2\varepsilon}{4M} \quad \text{si} \quad n > \frac{M}{\delta^2\epsilon},$$

lo que termina la demostración.

Lema. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$S = \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

Demostración. Primero se desarrollan los cuadrados:

$$\begin{aligned}S = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - 2nx\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ + n^2x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

Ahora,

$$C = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \big(x+(1-x)\big)^n = 1.$$

Aplicando la identidad $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$,

$$\begin{aligned}B = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= nx\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\ &= nx\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}x^l(1-x)^{n-1-l} = nx.\end{aligned}$$

Y usando este valor,

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= nx + x^2 \sum_{k=2}^{n} n(n-1) \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.
\end{aligned}
$$

Luego, $S = A - 2nxB + n^2x^2C = nx(1-x)$.

Ejercicios

1 Sean α, β dos números reales distintos de 0. Se define una sucesión (Q_n) por

$$
\begin{aligned}
Q_0 &= \alpha; \qquad Q_1 = \beta; \\
Q_n &= (1 + Q_{n-1})/Q_{n-2}, \quad \text{para } n > 1.
\end{aligned}
$$

Hallar Q_n para todo $n \in \mathbb{N}$. (Tomado del libro *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1994, de R.L. Graham, D.E. Knuth y O. Patashnik.)

2 Probar las **desigualdades de las medias** armónica, geométrica y aritmética de n números reales positivos: Si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, se tiene

$$
\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},
$$

cumpliéndose cada igualdad $\Leftrightarrow$ todos los x_i son iguales.

3 Probar $|a-b| \ge \Big||a| - |b|\Big|$ para todos los $a, b \in \mathbb{R}$.

4 Sea $M \in \mathbb{R}^+$. Probar que la sucesión (a_n) definida por

$$
a_1 \in \mathbb{R}^+ \text{ arbitrario}; \quad a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{M}{a_{n-1}}\right) \quad \text{si } n > 1,
$$

tiene límite, y calcularlo.

5 Resolver las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&(a)\ |2x-3| = 5 \quad (b)\ |2x-3| = x+1 \quad (c)\ |2x+3| = x+1 \\
&(d)\ |3-x| - |x+2| = 5 \quad (e)\ |x-2| + |x-1| = x-3 \\
&(f)\ \cos x - \operatorname{sen} x = \cos^3 x \quad (g)\ \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen} x.
\end{aligned}
$$

6 Hallar los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{(x+a)(x+b)}\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{p/q}-1}{x^{r/s}-1}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}-x\right)$ (e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{(x-a)^2}}{x-a}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$ (g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{tg}(bx)}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(ax)-\cos(bx)}{1-\cos(cx)}$ (j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x^3}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen}(ax)}{x+\operatorname{sen}(bx)}$ (l) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ (m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

(n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7-2x^5+1}{x^3-3x^2+2}$ (ñ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos(\pi x)}{\operatorname{tg}^2(\pi x)}$ (o) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x-\operatorname{tg}x)$

7 Probar que si f es monótona creciente en (a,b) y está acotada superiormente, $\exists\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$.

8 Estudiar la continuidad de las funciones:

(a) $f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\notin\mathbb{Q},\\ 1-x & \text{si } x\in\mathbb{Q}.\end{cases}$

(b) $f(x)=\sqrt{x}-\lfloor\sqrt{x}\rfloor$. (c) $f(x)=\dfrac{1}{\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor}$

(d) $f(x)=\left|1+\dfrac{1}{x}\right|^x$ *(Rey Pastor)*

9 Esbozar las gráficas de las siguientes funciones: (Alguno de los ejercicios, como éste, y también varios de los apartados del siguiente, están tomados de G. H. Hardy, *A course of Pure Mathematics*, Cambridge, 1946.)

(a) $\operatorname{tg}x$, $\sec x$, $\operatorname{sen}^2 x$, $\operatorname{tg}^2 x$, $\sec^2 x$, $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$, $a\cos x+b\operatorname{sen}x$, $\cos(2x)+\cos(4x)$, $a\operatorname{sen}^2 x+b\cos^2 x$.

(b) $\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$, $x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, $x^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)$, $x+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\operatorname{sen}(x^2)$, $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sen}x\right)$.

(c) $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$, $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$, $\lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$, $x^2-\lfloor x^2\rfloor$, $1-x+\lfloor x\rfloor-\lfloor 1-x\rfloor$.

10 (a) Probar que la ecuación $x^3=3x+8$ tiene una única solución real, y hallarla con 2 decimales exactos.

(b) Lo mismo, para la ecuación $x^5=x+16$.

(c) Resolver la ecuación $2x^5 = 2x + 1$.

(d) Resolver la ecuación $\sec x + \operatorname{cosec} x = 2\sqrt{2}$. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\sec x + \operatorname{cosec} x = c$ en el intervalo $(0, 2\pi)$?

(e) Resolver la ecuación $x\,2^x = 1$.

(f) Resolver la ecuación $\frac{2}{3} x \operatorname{sen} x = 1$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

(g) Hallar la menor raíz positiva de la ecuación $\operatorname{tg} x = x$.

11 Sea $c > 0$; probar que la ecuación

$$x - nc = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{n}{x+n}\right)$$

tiene una única raíz real x_n para cada $n \geq 0$. Hallar los límites de las sucesiones (x_n) y $\left(\frac{x_n}{n}\right)$. (*O. Ciaurri.*)

12 ¿Es cierto que si $f\colon [0,1] \to [0,1]$ es

(a) monótona creciente, o bien
(b) monótona decreciente,

entonces existe un $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$? (Propuesto en *The 7th International Mathematics Competition for University Students*, Londres, julio de 2000.)

13 Probar que si $f\colon [0,1] \to [0,1]$ es continua, entonces $\exists x \in [0,1]$ tal que $f(x) = 1 - x$.

14 Probar que si f es continua en $[0,2]$ y $f(0) = f(2)$, entonces $\exists x_1, x_2 \in [0,2]$ tales que $|x_1 - x_2| = 1$ y $f(x_1) = f(x_2)$. (Este problema y los dos siguientes son de M. SPIVAK, *Calculus*, ed. Reverté)

15 Sea f continua en $[0,1]$ cumpliendo $f(0) = f(1)$, y sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\exists x \in [0,1)$ tal que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$. (*Sugerencia:* Considerar la función $\phi(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$. ¿Qué se puede deducir si $\phi(x) \neq 0\ \forall x$?)

16 Sea $a \in (0,1)$ tal que $a \neq \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Encontrar una función real f continua en $[0,1]$ cumpliendo $f(0) = f(1)$, y tal que $f(x) \neq f(x+a)$ $\forall x \in [0,1)$.

17 Probar que si $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ y f es continua en 0, entonces f es continua en $\mathbb{R}$ y $f(x) = cx$ para un cierto $c \in \mathbb{R}$.

18 Determinar el rectángulo inscrito en la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ de lados paralelos a los ejes coordenados que tiene área máxima. (*Sugerencia:* Utilizar las ecuaciones paramétricas de la elipse.)

19 Probar las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arc\,sen} x + \arccos x &= \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1,1].\\
\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,cotg} x &= \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.\\
\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y &= \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \quad \text{si } xy < 1.\\
\operatorname{Arg\,Th} x + \operatorname{Arg\,Th} y &= \operatorname{Arg\,Th}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \quad \forall x,y \in (-1,1)
\end{aligned}$$

20 Probar que, si $a = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right)$, entonces se tienen $\operatorname{Th}\left(\frac{a}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}\right)$, $\operatorname{Th} a = \operatorname{sen} b$ y $\operatorname{Ch} a = \sec b$.

21 Resolver los sistemas de ecuaciones:

$$(a)\begin{cases}\operatorname{Ch} x + \operatorname{Ch} y = a\\ \operatorname{Sh} x + \operatorname{Sh} y = b\end{cases} \quad (b)\begin{cases}\operatorname{Ch} x + \operatorname{Sh} y = a\\ \operatorname{Sh} x + \operatorname{Ch} y = b\end{cases} \quad (c)\begin{cases}\operatorname{Arg\,Sh} x = 2\operatorname{Arg\,Sh} y\\ 3\ln x = 2\ln y\end{cases}$$

22 Probar que la mínima raíz positiva de la ecuación $xy = \operatorname{sen} x$ es una función continua de y en el intervalo $(0,1)$ que decrece de π a 0 cuando y crece de 0 a 1. (*Sugerencia:* Es la función inversa de $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.) (*Hardy*.)

23 Sea $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continua y decreciente, y verificando $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$:

$$f(x+y) + f\big(f(x)+f(y)\big) = f\Big(f\big(x+f(y)\big) + f\big(y+f(x)\big)\Big).$$

Probar que $f(x) = f^{-1}(x)$. (*Olimpiada Matemática Iraní, 1997.*)

24 Probar que la función $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no es uniformemente continua en $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$.

25 Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y $P(a)\cdot P(b) < 0$, entonces $P(x)$ tiene un número impar de ceros en (a,b). Si, en cambio, $P(a)\cdot P(b) > 0$, entonces $P(x)$ no tiene ceros, o tiene un número par de ceros en (a,b).

Problemas —primer bloque de trabajo—

1.1.— El problema 11 del Capítulo 8 del *Calculus* de Spivak.

(Referencias: 11(d) es la Proposición 2 del libro xii de los Elementos de Euclides, consultable en Euclid, *The 13 books of the Elements*, versión inglesa con notas de Sir Th. L. Heath, Vol.3, Dover, New York, 1956 ; O. Toeplitz, *The Calculus: A Genetic Approach*, Univ. of Chicago Press, Midway reprint, USA, 1981, I.3: The Exhaution Method of the Greeks.)

1.2.— Se dice que una función es **convexa** (o *cóncava vista desde arriba*) en un intervalo cuando, si P, Q y R son tres puntos cualesquiera de la gráfica de

f en dicho intervalo y Q está entre P y R, entonces Q está en, o por debajo de, la *cuerda* PR.

Probar que si f es convexa en (A, B) y $[a, b] \subset (A, B)$, entonces f es continua en $[a, b]$.

(Referencias: SPIVAK, Apéndice al Capítulo 11; KLAMBAUER, *Aspects of Calculus*, Springer, Ejercicios del Capítulo 2.)

1.3.— Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f\colon I \to I$ una función. Un conjunto finito $C = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tal que

$$f(x_1) = x_2,\ f(x_2) = x_3,\ \dots,\ f(x_n) = x_1$$

se llama **ciclo u órbita periódica de período** n de la función f. Probar:

(a) Si f es continua y tiene un ciclo de período 3, también tiene un ciclo de período 5.

(b) La función continua $f\colon [1, 5] \to [1, 5]$ definida por $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 4$, $f(4) = 2$, $f(5) = 1$ y lineal en cada intervalo $[n, n+1]$, tiene ciclos de período 5, pero ninguno de período 3.

(Referencias: M. DE GUZMÁN, *El rincón de la pizarra*, Pirámide, Madrid, 1996, capítulo 10; M. MISIUREWICZ, Remarks on Sharkovsky Theorem, *American Mathematical Monthly*, **104** (1997), pp. 846-7.)

1.4.— **Lema del sol naciente, de F. Riesz:** Sea $g(x)$ una función continua definida en el intervalo $[a, b]$, y sea E el conjunto de los puntos x interiores a este intervalo y tales que existe un $\xi > x$ tal que $g(\xi) > g(x)$. El conjunto E es, o bien vacío, o bien la unión de una familia numerable de intervalos abiertos disjuntos (a_n, b_n), cumpliéndose $g(a_n) = g(b_n)$ para todo n, salvo quizás si $a_n = a$.

(Referencias: SPIVAK, Problemas del Capítulo 8; F. RIESZ, *Sur l'existence de la dérivée des fonctions monotones et sur quelques problèmes qui s'y rattachent*, *Acta Sci. Math. Szeged*, **5** (1932), 208-221.)

1.5.— Hallar todas las funciones continuas $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que cumplen:

(i) f no es inyectiva;

(ii) $f(x) = f(y) \Rightarrow f(tx) = f(ty)\ \forall t > 0$.

2

Derivadas

LO QUE HOY llamamos derivada es un concepto ideado por Isaac Newton (1642-1727), que lo llamó **fluxión** (de una cantidad **fluente**). El uso del propio término "derivada" tiene más de 200 años, y aparece ya así en las *Lecciones de Cálculo infinitesimal* impartidas por el matemático francés A. L. Cauchy en la Real Escuela Politécnica de París el año 1823, donde la definición es prácticamente (salvo por las menciones hechas a la continuidad y al límite con un sentido que en Cauchy era ya preciso) la newtoniana:

TERCERA LECCIÓN

Derivadas de funciones de una variable

Cuando una función $y = f(x)$ varía continuamente entre dos límites dados de x, y se le asigna a la variable un valor incluído entre esos dos límites, un incremento infinitamente pequeño dado a la variable producirá un incremento infinitamente pequeño en la propia función. Consiguientemente, si ponemos $\Delta x = i$, los dos términos de la razón de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero cuando ambos términos se acercan indefinida y simultáneamente al límite 0, la propia razón puede converger hacia otro límite, positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor fijo para cada valor particular de x, pero variará con x. Por ejemplo, si tomamos $f(x) = x^m$, donde m designa un número natural, la razón entre las diferencias infinitamente pequeñas será

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} i + \cdots + i^{m-1},$$

y su límite será la cantidad mx^{m-1}, es decir, una nueva función de la variable x. En general ocurrirá lo mismo, sólo que la forma de la nueva función que sirve como límite de la razón $\dfrac{f(x+i) - f(x)}{i}$ dependerá de la forma de la función dada $y = f(x)$. En orden a indicar esta dependencia, daremos a la nueva función el nombre de función derivada, y la designaremos, con ayuda de un acento, por la notación y' o $f'(x)$ ...

Por otra parte, Gotfried W. Leibniz (1646-1716) desarrolló, de manera independiente de Newton, su **cálculo diferencial**, unas reglas de cálculo formal para las **diferenciales**, o incrementos infinitesimales, de cantidades variables. Lo expuso por primera vez en 1684. Así, por ejemplo, $d(u \pm v) = du \pm dv$, $d(uv) = u\,dv + v\,du$ y $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u\,dv - v\,du}{v^2}$. La potencia de este cálculo era equivalente a la del cálculo de fluxiones de Newton, si se identificaba la fluxión newtoniana $\dot{y}$ de una ordenada fluente con el tiempo t con el cociente $\dfrac{dy}{dt}$ de las diferenciales leibnizianas. La notación de Leibniz ha perdurado notablemente, por su agilidad, en el Cálculo aplicado a las ciencias naturales. Pero la cuarta lección de Cauchy, titulada *Diferenciales de funciones de una variable*, ha pasado de moda.

2.1 CONCEPTO DE DERIVADA

Definiciones

Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$. La función f es **derivable en** x_0 si existe el límite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

En tal caso, dicho límite se representa por $f'(x_0)$ y se llama **la derivada de** f **en** x_0. La función f se dice **derivable en** (a,b) si lo es en todo $x \in (a,b)$, y, en este caso, la función $\begin{array}{rcl} f'\colon (a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$ se llama **la derivada** (primera) **de la función** f.

La función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es derivable si es derivable en (a,b) y existen las **derivadas laterales** en a por la derecha y en b por la izquierda, es decir, los límites

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{y} \quad f'_-(b) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}.$$

Interpretación geométrica.— Cuando $\exists\, f'(x_0) = m$, la gráfica de la función f admite, en el punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$, una (única) **recta tangente** no vertical, y m es la **pendiente** de dicha recta, es decir, la tangente del ángulo que forma con el semieje OX. La ecuación de esta recta tangente es, pues,

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

El polinomio de primer grado $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ es una **aproximación lineal** para los valores de la función f en un entorno de x_0 cuyo **error** es, para cada h en un correspondiente entorno de 0,

$$f(x_0+h) - T_1(x_0+h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot h = e(h),$$

digamos, y se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{e(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = 0\,.$$

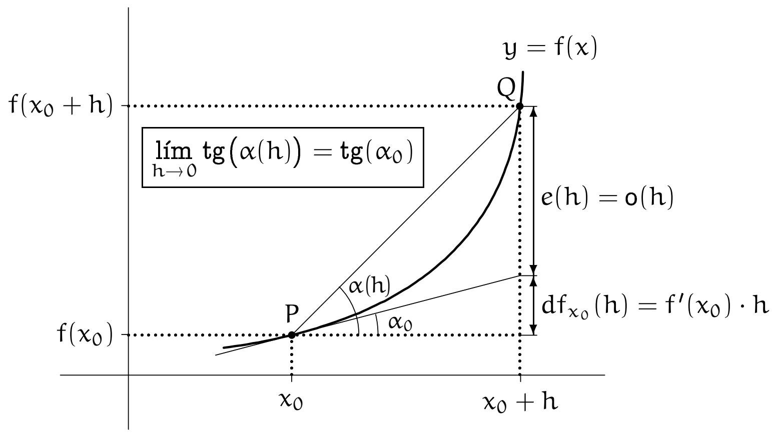
Se dice entonces que la función $e(h)$, definida en un correspondiente entorno de 0, es una **o pequeña** de h, y se denota $e(h) = o(h)$ (**notación de Landau**).

$o(h) + o(h) = o(h)$
$o(h) \cdot o(h) = o(h^2)$

La función lineal $\begin{array}{rccc} df_{x_0}\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & h & \mapsto & f'(x_0)\cdot h \end{array}$ se llama **la diferencial de** f **en** x_0; se tiene pues, para h en un entorno de 0:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = df_{x_0}(h) + o(h)\,.$$

$dy = f'(x)\,dx$
$f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$



Se define: f es **diferenciable en** x_0 si $\exists\, l\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **lineal** tal que

$$f(x_0+h) - f(x_0) - l(h) = o(h)$$

para h en un entorno de 0. Es sencillo ver que se verifica

$$f \text{ es diferenciable en } x_0 \iff f \text{ es derivable en } x_0\,.$$

Sólo el $\Rightarrow$ es cierto para funciones de más de una variable

Notas y ejemplos

1.— **Si** f **es derivable en** x_0**, entonces** f **es continua en** x_0, ya que la única posibilidad de que exista el límite $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, de un cociente cuyo denominador tiende a 0, es que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big) = 0$. Pero el recíproco no es cierto:

1.1.– **Puntos angulosos**: La función $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ es continua, pero no es derivable en 0, pues $f'_+(0) = 1$ y $f'_-(0) = -1$.

1.2.– **Puntos de tangente vertical**: Para la función continua $f(x) = \sqrt[3]{x}$ las dos derivadas laterales en 0 son $+\infty$.

1.3.– La función continua $f(x) = \begin{cases} x \,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ no es derivable en 0, pues no existe $\lim\limits_{h\to 0} \mathrm{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$.

1.4.– Se pueden incluso mostrar **funciones que son continuas en todo** $\mathbb{R}$ pero que **no son derivables en ningún punto**. El siguiente ejemplo se debe a T. Takagi, quien lo publicó en Tokio, en 1930

Se considera la función $K(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1/2 \\ 1 - x & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$ y se extiende a $\mathbb{R}$ periódicamente, definiendo $K(x+1) = K(x)\ \forall x$. Para cada $N \in \mathbb{N}$, sea $T_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} K(2^n x)$. La función $T(x) = \lim\limits_{N\to\infty} T_N(x)$ verifica lo anunciado. Con nuestro bagaje actual la prueba de ello sería bastante larga. Se puede uno conformar con visualizar, tal vez a mano, las gráficas de T_1, T_2, T_3, ...

2.— De la función "**pop-corn**" en $[0,1]$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \ \text{ o } \ x \notin \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \text{ irreducible}, \end{cases}$ ya sabemos que es continua en 0 y en los irracionales de $(0,1)$; pero no es derivable en ning´un punto $a \in [0,1]$:

Veamos que no existe la $f'(a)$ para $a \notin \mathbb{Q}$; en caso de existir, sería cero, pues por ejemplo

$$\frac{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}{\frac{1}{n}} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ n > \frac{1}{1-a}.$$

Pero sea $a = 0'a_1 a_2 a_3 \ldots$ el desarrollo decimal de a, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $h_n = -0'0\ldots 0 a_{n+1} a_{n+2} \ldots$; se tiene

$$\left| \frac{f(a + h_n) - f(a)}{h_n} \right| > 10^n \cdot f(0'a_1 a_2 \ldots a_n) > 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Y tampoco es derivable (por la derecha) en 0, pues $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ y $f\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.1.– El cuadrado de la función "pop-corn", considerada por ejemplo definida en el intervalo $[-1,1]$, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \ \text{ o } \ x \notin \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{q^2} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \text{ irreducible}, \end{cases}$ es también continua en 0 y en los irracionales de $(-1,1)$; y sólo es derivable en 0, siendo $g'(0) = 0$. De manera que la derivabilidad de una función en un punto no implica ni siquiera continuidad en un entorno del punto.

3.— Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Se dice que **la función f es de la clase 1 en I**, denotándose $f \in \mathcal{C}^{(1)}(I)$ cuando f es derivable en I y la función f' es continua en I. También se denota $f \in \mathcal{C}^{(0)}(I)$ para indicar que f es continua en I.

Si de modo ocasional denotamos con $f \in \mathcal{D}^{(1)}(I)$ el hecho de que f sea derivable en I, se tienen las siguientes inclusiones entre clases de funciones: $\mathcal{C}^{(0)}(I) \supset \mathcal{D}^{(1)}(I) \supset \mathcal{C}^{(1)}(I)$. Que la primera inclusión es estricta ha quedado bien de manifiesto en cualquiera de los ejemplos anteriores. Con el ejemplo que sigue se prueba que la segunda inclusión es también estricta:

3.1.– La función $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ es derivable en $\mathbb{R}$, siendo

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0, \\ f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0\,. \end{aligned}$$

Como no existe el $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$, la derivada f' no es continua en 0.

4.— Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si f es derivable en I y f es estrictamente creciente (decreciente) en I, entonces $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in I$, como se deduce fácilmente aplicando la propiedad de conservación local del signo de un límite. Más adelante veremos que el resultado recíproco de éste toma la forma $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in I \Rightarrow f$ estrictamente creciente (decreciente) en I.

Si en un punto $a \in I$ se tiene $f'(a) > 0$, ésto implica, por conservación local de signo, que $\exists \delta > 0$ tal que $f(x) > f(a)$ $\forall x \in (a, a+\delta)$ y $f(x) < f(a)$ $\forall x \in (a-\delta, a)$, pero no implica que la función f sea estrictamente creciente en algún entorno de a. El ejemplo siguiente lo ilustra:

4.1.– La función $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ es derivable en $\mathbb{R}$, siendo

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Remarquemos, pues, que $f'(0) = 1 > 0$. Veamos que en cualquier intervalo $(0, \delta)$ con $\delta > 0$ hay puntos x tales que $f'(x) < 0$, con lo cual f no puede ser creciente en $(0, \delta)$, ya que de serlo, habría de cumplirse, como hemos dicho arriba, que $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (0, \delta)$.

Fijado un $\delta > 0$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2n\pi} < \delta$. Tenemos que $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0$. Además (ver la nota siguiente) la función f' es derivable en todo $x \neq 0$, con derivada

$$f''(x) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right),$$

de donde resulta $f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -4n\pi < 0$. Entonces, para todo y en un pequeño semientorno de $\frac{1}{2n\pi}$ se tendrá $f'(y) < f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right)$, habiendo así puntos de $(0, \delta)$ donde f' es negativa.

5.— Derivadas sucesivas. Una función f definida en un intervalo I es **derivable dos veces en** $a \in I$ cuando es derivable en un entorno de a y la función f' definida en dicho entorno tiene a su vez derivada en a. Este número $(f')'(a)$ se llama **la derivada segunda de** f **en** a, y se denota por $f''(a)$. Si existe $f''(x)$ $\forall x \in I$, la función f es derivable dos veces en I y la función $f''\colon I \to \mathbb{R}$ es la **derivada segunda de la función** f. Si f'' es continua en I, se dice que f es de clase 2 en I y se denota $f \in \mathcal{C}^{(2)}(I)$.

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$
$$y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$
Notación de Leibniz

Se definen de igual modo, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, los conceptos de **derivada** n**–ésima** de una función en un punto, $f^{(n)}(a)$, y en un intervalo. Cuando la derivada n–ésima es continua en un intervalo I, se dice que f es **de clase** n **en** I y se denota $f \in \mathcal{C}^{(n)}(I)$. Si se representa por $\mathcal{D}^{(n)}(I)$ la clase de las funciones derivables n veces en I, se dan las inclusiones estrictas $\mathcal{C}^{(n-1)}(I) \supset \mathcal{D}^{(n)}(I) \supset \mathcal{C}^{(n)}(I)$.

Cuando $f \in \mathcal{D}^{(n)}(I)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se dice que es **de clase infinito en** I, y se denota $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(I)$. A la clase $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ van a pertenecer por ejemplo los polinomios, las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y a^x con $a > 0$. Las funciones $\operatorname{arc\,sen} x$ y $\operatorname{arc\,cos} x$ son de $\mathcal{C}^{(\infty)}\big((-1,1)\big)$; la función $\log_a x$ estará en la clase $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^+)$.

5.1.– La función $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ está en $\mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ pero no en $\mathcal{D}^{(2)}(\mathbb{R})$, pues no existe $f''(0)$.

La función $g(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ está en $\mathcal{D}^{(2)}(\mathbb{R})$ pero no en $\mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{R})$, pues la función $g''(x)$ no es continua en 0.

2.2 CÁLCULO DE DERIVADAS

Veremos en primer lugar las reglas generales del proceso de derivación: derivada de la suma, producto y cociente de funciones derivables, la derivada de una composición de funciones derivables y la derivada de una función inversa. Despu´esrepasaremos las derivadas de las funciones elementales (polinomios, exponencial y logarítmica, trigonométricas).

Reglas generales de derivación

Proposición 1. Sean f y g dos funciones definidas en un entorno de un punto $a \in \mathbb{R}$ donde son derivables; entonces las funciones $f \pm g$, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$, fg y f/g (ésta cuando $g(a) \neq 0$) son derivables en a, y se tiene:

(i) $(f \pm g)'(a) \;=\; f'(a) + g'(a)$
(ii) $(\lambda f)'(a) \;=\; \lambda f'(a)$

(iii) $(fg)'(a) \;=\; f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

(iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) \;=\; \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{\big[g(a)\big]^2}$

Demostración. Veamos por ejemplo (iii): para todo h en el entorno de 0 donde los valores $f(a+h)$ y $g(a+h)$ están definidos, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\ &= \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h} \\ &= f(a+h)\frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,,\end{aligned}$$

expresión cuyo límite cuando h tiende a 0 es $f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$, pues f es continua en a.

Proposición 2 (Regla de la cadena). Sean f definida en un intervalo J y derivable en $a \in J$, y g definida en un intervalo $I \supset f(J)$ y derivable en $f(a)$; entonces la función compuesta $\phi(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ es derivable en a, siendo

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

$$\phi'(a) \;=\; g'\big(f(a)\big)\cdot f'(a)\,.$$

Demostración. Por hipótesis se tiene

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + o(h)\,, \\ g\big(f(a)+k\big) &= g\big(f(a)\big) + kg'\big(f(a)\big) + o(k)\,, \end{aligned}$$

para $h \in B_\delta(0)$ y $k \in B_\varepsilon(0)$, digamos. Por la continuidad de la función f en el punto a, $\exists \rho > 0$ tal que si $h \in B_\rho(0)$, entonces $f(a+h) - f(a) \in B_\varepsilon(0)$. Cuando $h \in B_\delta(0) \cap B_\rho(0)$, podemos sustituir arriba $k = f(a+h) - f(a)$, y se obtiene

$$\begin{aligned} g\big(f(a+h)\big) &= g\big(f(a)\big) + \big(hf'(a) + o(h)\big)g'\big(f(a)\big) + o\big(hf'(a) + o(h)\big) \\ &= g\big(f(a)\big) + hf'(a)g'\big(f(a)\big) + o(h)\,, \end{aligned}$$

lo que termina la demostración.

Recordemos del tema anterior que cuando una función, definida en un intervalo, es continua e inyectiva, entonces la función inversa, definida en el intervalo imagen, también es continua (e inyectiva). Ahora estudiamos la derivabilidad de la función inversa. Las gráficas cartesianas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$. Cuando la gráfica de f tiene tangente no horizontal en un punto $\big(a, f(a)\big)$, la gráfica de f^{-1} tiene tangente no vertical en el correspondiente punto $\big(f(a), a\big)$. De hecho las pendientes de estas tangentes van a ser inversas una de otra.

La hipótesis de inyectividad en un entorno del punto a, necesaria en la siguiente proposición, no queda implicada por ser $f'(a) \neq 0$, recuérdese el ejemplo ***4.1*** de la sección anterior. Pero si fuera $f'(x) \neq 0\ \forall x \in I$, entonces, como veremos en la próxima sección, f sí sería inyectiva en I, no haría falta suponerlo, y la conclusión de la proposición sería en tal caso válida en todo I.

$\boxed{\dfrac{dx}{dy} = 1\Big/\dfrac{dy}{dx}}$

Proposición 3 (Derivada de la función inversa). Sea f continua e inyectiva en un intervalo I, y sea $a \in I$ tal que $\exists f'(a) \neq 0$. Entonces la función inversa f^{-1} es derivable en $b = f(a)$, y se tiene

$$\left(f^{-1}\right)'(b) \;=\; \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por la hipótesis de que $\exists f'(a) \neq 0$ se tiene, por una parte, que existe, por ejemplo, un $\delta_1 > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right| \;<\; \frac{\varepsilon\,|f'(a)|^2}{2}\,,$$

para todo $x \in B^*_{\delta_1}(a)$. Y por otra parte, por conservación de signo local del límite, $\exists \delta_2 > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| \;>\; \frac{1}{2}\,|f'(a)|$$

para todo $x \in B^*_{\delta_2}(a)$. Sea $B_\delta(a) = B_{\delta_1}(a) \cap B_{\delta_2}(a)$; por ser f^{-1} continua en $b = f(a)$, para este número $\delta > 0$ $\exists \rho > 0$ tal que $f^{-1}(y) \in B_\delta(a)$ si $y \in B_\rho(b)$.

La restricción de f^{-1} a $B_\rho(b)$ es inyectiva; sea $y \in B^*_\rho(b)$ arbitrario; entonces será $f^{-1}(y) = x \neq a$, y se tiene, para terminar:

$$\left|\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} - \frac{1}{f'(a)}\right| = \left|\frac{x - a}{f(x) - f(a)} - \frac{1}{f'(a)}\right| = \left|\frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} - \frac{1}{f'(a)}\right|$$
$$= \frac{1}{\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|\,|f'(a)|}\cdot\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right| < \frac{2}{|f'(a)|^2}\cdot\frac{\varepsilon\,|f'(a)|^2}{2} = \varepsilon\,.$$

Notas y ejemplos

1.— La versión "unilateral" de la regla de la cadena, cuya demostración puede verse en S. K. Berberian, *A first course in real analysis*, Springer, 1994, págs. 127-8, es la siguiente

Propiedad. Si $\exists f'_+(a)$ y $\exists g'\big(f(a)\big)$, entonces $\exists (g \circ f)'_+(a) = g'\big(f(a)\big) \cdot f'_+(a)$.

Un contraejemplo que hace ver que es falso el enunciado alternativo en el que la derivada lateral que existe sea la de la función g, lo ofrecen las funciones

$f(x) = -x \ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0\,, \\ 0 & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$ Se tiene que $\exists g'_+(0) = 0$, pero no existe $(g \circ f)'_+(0)$, pues la función compuesta es

$$g\big(f(x)\big) \ = \ g(-x) \ = \ \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0\,, \\ 0 & \text{si } x \leq 0\,. \end{cases}$$

2. (Un ejercicio).— Sea $f(x) = 4x(1-x)$. Hallar lo s puntos donde $F'(x) = 0$, siendo $F(x) = f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$.

Denotemos por abreviar $f^2(x) = f\big(f(x)\big)$. Por la regla de la cadena se tiene $F'(x) = f'\left(f^2(x)\right) \cdot f'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$, luego $F'(x) = 0$ cuando alguno de los tres factores es 0.

- $f'(x) = 0$: $4 - 8x = 0$, única solución $x = \frac{1}{2}$.
- $f'\big(f(x)\big) = 0$: $f(x) = \frac{1}{2}$: $x = \frac{1}{4}\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$.
- $f'\left(f^2(x)\right) = 0$: $f^2(x) = \frac{1}{2}$: $f(x) = \frac{1}{4}\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$: $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$.

Son 7 puntos distintos en total.

3. Derivada n–ésima de un producto: Regla de Leibniz.— Se verifica la fórmula siguiente, cuando f y g son dos funciones suficientemente derivables, y $n \in \mathbb{N}$:

$$(fg)^{(n)}(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\,,$$

donde se entiende que $f^{(0)} = f$ y $g^{(0)} = g$.

Demostración. P or inducción: (i) para $n = 1$ la fórmula no es más que la regla de la derivada de un producto.

Método de inducción: Si se cumplen (i) $P(1)$ y (ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ entonces $P(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Supuesta cierta la fórmula para n, se va a tener:

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} \ &= \ \left((fg)^{(n)}\right)' \ = \ \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(k+1)} g^{(n-k)}\right\} \\
&= \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} f^{(l)} g^{(n-l+1)} \\
&= \ \sum_{k=0}^{n+1} \left\{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right\} f^{(k)} g^{(n-k+1)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)},$$

Hallar la derivada n-ésima de

$e^{2x}(ax^2 + bx + c)$

dado que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ (incluso para $k = 0$ y $k = n+1$, entendiéndose que $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$). Luego la fórmula es también cierta para $n+1$.

Derivada de las funciones elementales

Una vez visto el resultado de derivabilidad de la función inversa, se puede completar una tabla de derivadas de las funciones básicas del cálculo. En la siguiente presentación seguimos el libro de Klambauer.

1. Función potencial de exponente entero.— Sea $f(x) = x^n$, donde $n \in \mathbb{Z}$. Se tiene $f'(x) = nx^{n-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Para $n = 0$, $f'(x) = 0$ trivialmente.
- Para $n > 0$, el resultado se sigue por indución, o usando el desarrollo del binomio de Newton.
- Para $n < 0$, el resultado se sigue de la derivada de un cociente.

2. Funciones logarítmica y exponencial.— Para $f(x) = \ln x$, donde $x \in \mathbb{R}^+$, se tiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} = \ln\left(e^{1/x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Y, más en general, para $g(x) = \log_a x = \log_a e \cdot \ln x$, $(a > 0)$, será

$$g'(x) = (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e.$$

La función a^x, $(a > 0)$, es la inversa de $g(x) = \log_a x$, y por consiguiente, es derivable en $g(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$. Apliquemos la regla de la cadena a la identidad $g\big(g^{-1}(x)\big) = x$, es decir, $\log_a(a^x) = x$. Se tiene

$$(a^x)' \cdot \frac{1}{a^x} \log_a e = 1,$$

luego $(a^x)' = \dfrac{a^x}{\log_a e} = a^x \ln a$. En particular, $(e^x)' = e^x$.

Para $f(x) = \ln|x|$, definida para todo $x \neq 0$, se tiene también $f'(x) = \frac{1}{x}$. Pues si $x > 0$, $\ln|x| = \ln x$, y si $x < 0$, $\ln|x| = \ln(-x)$ y por la regla de la cadena,

$$\big(\ln(-x)\big)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Una nueva aplicación de la regla de la cadena, usando esto de arriba, da

$$\big(\ln|g(x)|\big)' = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

3. Función potencial de exponente arbitrario.— (i) Para un exponente $b \in \mathbb{R}$ cualquiera no tiene sentido considerar la función x^b para $x < 0$. Para $x > 0$, $x^b = e^{b\ln x}$, y se tiene

$$\left(x^b\right)' = e^{b\ln x} \cdot \frac{b}{x} = bx^{b-1}.$$

(ii) Si $q \in \mathbb{Q}$ tiene denominador impar en su expresión como fracción irreducible, la función x^q está definida en general para todo $x \neq 0$. Derivando los dos miembros de la identidad $\ln|x^q| = q\ln|x|$, se tiene

$$\frac{(x^q)'}{x^q} = \frac{q}{x} \quad \Longrightarrow (x^q)' = qx^{q-1}.$$

4. Funciones circulares.— En primer lugar sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene, utilizando la fórmula $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \operatorname{sen} x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = \cos x. \end{aligned}$$

A partir de ésta resultan

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \left(\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\right)' = -\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \text{cuando } \cos x \neq 0,. \end{aligned}$$

Para lo que sigue, recu´ edense las definiciones de las funciones inversas de estas funciones trigonométricas. Para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, si $\operatorname{sen} x = y$, se tiene $\cos x = \sqrt{1 - y^2}$ (raíz cuadrada positiva). Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x \ &\Rightarrow \ (\operatorname{arc\,sen} y)' \cdot \cos x = 1 \\ &\Rightarrow \ (\operatorname{arc\,sen} y)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in (-1,1). \end{aligned}$$

Análogamente, para $x \in [0, \pi]$, si $\cos x = y$, se tiene $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - y^2}$ (raíz cuadrada positiva). Entonces,

$$\operatorname{arc\,cos}(\cos x) = x \ \Rightarrow \ (\operatorname{arc\,cos} y)' \cdot (-\operatorname{sen} x) = 1$$

$$\Rightarrow \ (\operatorname{arc}\cos y)' = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in (-1,1)\,.$$

Por último, $(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

5. Funciones hiperbólicas.— Será un pequeño ejercicio ahora comprobar las fórmulas

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Sh} x)' &= \operatorname{Ch} x \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\\
(\operatorname{Ch} x)' &= \operatorname{Sh} x \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\\
(\operatorname{Th} x)' &= \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x} = 1 - \operatorname{Th}^2 x \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\\
(\operatorname{Arg}\operatorname{Sh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\\
(\operatorname{Arg}\operatorname{Ch} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \forall x > 1\,,\\
(\operatorname{Arg}\operatorname{Th} x)' &= \frac{1}{1-x^2} \quad \forall x \in (-1,1)\,.
\end{aligned}$$

6. Derivación logarítmica.— Para obtener una expresión para la derivada de funciones como las siguientes:

(a) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$,

(b) $f(x) = x^{2/3}\dfrac{1-x}{1+x^2}\operatorname{sen}^4 x \sec^3 x$,

(c) $f(x) = x^{x^x}$,

se hace lo siguiente: sea $y(x) = \ln|f(x)|$; entonces, $\big(y(x)\big)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, de donde $f'(x) = f(x)\big(y(x)\big)'$, y la derivada $\big(y(x)\big)'$ se puede calcular, usando las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio.– Sean $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\right\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (**polinomios de Legendre**). Probar que $\forall x \in \mathbb{R}$ se verifica la ecuación

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2x\,P_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0\,.$$

Sea $g(x) = (x^2-1)^n$. Una derivación logarítmica da

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2nx}{x^2-1} \implies (1-x^2)g'(x) + 2nx\,g(x) = 0\,.$$

De donde, derivando una vez, se obtiene

$$(1-x^2)g''(x) + 2(n-1)x\,g'(x) + 2n\,g(x) = 0\,.$$

Y derivando aquí n veces, usando la fórmula de Leibniz,

$$\begin{aligned}(1-x^2)g^{(n+2)}(x) - 2nx\, g^{(n+1)}(x) - n(n-1)g^{(n)}(x) \\ + 2(n-1)\left[x\, g^{(n+1)}(x) + n\, g^{(n)}(x)\right] + 2n\, g^{(n)}(x) \;=\; 0\,,\end{aligned}$$

que se simplifica a la forma propuesta, ya que $g^{(n)}(x) = P_n(x)$.

2.3 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Hasta ahora sólo tenemos una estimación cualitativa (es una o pequeña del error en la variable) del error concreto cometido en la aproximación lineal del valor de una función en el entorno de un punto donde es derivable. Por ejemplo, si nos piden una estimación del valor de $\sqrt[3]{8.012}$, podemos dar como respuesta 2.001, pensando en lo siguiente:

$$\begin{aligned}&f(x) \;=\; \sqrt[3]{x}\,; \quad f(8) \;=\; 2\,;\\ &f'(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,; \quad f'(8) \;=\; \frac{1}{12}\,;\\ &f(8+0.012) \;\approx\; f(8) + 0.012\cdot f'(8) \;=\; 2.001\,.\end{aligned}$$

Pero si nos piden además que estimemos el error cometido, tal vez no seamos capaces aún de responder. El resultado que titula esta sección, y que ocupa en ella un lugar central, va a dar una respuesta .

Extremos relativos. El teorema de Rolle

Definición. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto. Un punto $a \in I$ es un **máximo** (respectivamente un **mínimo**) **relativo** de f cuando $\exists\delta > 0$ tal que $f(a) \geq f(x)$ (respectivamente $f(a) \leq f(x)$) $\forall x \in B_\delta(a)$. En cualquier caso se habla de un **extremo relativo**.

Por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{|x|}$ tiene un mínimo relativo (que es también **absoluto**, es decir, el menor valor que alcanza la función en todo su dominio) en 0.

Los extremos relativos de una función derivable corresponden a puntos "estacionarios" de su gráfica, es decir, puntos donde la recta tangente es horizontal:

Proposición. Si a es un extremo relativo de f y $\exists f'(a)$, entonces $f'(a) = 0$.

Demostración. P or reducción al absurdo, si fuera por ejemplo $f'(a) > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;>\; 0 \quad \forall x \;\in\; (a-\delta, a+\delta)\,;$$

y entonces, si $x \in (a-\delta, a)$, será $f(x) < f(a)$; pero, si $x \in (a, a+\delta)$, será $f(x) > f(a)$. Luego a no es un extremo.

Ejemplo. Estudiar los extremos relativos de la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2(1+x)}{1-x}}$ en el intervalo $(-1,1)$.

Se tiene $f(x) = |x| \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, así que $f'(0)$ no existe. Pero $f(0) = 0 \le f(x)$ $\forall x \in (-1,1)$, luego 0 es un punto de mínimo relativo (y absoluto). Por cierto, que se tiene $f'_-(0) = -1$ y $f'_+(0) = 1$, estos valores hacen ver las pendientes de las "semitangentes" a la gráfica en el punto $(0,0)$.

Por otro lado, si $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{|x|}{(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{|x|}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{x}{(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} & \text{si } x > 0, \\ \dfrac{-x}{(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La condición necesaria de extremo, $f'(x) = 0$, conduce a la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, que tiene la solución negativa $x = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, que va a corresponder a un máximo relativo (la función es positiva en el intervalo $[-1,0]$ y vale 0 en ambos extremos; el valor máximo que la función alcance en ese intervalo, por la continuidad, se alcanzará en un punto interior. Este punto será un máximo relativo, además de absoluto, y de acuerdo con la proposición anterior la derivada en él será 0. Pero no hay más que un punto que anule la derivada, luego ése es el máximo).

Despu´es dela anterior explicación entre paréntesis nos sonará bastante la demostración del siguiente resultado:

Se puede leer (en ingl´es) un extracto del trabajo original de Michel Rolle concerniente a este resultado, donde se trata con ecuaciones polin´omicas y con un método formal para obtener lo que para nosotros es la derivada de un polinomio, en D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, Dover, New York, 1959, pp. 253–260. Ahí se dice que lleva su nombre desde 1846.

Teorema (M. Rolle, 1691). Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y se tiene $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración. Si $f(x) = f(a)$ $\forall x \in [a,b]$, entonces $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ y el resultado se cumple.

Si no, sean M y m los valores máximo y mínimo de la función f en el intervalo $[a,b]$, que según el teorema de Weierstrass se alcanzan en puntos del intervalo. Como suponemos que $m < M$, al menos uno de los dos no puede alcanzarse en a ni en b, donde el valor de la función es el mismo, luego $\exists c \in (a,b)$ tal que, por ejemplo, $f(c) = M \ge f(x)$ $\forall x \in (a,b)$; entonces c es un máximo relativo de f y f es derivable en c. Por la proposición anterior, es $f'(c) = 0$.

Ejemplo. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $f(x) = (x^2-1)^n$. Probar que el polinomio $P_n(x) = f^{(n)}(x)$ tiene exactamente n raíces distintas en el intervalo $(-1,1)$.

En primer lugar se ve que

$$f^{(k)}(x) = q_k(x)\,(x^2-1)^{n-k} \quad \text{para } k = 1,\ldots,n-1,$$

donde $q_k(x)$ es cierto polinomio de grado k, así que se tiene $f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0$ para $k = 1,\ldots,n-1$.

Concretamente, $f'(x) = 2nx\,(x^2-1)^{n-1}$, luego f' vale 0 en -1, 0 y 1; por Rolle, f'' tendrá al menos dos ceros distintos en $(-1,1)$. Entonces, por un proceso inductivo finito (f''' tendrá al menos tres ceros distintos, ..., $f^{(n-1)}$ tendrá al menos $n-1$ ceros distintos en $(-1,1)$), se llega a que $f^{(n)}$ debe tener al menos n ceros distintos en $(-1,1)$. Pero $f^{(n)}$ es un polinomio de grado n y como máximo tiene n ceros distintos. Luego tiene exactamente n ceros distintos.

El teorema del valor medio y sus consecuencias

Nos referiremos a veces en lo sucesivo al siguiente resultado como teorema del valor medio, (TVM), diferencial. La conclusión se puede utilizar en una forma aparentemente más local, del tipo

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\,f'(\xi), \quad \text{donde } \xi \text{ está entre } x_0 \text{ y } x_0+h,$$

cuando f verifica las hipótesis que ahora vamos a ver:

(TVM) Teorema (J. L. de Lagrange, 1797). Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demostración. Se aplica el teorema de Rolle a la función $\phi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

Ejemplo. Probar la desigualdad $\sqrt[3]{8+x} - 2 < \dfrac{x}{12}$ $\forall x > 0$.

Si se considera, como al principio de esta sección, la función $f(t) = \sqrt[3]{t}$ y se aplica (TVM) en el intervalo $[8, 8+x]$, se tiene

$$\sqrt[3]{8+x} - 2 = f(8+x) - f(8) = x\,f'(\xi) \quad \text{para algún } \xi \in [8, 8+x].$$

Pero $f'(\xi) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}} < \frac{1}{12}$ cuando $\xi > 8$.

En la siguiente proposición se ven unas consecuencias importantes de (TVM). En particular, (iv) dice que una función, aunque no sea continua, si es la derivada de otra función, entonces tiene la propiedad de los valores intermedios, (TVI). La (v) da una condición suficiente para los extremos relativos de una función dos veces derivable.

Proposición. Supongamos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

(i) Si $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$, entonces f es inyectiva en $[a,b]$. Además, f' debe tener el mismo signo en todo el intervalo abierto.

(ii) Si $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$, entonces f es constante en $[a,b]$. (Para $f = g-h$, de $g' = h'$ en (a,b) se deduciría $g(x) = C + h(x)$, con C independiente de x, o sea, constante, para todo $x \in [a,b]$.)

(iii) Si $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$, entonces f es estrictamente creciente en $[a,b]$. Y si $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$, entonces f es estrictamente decreciente en $[a,b]$.

(iv) ***(TVI) para una*** f'**.**— Sea $f(x)$ derivable en $[a,b]$. Suponiendo por ejemplo $f'(a) < f'(b)$, sea $c \in \left[f'(a), f'(b)\right]$. Entonces $\exists \xi \in (a,b)$ tal que $f'(\xi) = c$.

(v) ***Condición suficiente para un extremo relativo.***— Si $\exists f'(a) = 0$ y $\exists f''(a) > 0$, la función f tiene un mínimo relativo en el punto a. Si $\exists f'(a) = 0$ y $\exists f''(a) < 0$, la función f tiene un máximo relativo en a.

Demostración. (i) Sean $x, y \in [a,b]$ con $x < y$. Aplicando (TVM), $\exists \xi \in (x,y)$ tal que $f(y) - f(x) = (y-x)\, f'(\xi) \neq 0$, luego $f(y) \neq f(x)$ y f es inyectiva.

Entonces, por la continuidad en $[a,b]$, se deduce que f es estrictamente monótona en $[a,b]$, de donde a su vez también hemos visto ya que se sigue, por la definición de derivada, que o bien será $f'(x) \geq 0$ o bien $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (a,b)$. Pero f' nunca es cero en (a,b), luego o bien $f'(x) > 0$, o bien $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$.

(ii) Sea $x \in (a,b]$. Aplicando (TVM), $\exists \xi \in (a,x)$ tal que $f(x) - f(a) = (x-a)\, f'(\xi) = 0$, luego $f(x) = f(a)$.

(iii) Si $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$, sean $x, y \in [a,b]$ con $x < y$. Aplicando (TVM), $\exists \xi \in (x,y)$ tal que $f(y) - f(x) = (y-x)\, f'(\xi) > 0$, luego $f(y) > f(x)$ y f es estrictamente creciente en $[a,b]$.

(iv) Sea $g(x) = f(x) - cx$ para $x \in [a,b]$. Entonces g es derivable en $[a,b]$ y $g'(x) = f'(x) - c$, luego $g'(a) < 0 < g'(b)$. Entonces $\exists \xi \in (a,b)$ tal que $g'(\xi) = 0$, pues si no, por el mismo razonamiento que en la demostración de (i) se sigue que g' debe tener el mismo signo en todo el intervalo cerrado; pero $g'(a)\, g'(b) < 0$, absurdo.

(v) Por conservación local del signo del límite $f''(a) > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $f'(x) < f'(a) = 0$ si $x \in (a-\delta, a)$ y $f'(x) > f'(a) = 0$ si $x \in (a, a+\delta)$. Pero entonces, por (iii), f es decreciente en $[a-\delta, a]$ y creciente en $[a, a+\delta]$; luego a es un mínimo relativo.

Ejercicios

1.— Sea $f \in [0,1] \to [0,1]$ derivable y tal que $|f'(x)| \le k < 1\ \forall x \in [0,1]$. Entonces f tiene un único punto fijo en $[0,1]$.

Vimos en el tema anterior que f debe tener al menos un punto fijo, es decir, $\exists c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$. Si tuviera dos puntos fijos distintos, digamos $c_1 < c_2$, aplicando (TVM) en el intervalo $[c_1, c_2]$, resultaría que $\exists \xi \in [c_1, c_2]$ tal que $f'(\xi) = 1$, absurdo.

2.— Si $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = C\,e^x$ con C constante.

Consideremos la función $\phi(x) = f(x)\,e^{-x}$; se tiene

$$\big(f(x)\,e^{-x}\big)' \;=\; e^{-x}\,\big(f'(x) - f(x)\big) \;=\; 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

luego, por (ii) en cada intervalo acotado de $\mathbb{R}$, $f(x)\,e^{-x} = C$, con C independiente de x, y también independiente del intervalo.

3.— Sea $f(x) = e^{x^2}$. Encontrar una función $g(x)$ derivable en un intervalo (a,b) con $a > \frac{1}{2}$ para la cual se verifique $(fg)'(x) = f'(x)g'(x)$ para todo x.

Se deduce en primer lugar que será $(2x-1)g'(x) = 2x\,g(x)$ para todo x. Si suponemos $g(x) \neq 0$ para todo x y $x \neq \frac{1}{2}$, se sigue

$$\frac{g'(x)}{g(x)} \;=\; \frac{2x}{2x-1} \;=\; \frac{2x-1+1}{2x-1} \;=\; 1 + \frac{1}{2x-1}\,.$$

Pero $\dfrac{g'(x)}{g(x)} = \big(\ln|g(x)|\big)'$ y $1 + \dfrac{1}{2x-1} = \big(x + \frac{1}{2}\ln|2x-1|\big)'$; la igualdad entre estas derivadas da, aplicando (ii), para $x > \frac{1}{2}$,

$$\ln|g(x)| \;=\; x + \ln\sqrt{2x-1} + C \;=\; \ln\Big(e^x\sqrt{2x-1}\Big) + C\,.$$

Así, por ejemplo para $C = 0$ tenemos la solución $g(x) = e^x\sqrt{2x-1}$.

4.— Acotar las raíces reales de la ecuación $3x^4 + 56x^3 + 294x^2 + 432x - 385 = 0$.

5.— Hallar el valor mínimo de la función $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x-k|$.

6.— Dibujar la gráfica de la función $y = \dfrac{(x-1)^2(3x^2-2x-37)}{(x+5)^2(3x^2-14x-1)}$ (*Hardy*).

Derivación paramétrica e implícita

En la demostración de las dos proposiciones de este apartado también intervienen el (TVM) o alguna de sus consecuencias inmediatas de modo esencial.

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

Proposición 1 (Derivación paramétrica). Sean $X(t)$ e $Y(t)$ dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), y supongamos además que $X'(t)\neq 0$ $\forall t\in(a,b)$. Entonces, las ecuaciones paramétricas $\left\{\begin{array}{l} x=X(t)\\ y=Y(t)\end{array}\right.$ definen una función $y=\phi(x)$ que es derivable en $\big(X(a),X(b)\big)$ y se tiene $\phi'(x)=\dfrac{Y'(t)}{X'(t)}$.

Demostración. L a función $x=X(t)$ es continua y estrictamente monótona, luego tiene una inversa $t=X^{-1}(x)$ continua y derivable en cada punto de $\big(X(a),X(b)\big)$ según el teorema de la función inversa. Sea $\phi(x)=Y\left(X^{-1}(x)\right)=y$. Por la regla de la cadena,

$$\phi'(x)\;=\;Y'\left(X^{-1}(x)\right)\cdot\left(X^{-1}\right)'(x)\;=\;\frac{Y'(t)}{X'\left(X^{-1}(x)\right)}\;=\;\frac{Y'(t)}{X'(t)}\,.$$

Ejercicio. Consid´eese la curva que está definida por las ecuaciones paramétricas $\left\{\begin{array}{l} x=a\cos^3 t\\ y=a\,\mathrm{sen}^3 t\end{array}\right.$ donde $a>0$ y $0<t<\frac{\pi}{2}$ (un cuadrante de **astroide**). Probar que el segmento de una cualquiera de sus tangentes interceptado por los semiejes positivos de coordenadas tiene una longitud constante.

Sea $0<t_0<\frac{\pi}{2}$, y $(x_0,y_0)=\big(x(t_0),y(t_0)\big)$. Se tiene $y'(x_0)=-\operatorname{tg} t_0\ \ldots$ La longitud constante es a.

El segundo resultado requiere unas nociones teóricas previas que pertenecen al análisis de las funciones reales de dos variables, y que avanzamos a continuación. En la demostración seguimos el texto de PEDR ICK.

Definiciones. Sea $a\in\mathbb{R}^2=\{(x,y)\colon x,y\in\mathbb{R}\}$. La **bola abierta de centro a y radio** ρ es el conjunto $B_\rho(a)=\left\{(x,y)\colon x^2+y^2\leq\rho^2\right\}$. **Un conjunto** $A\subset\mathbb{R}^2$ **es abierto** si contiene una bola abierta de cada uno de sus puntos.

Sea $F\colon A\to\mathbb{R}$ una función definida en un abierto $A\subset\mathbb{R}^2$ en todo esto que sigue. Se dice que F **es continua en** $a=(x_0,y_0)$ cuando $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que

$$(x,y)\;\in\;B_\delta(a)\;\Longrightarrow\;|F(x,y)-F(x_0,y_0)|\;<\;\varepsilon\,.$$

Se verifica una propiedad de conservación local de signo análoga a la que se vio en el caso de funciones de una variable:

Propiedad. Si F es continua en $a \in A$ y $F(a) > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $F(x, y) > 0$ $\forall (x, y) \in B_\delta(a)$.

Las **derivadas parciales de** F, respecto de x y respecto de y, **en el punto** (x_0, y_0) son los valores de los límites siguientes, en caso de existir:

$$
\begin{aligned}
F_x(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h}\,, \\
F_y(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0, y_0 + h) - F(x_0, y_0)}{h}\,.
\end{aligned}
$$

Cuando existen F_x y F_y en todo punto de A y son continuas, se dice que F es de clase uno y se escribe $F \in \mathcal{C}^{(1)}(A)$.

Proposición 2 (Existencia y derivabilidad de una función implícita). Sean I y J intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, $A = I \times J$ y $F\colon A \to \mathbb{R}$ continua y tal que $\exists F_y(x, y)$ en A y es continua. Sea $(a, b) \in A$ tal que $F(a, b) = 0$ y $F_y(a, b) \neq 0$.

(i) Entonces existen $s > 0$ y $t > 0$ tales que

$$
\begin{aligned}
&\text{para cada } x \in (a - s, a + s) \\
&\text{hay un único } y \in (b - t, b + t) \quad \text{tal que } F(x, y) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Queda definida (**implícitamente**) así una función (real, de una variable) $f\colon (a - s, a + s) \to (b - t, b + t)$ tal que $y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0$.

(ii) Esta función f es continua en $(a - s, a + s)$.

(ii) Además, si $F \in \mathcal{C}^{(1)}(A)$, la función f es también de clase uno en su dominio, y se tiene $F_x(x, y) + F_y(x, y)\, f'(x) = 0$ (**derivación implícita**), es decir,

$$
f'(x) = -\frac{F_x\big(x, f(x)\big)}{F_y\big(x, f(x)\big)} \quad \forall x \in (x_0 - s, x_0 + s)\,.
$$

Demostración (i) Supongamos, por ejemplo, que $F_y(a, b) > 0$. Por ser F_y continua en (a, b), hay un cuadrado C de lados paralelos a los ejes, centrado en (a, b) y de lado, digamos, $2t$, con $t > 0$, tal que $F_y(x, y) > 0$ $\forall (x, y) \in C$.

En particular, $F_y(a, y) > 0$ $\forall y \in (b - t, b + t)$. Luego la función (de una variable) $F(a, y)$ es estrictamente creciente en el intervalo $(b - t, b + t)$, y, como $F(a, b) = 0$, se tendrán:

$$
\begin{aligned}
F(a, b - t) &< 0 \implies F(x, b - t) < 0 \ \forall x \in B_{\delta_1}(a)\,, \\
F(a, b + t) &> 0 \implies F(x, b + t) > 0 \ \forall x \in B_{\delta_2}(a)\,.
\end{aligned}
$$

Sea $s = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Y sea ahora $x_0 \in (a - s, a + s)$ cualquiera pero fijo. Aplicando el teorema de Bolzano a la función (de la variable y) $F(x_0, y)$ en el intervalo $[b-t, b+t]$, debe existir un $y_0 \in (b-t, b+t)$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Este y_0 es único, pues si hubiera otro $y_1 \neq y_0$, $y_1 \in (b-t, b+t)$ tal que $F(x_0, y_1) = 0$, por el teorema de Rolle sería $F_y(x_0, \eta) = 0$ para algún η entre y_1 e y_2. Pero esto es absurdo, porque $(x_0, \eta) \in C$ y $F_y(x, y) > 0\ \forall (x, y) \in C$.

Luego la relación $x_0 \mapsto y_0$ da una función $f : (a-s, a+s) \to (b-t, b+t)$.

(ii) Sea $x_0 \in (a-s, b+s)$, $f(x_0) = y_0$ y $\varepsilon > 0$. Como $F(x_0, y_0) = 0$, argumentando como en (i), $\exists \sigma > 0$ y $0 < \tau < \varepsilon$ tales que si $x \in [x_0-\sigma, x_0+\sigma]$, entonces $y = f(x) \in [y_0-\tau, y_0+\tau]$, luego $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(iii) Para cada $x_0 \in (a-s, b+s)$, sea $f(x_0) = y_0$ y sean $\sigma, \tau > 0$ como en (i). Si $|h| < \sigma$, se tiene $f(x_0+h) = y_0 + k$ con $|k| < \tau$. Aplicando (TVM) dos veces,

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_0+h, y_0+k) - F(x_0, y_0) \\ &= F(x_0+h, y_0+k) - F(x_0+h, y_0) + F(x_0+h, y_0) - F(x_0, y_0) \\ &= k \cdot F_y(x_0+h, \eta) + h \cdot F_x(\xi, y_0), \end{aligned}$$

donde η está entre y_0 e $y_0 + k$, y ξ entre x_0 y $x_0 + h$. De donde sale, ya que $F_y \neq 0$ en el dominio involucrado,

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{F_x(\xi, y_0)}{F_y(x_0+h, \eta)};$$

y calculando el límite cuando $h \to 0$, usando que F_x y F_y son continuas en (x_0, y_0), resulta que f es derivable en x_0, y que

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

La función f', finalmente, es continua en $[a-s, a+s]$ por ser un cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero.

Ejercicio. Sea $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ la ecuación de una **cónica**. ¿Cuál es la condición que se debe cumplir para que esta ecuación defina implícitamente $y(x)$ en el entorno de un punto (x_0, y_0)? Probar que la ecuación de la tangente a la cónica en el punto (x_0, y_0) es la recta de ecuación

$$Ax_0x + B(x_0y + y_0x) + Cy_0y + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0.$$

La regla de L'Hôpital

Muchas de las ideas del cálculo diferencial de Leibniz se hicieron públicas en el *Analyse des infiniment petits*, París, 1696, de Guillaume F. A. de l'Hôpital (1661–1701), noble francés que fue matemático aficionado. En esta obra aparece por primera vez la regla para los límites del tipo $\frac{0}{0}$, cuya autoría fue reclamada por el matemático suizo Johann Bernoulli en 1704.

La argumentación de la "demostración" original es muy sencilla, y consiste esencialmente en lo siguiente:

Si $u(a) = v(a) = 0$, siendo $u(x)$ y $v(x)$ dos cantidades "diferenciables" dependientes de la variable x, entonces el valor $y(a)$ del cociente $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ cuando $x - a$ se hace infinitamente pequeño es igual al valor para $x = a$ del cociente de los diferenciales de u y v, pues

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u(x) - u(a)}{v(x) - v(a)},$$

y, cuando $x-a$ es infinitamente pequeño, $u(x)-u(a) = du$ y $v(x)-v(a) = dv$.

El primer ejemplo que da L'Hôpital es el siguiente:

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} = \left. \frac{\frac{a^3\,dx - 2x^3\,dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{a^2\,dx}{3\sqrt[3]{ax^2}}}{-\frac{3a\,dx}{4\sqrt[4]{a^3x}}} \right|_{x=a} = \frac{-\frac{4}{3}a\,dx}{-\frac{3}{4}\,dx} = \frac{16}{9}a\,.$$

Una demostración satisfactoria para el rigor moderno puede darse a partir del siguiente resultado previo:

(TVMC) Teorema del valor medio de Cauchy. Si $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ son dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(c)\big(f(b) - f(a)\big)$.

Demostración. Se aplica el teorema de Rolle a la función $\phi(x) = f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\big(f(b) - f(a)\big)$.

Además, si $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$, por (TVM) se tiene que $g(a) \neq g(b)$, y la conclusión se puede escribir en la forma

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

El enunciado de la regla puede ser más general que el original, cubriendo también el caso indeterminado $\frac{\infty}{\infty}$:

(L'H) Regla de L'Hôpital. Sea I un intervalo abierto con un extremo en a, donde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supongamos que $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ son dos funciones derivables en I, que $g'(x) \neq 0\ \forall x \in I$ (luego podemos considerar, como ya hemos visto, que también es $g(x) \neq 0\ \forall x \in I$) y que existe el siguiente límite (lateral, de acuerdo con la hipótesis):

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Supongamos que además, o bien

- (i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, o bien
- (ii) $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$.

Entonces, también existe el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Demostración. Veamos sólo el caso (i) con $a \in \mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$. Sea $\varepsilon > 0$; $\exists\delta > 0$ tal que, si $0 < x - a < \delta$, entonces $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon$.

Pero, para cada x verificando $0 < x - a < \delta$, se aplica (TVMC) en el intervalo $[a, x]$, y se tiene

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad c \in (a, x).$$

Y entonces, como $0 < c - a < \delta$, resulta

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - l\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| < \varepsilon.$$

Ejercicios.— Hallar los límites

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-2)e^{2x} + (x+2)e^x}{(e^x - 1)^3}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}\right)^{1/x^2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{1/\ln x}$.

NOTAS — ***1. Contraejemplo de Stolz.*** Para las funciones $f(x) = x + \operatorname{sen} x \cos x$, $g(x) = e^{\operatorname{sen} x} f(x)$, se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0, \quad \text{y no existe el} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ocurriendo aquí que $g'(x)$ es 0 (cuando $\cos x = 0$) en todo entorno de ∞.

2. Para las funciones $f(x) = x - \operatorname{sen} x$, y $g(x) = x + \operatorname{sen} x$, se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \quad \text{y no existe el} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\boxed{¿f'_+(a) = f'(a^+)?}$

3. Proposición. Si f es continua en a, derivable en un entorno reducido $B^*_\delta(a)$ y $\exists \lim\limits_{x\to a} f'(x) = l$, entonces $\exists f'(a) = l$.

Demostración. Como f es continua en a, $\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Se puede entonces aplicar (L'H) al límite que define $f'(a)$:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{1} = l\,.$$

El error en el método de Simpson

El método de Simpson es uno de los métodos elementales para el cálculo aproximado de integrales definidas. Las nociones de cálculo integral que se requieren aquí son básicas y podemos suponer que el estudiante las conoce ya en este momento por cursos anteriores. La más avanzada es el **teorema fundamental del cálculo** que dice que, si f es continua en $[a,b]$, la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable y $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$.

Los dos primeros apartados de la proposición que sigue constituyen el enunciado de un problema propuesto (pág. 191, n°10) en el libro *Fundamentos de análisis moderno*, Reverté, 1975, de J. DIEUDONNÉ.

Proposición. (a) Si g es una función real impar, definida y cinco veces derivable en un entorno simétrico I de 0 en $\mathbb{R}$, entonces, para cada $x \in I$ se tiene

$$g(x) = \frac{x}{3}\big(g'(x) + 2\,g'(0)\big) - \frac{x^5}{180} g^{(v)}(\xi)\,,$$

donde ξ es un punto del intervalo abierto de extremos 0 y x.

(b) Si f es una función real, definida y cinco veces derivable en el intervalo $[a,b]$, entonces se tiene

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4\,f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(v)}(\xi)\,,$$

donde $\xi \in (a,b)$.

(c) Sea f una función real, definida y cuatro veces derivable en el intervalo $[a,b]$. Para $n \in \mathbb{N}$, sean $x_0 = a$, $x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{2n}$ con $k = 1, 2, \ldots, 2n$ los puntos que dividen el intervalo $[a,b]$ en $2n$ subintervalos de la misma longitud. Pongamos $y_k = f(x_k)$ para cada k. Entonces $\exists \xi \in (a,b)$ tal que **(fómula de Simpson)**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\}$$
$$- \frac{(b-a)^5}{2880\,n^4} f^{(iv)}(\xi)\,.$$

Demostración. (a) En primer lugar, por la imparidad de g se tendrá $g(0) = g''(0) = g^{(iv)}(0) = 0$, como se comprobará fácilmente.

Consideremos las funciones auxiliares $\phi(x) = g(x) - \frac{x}{3}\big(g'(x) + 2\,g'(0)\big)$ y $\psi(x) = x^5$. Se tiene $\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(0) = 0$, $\phi'''(x) = -\frac{x}{3} g^{(iv)}(x)$; y también $\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = 0$, $\psi'''(x) = 60\,x^2$. Sea $x > 0$ en I. Aplicando tres veces seguidas (TVMC) tendremos

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)} = \frac{\phi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\phi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} = \frac{\phi'''(\xi_3)}{\psi'''(\xi_3)} = -\frac{1}{180} \cdot \frac{g^{(iv)}(\xi_3)}{\xi_3},$$

donde, sucesivamente, $\xi_1 \in (0, x)$, $\xi_2 \in (0, \xi_1)$, $\xi_3 \in (0, \xi_2)$. Finalmente, por (TVM) se tiene, dado que $g^{(iv)}(0) = 0$:

$$\frac{g^{(iv)}(\xi_3)}{\xi_3} = g^{(v)}(\xi),$$

con $\xi \in (0, \xi_3)$, y hemos terminado.

(b) Sea $F(t) = f\left(t + \frac{a+b}{2}\right)$, definida para $t \in \left[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$, y $G(x) = \frac{F(x)-F(-x)}{2}$; la función G cumple entonces las hipótesis del apartado (a), y, por consiguiente, para cada $x > 0$ $\exists \xi \in (0, x)$ tal que

$$G(x) = \frac{x}{3}\big(G'(x) + 2\,G'(0)\big) - \frac{x^5}{180} G^{(v)}(\xi).$$

En particular, para $x = \frac{b-a}{2}$, $\exists z \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$ tal que (sustituyendo y operando)

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4\,f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} G^{(v)}(z).$$

Pero $G^{(v)}(z) = \dfrac{F^{(v)}(z) + F^{(v)}(-z)}{2}$, y este es un valor intermedio (la media aritmética) entre $F^{(v)}(z)$ y $F^{(v)}(-z)$. Por el (TVI) para una derivada, $\exists \xi_1 \in (-z, z)$ tal que

$$\frac{F^{(v)}(z) + F^{(v)}(-z)}{2} = F^{(v)}(\xi_1);$$

finalmente, $F^{(v)}(\xi_1) = f^{(v)}(\xi)$ con $\xi \in (a, b)$.

(c) Aplicando el resultado del apartado (b) a la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ sucesivamente en cada uno de los subintervalos $[a, x_2]$, $\ldots$, $[x_{2n-2}, b]$, y sumando, resultará

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\}$$
$$- \frac{(b-a)^5}{2880\,n^4}\left\{\frac{f^{(iv)}(\xi_1) + \ldots + f^{(iv)}(\xi_n)}{n}\right\},$$

con $\xi_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}]$. Pero la última fracción entre llaves es un valor intermedio entre el mayor y el menor de los valores $f(\xi_k)$, luego por el (TVI) para una derivada, $\exists \xi \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f^{(iv)}(\xi_1) + \ldots + f^{(iv)}(\xi_n)}{n} = f^{(iv)}(\xi).$$

2.4 LA FÓRMULA DE TAYLOR

En esta última sección estudiaremos la aproximación polinómica local de las funciones derivables, y algunas aplicaciones. La dio por primera vez Brook Taylor (1685–1731), en su *Methodus incrementorum directa & inversa*, Londres, 1715. El primer estudio riguroso del error se debe a Cauchy.

Polinomios de Taylor. Resto de Lagrange

Teorema 1. (Fórmula de Taylor). Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y f una función $n+1$ veces derivable en I. Para cada par de puntos a y x de I existe un ξ perteneciente al intervalo abierto de extremos a y x tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\,f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}\,f'''(a) + \ldots \\ &\quad + \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi). \end{aligned}$$

Así, $f(x) = T_n f(x; a) + R_n f(x; a)$, donde $T_n f(x; a)$ es el **polinomio de Taylor de grado n de $f(x)$ en torno al punto a**, y $R_n f(x; a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi)$ es el **resto n–ésimo en la *forma de Lagrange (1797)***.

Demostración. En lo que sigue, x y a se consideran fijos. Supongamos, por ejemplo, $a < x$. Si se consideran las funciones auxiliares, definidas en el intervalo $[a, x]$:

$$\phi(t) = f(x) - f(t) - (x-t)\,f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2}\,f''(t) - \ldots - \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n)}(t)$$

y

$$\psi(t) = (x-t)^{n+1},$$

se tiene $\phi(x) = \psi(x) = 0$. Aplicando (TVMC), $\exists \xi \in (a, x)$ tal que

$$\frac{\phi(a)}{\psi(a)} = \frac{\phi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

luego $\phi(a) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi)$.

Suerte con los números:

... En la sala de estar, unos de matemáticas hablaban del desarrollo en serie de e^x, en el que cada término se obtiene multiplicando por x el precedente, y dividiendo por el siguiente número natural ... Al oir a aquellos tíos murmuré algo sobre lo fácil que era calcular cualquier potencia de e con esa serie ... "Ah, ¿sí?", —me dijeron—. "Bueno, pues entonces, ¿cuánto es e elevado a 3.3?" dijo un guasón, me parece que fue Tukey. Respondo: "Es muy fácil, son 27.11". ... "Eh, ¿cómo lo has hecho?" ... "Se está largando un carrete, ya conocéis a Feynmann. Seguro que no da eso". ... Se van a buscar una tabla, y mientras tanto voy yo y añado unas cuántas cifras más: "27.1126", les digo. Consultan el valor en la tabla. "Es correcto, pero ¿cómo diablos lo has hecho?" —"pues sumando la serie" ...

Cita de R. Feynmann, en ¿Está usted de broma, Mr. Feynmann? Alianza ed.

Notas y ejemplos

1. *Fórmula de Maclaurin.*— Se llama así la fórmula de Taylor cuando $0 \in I$ y se toma $a = 0$ (Colin Maclaurin (1698-1746), en *A Treatise of Fluxions*, Edimburgo, 1742). Escribimos a continuación algunas fórmulas de Maclaurin donde al resto de Lagrange se le ha dado la forma $R_n f(x;0) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$, con $\theta \in (0,1)$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \ x \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(\theta x), \ x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x), \ x \in \mathbb{R}.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \ x > -1.$$

$$(1+x)^r = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \ldots + \binom{r}{n} x^n + \binom{r}{n+1} x^{n+1} (1+\theta x)^{r-n-1}, \ x > -1.$$

La última vale para todo $r \in \mathbb{R}$, definido el coeficiente binómico $\dbinom{r}{k} = \dfrac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, $\dbinom{1/2}{3} = \dfrac{1}{16}$. Hemos utilizado arriba las siguientes expresiones para las correspondientes derivadas n–ésimas:

$$\begin{aligned} (e^x)^{(n)} &= e^x; \quad (\operatorname{sen} x)^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right); \\ (\cos x)^{(n)} &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right); \quad \big(\ln(1+x)\big)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}; \\ \big((1+x)^r\big)^{(n)} &= r(r-1)\cdots(r-n+1)(1+x)^{r-n}. \end{aligned}$$

2. *Series de Taylor y Maclaurin.*— Cuando una función f es de clase $\mathcal{C}^{(\infty)}$ en un intervalo I, existen los polinomios de Taylor de cualquier grado centrados en un punto cualquiera $a \in I$. Se plantea entonces el problema de la **representación de la función por su serie de Taylor**, es decir, la validez (convergencia de la **serie de Taylor** al valor de la función) de la expresión

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

para todo $x \in I$. En caso afirmativo, la función f se llama **analítica en** I. Por ejemplo, las series de Maclaurin de las funciones e^x, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ representan a estas funciones en todo $\mathbb{R}$ y las de $\ln(1+x)$ y $(1+x)^r$ en el intervalo $(-1,1)$.

En cambio (***contraejemplo de Cauchy***), la función

$$f(x) \;=\; \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,, \end{cases}$$

es de clase $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ y se tiene $f^{(n)}(0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, de manera que la serie de Maclaurin es idénticamente nula y en cambio $f(x) \neq 0$ si $x \neq 0$, luego la serie sólo representa a la función en el origen. ↩ *Un ejercicio*

En la página 254 del libro de E. Hairer y G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer-Verlag, 1995, se puede encontrar el ejemplo de una función de clase infinito en $\mathbb{R}$ cuya serie de Taylor diverge para todo $x \neq 0$.

3. Otras formas no integrales del resto.— Con adecuadas funciones auxiliares en una demostración del tipo de la hecha para el ***teorema 1***, se puede obtener para el resto n–ésimo de la fórmula de Taylor la forma ↩ *Otro ejercicio*

$$R_n f(x;a) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{s \cdot n!}(x-a)^s (x-\xi)^{n+1-s}\,,$$

donde $\xi \in (a,x)$ y $s > 1$ es un número arbitrario. Ésta es la ***forma de Schlömilch***. Para $s = 1$, es decir,

$$R_n f(x;a) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)\,(x-\xi)^n\,,$$

donde $\xi \in (a,x)$, se llama ***forma de Cauchy***.

El resto integral de Cauchy

En la siguiente proposición el resto de la fórmula de Taylor aparece en forma de una integral, y puede conducir a estimaciones numéricas sencillas del error cometido al aproximar una función por su polinomio n–ésimo de Taylor. Nuevamente aquí estamos adelantando alguna cosa que veremos con rigor en el tema siguiente.

Proposición (Cauchy, 1821). Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y f una función de clase $n+1$ en I. Para cada par de puntos a y x de I se tiene

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; & f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\,f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a) \\ & + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

Demostración. Por inducción, para $n = 0$ es cierto, pues

$$R_0 f(x;a) \;=\; f(x) - f(a) \;=\; \int_a^x f'(t)\,dt$$

no es más que el teorema fundamental del cálculo.

Supuesto cierto para $n-1$, es decir,

$$\begin{aligned} R_{n-1}f(x;a) &= f(x)-f(a)-(x-a)\,f'(a)-\ldots-\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n-1)}(a) \\ &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n)}(t)\,dt\,, \end{aligned}$$

resulta, si se hace esta integral **por partes**, tomando $u(t)=f^{(n)}(t)$ y $v'(t)=\dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$,

$$R_{n-1}f(x;a) = \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a)+\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Pero, dada la notación que estamos usando, es

$$R_{n-1}f(x;a) = \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a)+R_nf(x;a)\,;$$

Luego $R_nf(x;a)=\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt$, y es cierto para n.

Desarrollos polinómicos limitados

En algunas aplicaciones, como el cálculo de ciertos límites, o de ciertas integrales, se pueden utilizar los desarrollos de Taylor bastando una estimación cualitativa del error. Recordemos que se escribe $f(x)=o\big(g(x)\big)$ en un entorno de 0 cuando $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

Definición. Sea $f(x)$ una función real definida en un intervalo abierto $I\subset\mathbb{R}$. El polinomio $p_n(x)$ de grado $n\in\mathbb{N}$ es **el desarrollo limitado de orden n de f en torno al punto $a\in I$** si

$$f(x) = p_n(x)+o\big((x-a)^n\big)\,,\ \text{es decir, si}\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^n} = 0\,.$$

Tal desarrollo, cuando existe, es único, pues si hubiera dos desarrollos de orden n, digamos p_n y q_n, para la misma función f, la diferencia $p_n(x)-q_n(x)$ debería ser una $o\big((x-a)^n\big)$, pero al ser un polinomio de grado menor o igual que n en $(x-a)$, esto es imposible.

Teorema 2. (Fórmula de Young). Sea $f\colon I\to\mathbb{R}$ una función $n-1$ veces derivable en el intervalo I y tal que $\exists f^{(n)}(a)$, para $a\in I$. Entonces,

$$f(x) = T_nf(x;a)+o\big((x-a)^n\big)\,,$$

es decir, el polinomio de Taylor de grado n es el desarrollo limitado de orden n de una función que verifique estas hipótesis.

Demostración. Sea $R(x) = f(x) - T_n f(x;a)$; esta función es $n-1$ veces derivable en I y $\exists R^{(n)}(a)$; se tiene $R(a) = R'(a) = \cdots = R^{(n)}(a) = 0$. Aplicando $n-1$ veces seguidas (L'H) y finalmente la definición de $R^{(n)}(a)$, se tiene:

$$\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\cdots 2\,(x-a)} = \frac{R^{(n)}(a)}{n!} = 0\,.$$

NOTAS ***1.***— Si una función admite desarrollo limitado de orden n en torno al punto a es derivable $n-1$ veces en a; pero no tiene por qu´e exıstir el polinomio de Taylor de grado n centrado en dicho punto. Por ejemplo, para la función

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3\, d(x)\,, \text{ con } d(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

se tiene $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ en torno al 0, pero no existe $f''(0)$.

2.— El error $f(x) - T_n f(x;a)$ puede ser en ocasiones una $o\big((x-a)^m\big)$ con $m > n$, por ejemplo $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

3.— Escribíamos $f \sim l\phi$, cuando $x \to a$, si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\phi(x)} = l \neq 0$. Para $x \to 0$ las funciones x, x^2, x^3, ... forman una escala en la que cada miembro tiende a 0 más rápidamente que el precedente, ya que $x^{n+1} = o(x^n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Parece entonces natural usarla para medir el "orden de pequeñez" de una función que tiende a 0 con x. Así, si $f(x) \sim l\,x^m$ con $l \neq 0$ cuando $x \to 0$ decimos que $f(x)$ es un **infinitésimo de orden** m.

Pero la escala no es completa. Ni siquiera admitiendo órdenes fraccionarios e irracionales, ya que, por ejemplo, de $\sqrt{x}$ debiéramos decir que tiene orden $\frac{1}{2}$, y de $\sqrt{x} - \sqrt{\operatorname{sen} x}$ que tiene orden $\frac{5}{2}$. Pues, por ejemplo, $f(x) = x \log x = o(x^r)\ \forall r < 1$ cuando $x \to 0^+$, pero $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x^r} = \infty\ \forall r > 1$.

Cálculo de/con desarrollos limitados

En las proposiciones que siguen supondremos que las funciones que aparecen están definidas en intervalos abiertos convenientes, y que $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1. Si las funciones f y g admiten como desarrollos limitados de orden n en torno a un punto a los polinomios p_n y q_n respectivamente, entonces:

(i) SUMAS. El desarrollo limitado de orden n de $\lambda f + \mu g$ es $\lambda p_n + \mu q_n$.

(ii) Productos. El desarrollo limitado de orden n de fg es el polinomio obtenido por la truncación a grado n (es decir, supresión de los términos de grado mayor que n) del producto $p_n q_n$.

(iii) Cocientes. Suponiendo $g(a) \neq 0$, el desarrollo limitado de orden n de f/g es el cociente s_n de grado n de la (falsa) división de p_n entre q_n ordenados en potencias crecientes de $h = x - a$, es decir, el polinomio s_n (desarrollo limitado de orden n del cociente p_n/q_n) tal que

$$\frac{p_n(h)}{q_n(h)} = s_n(h) + \frac{r(h)}{q_n(h)} = s_n(h) + o(h^n),$$

donde el grado del (falso) resto $r(h)$ es al menos $n+1$.

Demostración. (iii) Pues se tiene, ya que $g(a) \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(h)}{g(h)} - s_n(h) &= \frac{f(h)}{g(h)} - \frac{p_n(h)}{q_n(h)} + \frac{p_n(h)}{q_n(h)} - s_n(h) = \frac{f(h)}{g(h)} - \frac{p_n(h)}{q_n(h)} + o(h^n) \\
&= \frac{q_n f - p_n g}{q_n g} + o(h^n) = \frac{q_n f - q_n p_n + q_n p_n - p_n g}{q_n g} + o(h^n) \\
&= \frac{1}{g(h)}(f - p_n) + \frac{p_n}{q_n g(h)}(q_n - g) + o(h^n) \\
&= o(h^n) + \big(s_n + o(h^n)\big)o(h^n) + o(h^n) = o(h^n).
\end{aligned}$$

Proposición 2. Composición. Si $f(x) = p_n(x) + o\big((x-a)^n\big)$ y $g(y) = q_n(y) + o\big((y-b)^n\big)$ donde $b = f(a)$, entonces

$$g\big(f(x)\big) = \Big[q_n\big(p_n(x)\big)\Big]_n + o\big((x-a)^n\big),$$

donde el primer término a la derecha se entiende que es la truncación a grado n de la composición $q_n \circ p_n$.

Demostración. Supongamos que

$$\begin{aligned}
f(x) &= b + \sum_{k=1}^{n} b_k (x-a)^k + (x-a)^n e_1(x), \\
g(y) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (y-b)^k + (y-b)^n e_2(y),
\end{aligned}$$

donde $e_1(x) \to 0$ cuando $x \to a$ y $e_2(y) \to 0$ cuando $y \to b$. Entonces,

$$g\big(f(x)\big) = \sum_{k=0}^{n} a_k \big(f(x) - b\big)^k + \big(f(x) - b\big)^n e_2\big(f(x)\big).$$

El último sumando es una $o\big((x-a)^n\big)$, pues

$$\lim_{x\to a}\frac{\big(f(x)-b\big)^n e_2\big(f(x)\big)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{\left\{\sum_{k=1}^n b_k(x-a)^k+(x-a)^n e_1(x)\right\}^n e_2\big(f(x)\big)}{(x-a)^n}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{\sum_{k=1}^n b_k(x-a)^{k-1}+(x-a)^{n-1}e_1(x)\right\}^n e_2\big(f(x)\big)=b_1\cdot 0=0\,,$$

pues al ser f continua en a , cuando $x\to a$ se tiene $f(x)\to f(a)=b$. Entonces,

$$\begin{aligned} g\big(f(x)\big) &= \sum_{k=0}^n a_k\big(f(x)-b\big)^k+o\big((x-a)^n\big)\\ &= \sum_{k=0}^n a_k\left[\left(\sum_{j=1}^n b_j(x-a)^j\right)^k\right]_n+o\big((x-a)^n\big)\\ &= \Big[q_n\big(p_n(x)\big)\Big]_n+o\big((x-a)^n\big)\,. \end{aligned}$$

Proposición 3. PRIMITIVAS. Si $f(x)=p_n(x)+o\big((x-a)^n\big)$ y $g(x)$ es **una primitiva de** $f(x)$ **en** I, es decir, $g'(x)=f(x)\ \forall x\in I$, entonces $g(x)=q_{n+1}(x)+o\big((x-a)^{n+1}\big)$, siendo q_{n+1} el (único) polinomio tal que $q'_{n+1}=p_n$ y $q_{n+1}(a)=g(a)$.

Demostración. U na vez determinado el polinomio q_{n+1} por las condiciones del enunciado, el siguiente límite se puede calcular por la regla (L'H):

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-q_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p_n(x)}{(n+1)(x-a)^n}=0\,,$$

por hipótesis.

Ejemplos

1.— Desarrollos limitados de sumas:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sh}x &= \frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}^n\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)\,,\\ \operatorname{Ch}x &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}^n\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)\,,\\ \operatorname{sen}^2 x &= \sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+o\left(x^{2n+1}\right)\,,\\ \frac{x}{x^2-3x+2} &= \sum_{k=0}^n\left(1-\frac{1}{2^k}\right)x^k+o\left(x^n\right)\,. \end{aligned}$$

2.— Desarrollos limitados de productos:

$$\operatorname{sen}^2 x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2n+1}\right) ,$$

$$\operatorname{Ch} x \cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{4^{k}}{(4k)!} x^{4k} + o\left(x^{4n+3}\right) .$$

3.— Obtener los siguientes desarrollos limitados de cocientes por falsa división o por el método de coeficientes indeterminados:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 + \frac{1}{6} x^2 + \frac{7}{360} x^4 + \frac{31}{15120} x^6 + o\left(x^7\right) ,$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + o\left(x^{10}\right) .$$

4.— Obtener los siguientes desarrollos limitados:

$$e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}\right) + o\left(x^4\right) ,$$

$$e^{e^x} = e\left(1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{15}{24}x^4\right) + o\left(x^4\right) ,$$

$$e^{x/(1-x)} = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 + \frac{73}{24}x^4 + o\left(x^4\right) .$$

5.— Desarrollos limitados de primitivas:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right) ,$$

$$\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right) .$$

6.— Cálculo de límites por sustitución de desarrollos limitados:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen}^2 x}{x^6} = \frac{1}{18} ,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{arc\,tg} x) - \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,sen} x} = 1 . \qquad (\text{Arnol'd.})$$

7.— Sea $y(x) = e^{\operatorname{arc\,sen} x}$. Probar que para $n = 0, 1, \ldots$ se verifica

$$(1-x^2)y^{(n+2)}(x) - (2n+1)x\,y^{(n+1)}(x) - (n^2+1)y^{(n)}(x) = 0 .$$

A partir de ello, y usando la fórmula de Taylor, generalizar el desarrollo limitado

$$e^{\operatorname{arc\,sen} x} = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{5}{24} x^4 + \frac{1}{6} x^5 + \frac{17}{144} x^6 + o\left(x^6\right) .$$

Ejercicios suplementarios

1. Los números de Bernoulli y de Euler. (a) Consideremos la función $\varphi(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ (la discontinuidad en 0 se evita tomando $\varphi(0) = 1$). Propongamos un desarrollo en potencias de x con coeficientes indeterminados, en la forma

$$\varphi(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, x^n .$$

Los B_n se llaman **números de Bernoulli** [1]. Se tiene $B_0 = 1$. Se puede comprobar que $\varphi(x) + \dfrac{x}{2}$ es una función par, lo cual implica que $B_1 = -\frac{1}{2}$ y $B_{2k+1} = 0 \quad \forall k \geq 1$.

Identificando los coeficientes de x^{n+1} $(n \geq 1)$ en la igualdad

$$\begin{aligned} x \;&=\; (e^x - 1)\varphi(x) \\ &=\; \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)\left(\frac{B_0}{0!} + \frac{B_1\, x}{1!} + \frac{B_2\, x^2}{2!} + \frac{B_3\, x^3}{3!} + \dots\right), \end{aligned}$$

resulta

$$\frac{B_0}{(n+1)!\,0!} + \frac{B_1}{n!\,1!} + \frac{B_2}{(n-1)!\,2!} + \dots + \frac{B_n}{1!\,n!} \;=\; 0\,,$$

y multiplicando por $(n+1)!$,

$$B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \binom{n+1}{2} B_2 + \dots + \binom{n+1}{n} B_n \;=\; 0\,,$$

ley de recurrencia que se puede escribir en la forma

$$\boxed{(1+B)^{(n+1)} = B_{n+1}}$$

si se adopta el convenio de sustituir cada potencia simbólica $B^{(k)}$ por el número B_k al desarrollar la potencia $(1+B)^{(n+1)}$ con la fórmula usual del binomio de Newton.

[1] La fórmula que da nombre a estos números es la que dio Jakob Bernoulli (1654–1705) en su obra póstuma *Ars Conjectandi*, Basilea, 1713, para obtener la suma de las c–ésimas potencias de los números naturales, y que lo y se escribe así:

$$\sum_{j=1}^{n-1} j^c = \frac{1}{c+1} \sum_{k=0}^{c} \binom{c+1}{k} B_k\, n^{c+1-k} .$$

Con ella, en menos de siete minutos y medio podía encontrar su autor que la suma de las mil primeras potencias décimas es

91.409.924.241.424.243.424.241.924.242.500.

Esta ley determina de manera única los B_n a partir de los valores $B_0 = 1$ y $B_1 = -\frac{1}{2}$. Sucesivamente resultan cero los B_3 , B_5 , B_7 , etc., comprobándose lo que ya se ha probado arriba, y

$$B_2 = \frac{1}{6}\,;\ B_4 = -\frac{1}{30}\,;\ B_6 = \frac{1}{42}\,;\ B_8 = -\frac{1}{30}\,;\ B_{10} = \frac{5}{66}\,;\ B_{12} = -\frac{691}{2730}\,;\ B_{14} = \frac{7}{6}\,;\ \ldots$$

(b) La función $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ es par, luego su desarrollo en potencias de x solamente tiene términos con potencias pares. Si se propone un desarrollo de la forma

$$\sec x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!}\, x^{2n}\,,$$

los E_{2n} se llaman **números de Euler**. Se tiene $E_0 = 1$, y, para $n \geq 1$ se verifica la ley de recurrencia (se obtiene identificando los coeficientes de x^{2n} en $1 = \cos x \sec x$)

$$E_0 + \binom{2n}{2} E_2 + \binom{2n}{4} E_4 + \ldots + \binom{2n}{2n} E_{2n} \;=\; 0\,.$$

A partir se ella se calculan, sucesivamente,

$$E_2 = -1\,;\ E_4 = 5\,;\ E_6 = -61\,;\ E_8 = 1385\,;\ E_{10} = -50521\,;\ E_{12} = 2702765\,;\ \ldots$$

2. El desarrollo de la longitud de una elipse en potencias de la excentricidad. La longitud de una elipse de semieje mayor a no es una función elemental de la excentricidad ε $(0 < \varepsilon < 1)$. Como un ejercicio del siguiente tema se puede obtener la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} L(a;\varepsilon) = 2\pi a \Bigg(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}\varepsilon^4 - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\varepsilon^6 - \ldots \\ - \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-3)^2\,(2n-1)}{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}\varepsilon^{2n} \Bigg) + o\left(\varepsilon^{2n}\right)\,. \end{aligned}$$

3. La derivada n–ésima de e^{ax^2}. Los polinomios de Hermite. Aquí seguiremos a J. REY PASTOR, en su *Teoría de funciones*, Madrid, pág. 17 4.

Sea $F(x) = e^{ax^2}$. La derivada j–ésima de $F(x)$ aparece en el coeficiente de h^j en el desarrollo de Taylor

$$F(x+h) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{F^{(j)}(x)}{j!}\, h^j\,.$$

Si encontramos de alguna manera este desarrollo tendremos en particular la expresión de la derivada que queremos.

En primer lugar, $F(x+h) = e^{a(x+h)^2} = e^{ax^2}\, e^{ah(2x+h)}$, y haciendo un desarrollo de Maclaurin,

$$
\begin{aligned}
e^{ah(2x+h)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k\, h^k\, (2x+h)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} h^{k+l}\, (2x)^{k-l} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \left(\sum_{j=k}^{2k} \binom{k}{j-k} h^j\, (2x)^{2k-j} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} h^j \left(\sum_{k=\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor}^{j} \binom{k}{j-k} \frac{a^k}{k!}\, (2x)^{2k-j} \right),
\end{aligned}
$$

donde, sucesivamente, se ha aplicado la fórmula del binomio de Newton, un cambio de índice $j = k + l$ y al final, un intercambio del orden de sumación. Ahora ya tenemos que

$$
F^{(j)}(x) \;=\; j!\, e^{ax^2} \sum_{k=\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor}^{j} \binom{k}{j-k} \frac{a^k}{k!}\, (2x)^{2k-j}\,.
$$

Consideremos ahora el caso particular $a = -1$. Los **polinomios de Hermite**, $H_n(x)$, se definen por la fórmula (**de Rodrigues**):

$$
e^{-x^2}\, H_n(x) \;=\; (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left\{ e^{-x^2} \right\}.
$$

$H_1(x) = 2x$

$H_2(x) = 4x^2 - 2$

$H_3(x) = 8x^3 - 12x$

Usando el resultado anterior podemos llegar a obtener una expresión explícita para estos polinomios:

$$
\begin{aligned}
H_n(x) &= (-1)^n\, n! \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} \binom{k}{n-k} \frac{(-1)^k}{k!}\, (2x)^{2k-n} \\
&= \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} \binom{n}{2k-n} \frac{(2n-2k)!}{(n-k)!}\, (-1)^{n+k}\, (2x)^{2k-n} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2l} \frac{(2l)!}{l!}\, (-1)^l\, (2x)^{n-2l} \\
&= (2x)^n - 2\binom{n}{2}(2x)^{n-2} + 3\cdot 4\binom{n}{4}(2x)^{n-4} - 4\cdot 5\cdot 6\binom{n}{6}(2x)^{n-6} + \ldots
\end{aligned}
$$

Criterios generales para extremos y puntos de inflexión

Definiciones. Sea f una función derivable en un intervalo I. En cada punto $\big(a, f(a)\big)$ con $a \in I$, la curva $y = f(x)$ tiene como tangente la recta $y = t_a(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a)$.

Diremos que la curva es **cóncava** (respectivamente, **convexa**) **vista desde arriba** en el punto (de abscisa) a si $\exists \delta > 0$ tal que $d_a(x) = f(x) - t_a(x) > 0$

(respectivamente, $d_a(x) < 0$) $\forall x \in B^*_\delta(a)$. Cuando $d_a(x)$ tenga un signo constante en el semientorno izquierdo y el signo contrario también constante en el derecho, el punto a es un **punto de inflexión**.

NOTAS — La curva $y = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, $y(0) = 0$, no es cóncava, ni convexa, ni tiene un punto de inflexión en $x = 0$. Se puede dar una noción global de concavidad o convexidad en todo un intervalo, que no requiere derivabilidad: Se dice que una función es **convexa** (o **cóncava**) **vista** (su gráfica) **desde arriba** en un intervalo cuando, si P, Q y R son tres puntos cualesquiera de la gráfica de f en dicho intervalo y Q está entre P y R, entonces Q está en, o por encima de, la *cuerda* PR. Si f es derivable en el intervalo y es convexa (cóncava) en él, entonces se puede probar que es convexa (cóncava) en cada punto del intervalo según nuestra definición, y recíprocamente (ver, por ejemplo, el Apéndice al Capítulo 11 del *Calculus* de MSPIVAK).

Proposición 1. Si f es derivable dos veces en el intervalo abierto I, y se tiene $f''(x) > 0$ (< 0) $\forall x \in I$, entonces f es cóncava (convexa) vista desde arriba en todo $x \in I$.

Demostración. Supongamos, por ejemplo, $f''(x) > 0$ $\forall x \in I$. Para $a \in I$ fijo, sea $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subset I$. Si $x \in B_\delta(a)$, aplicando la fórmula de Taylor, sale

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\,f''(\xi),$$

para algún ξ entre a y x. De modo que $\xi \in B_\delta(a)$, y

$$d_a(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\,f'(a) = \frac{(x-a)^2}{2}\,f''(\xi) > 0.$$

Proposición 2. Si f es n veces derivable en a ($n \geq 3$) y se tiene

$$f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{y } f^{(n)}(a) \neq 0,$$

entonces:

(i) Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$ (< 0), la curva $y = f(x)$ es cóncava (convexa), vista desde arriba, en a.

(ii) Si n es impar, a es un punto de inflexión.

Demostración. Aplicando la fórmula de Young y las hipótesis,

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a) + o\big((x-a)^n\big),$$

luego $d_a(x) = \dfrac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a) + o\big((x-a)^n\big)$, y entonces,

$$\lim_{x\to a} \frac{d_a(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Entonces, $\exists \delta > 0$ tal que el signo de $\dfrac{d_a(x)}{(x-a)^n}$ es el mismo que el de $f^{(n)}(a)$ para todo $x \in B^*_\delta(a)$, y ya sale todo.

Ejercicio. Dibujar la gráfica de la función $y = 2x^4 + 8x + 1$.

Proposición 3. Sea f derivable en $a \in I$ y supongamos que $f'(a) = 0$ y que f es cóncava (convexa) vista desde arriba en a. Entonces, f tiene un mínimo (máximo) relativo en a

Demostración. Pues $d_a(x) = f(x) - t_a(x) = f(x) - f(a)$ en este caso.

Corolario. Si f es n veces derivable en a ($n \geq 2$) y se tiene

$$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{y } f^{(n)}(a) \neq 0,$$

entonces:

(i) Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$ (< 0), el punto a es un mínimo (máximo) relativo.

(ii) Si n es impar, a es un punto de inflexión con tangente horizontal.

Ejercicios. 1.— Dibujar la gráfica de la función $y = (x+5)^2(x^3 - 10)$.

2.— Dibujar la gráfica de la función $y = \sqrt{1 + x^2}$.

3.— Esbozar la gráfica de la función y si $y' = \dfrac{(6x^2 + x + 1)(x-1)^2(x+1)^3}{x^2}$.

4.— Dibujar la gráfica de la función $y = \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x}$.

Ejercicios

Incluímos como sección final del tema, como en el anterior, los enunciados de algunos problemas variados, aunque debemos reseñar que el complemento "natural" de estos apuntes son las Hojas de problemas que dejó preparadas Chicho Guadalupe para las clases de esta asignatura.

χείρ χείρα νίζει
Una mano lava a la otra

1 Comprobar que

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\arccos\sqrt{\frac{\cos(3\theta)}{\cos^3\theta}}\right\} = \sqrt{\frac{3}{\cos\theta\,\cos(3\theta)}}. \quad \textit{(Hardy)}$$

2 Derivar y simplificar la expresión de la derivada cuanto sea posible:

$$\cos^m x \cdot \operatorname{sen}^n x\,,\ \frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^m x}\,,\ \cos\left(\operatorname{sen}^n(x^p)\right)\,,\ \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x}}\,,$$

$$x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2}\,,\ (1+x)\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\,,$$

$$\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{a\cos x + b}{a + b\cos x}\right)\,,\ \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\,.\quad \textit{(Hardy)}$$

3 Se llama **wronskiano** de n funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ al determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Reducir su derivada $W'(x)$ a un solo determinante.

4 Derivadas sucesivas de funciones inversas o curvas en paramétricas. Probar las fórmulas siguientes, cuando tengan sentido:

$$(f^{-1})''\big(f(x)\big) = -\frac{f''(x)}{\big(f'(x)\big)^3}\,,\quad (f^{-1})'''\big(f(x)\big) = -\frac{3\big(f''(x)\big)^2 - f'(x)f'''(x)}{\big(f'(x)\big)^5}\,,$$

$$y''(x) = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x}}{\dot{x}^3}\,,\quad y'''(x) = \frac{\dot{x}\,(\dot{x}\,\dddot{y} - \dot{y}\,\dddot{x}) - 3\,\ddot{x}\,(\dot{x}\,\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x})}{\dot{x}^5}\,;$$

en la segunda línea, se entiende que $\dot{x} = \dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \ddot{x}(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, etc.

5 Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 & \text{si } x < 0\,, \\ x^3 e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$ (i) Probar, y en este orden: f es derivable en 0; $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$; no existe $f''(0)$; no existe $\lim\limits_{x\to 0} f''(x)$.

(ii) Hallar los extremos absolutos de f en $[0, +\infty)$.

6 Sea $f(x) = \begin{cases} \alpha x + x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$ Probar:

(a) Si $0 < \alpha \leq 1$, f no es creciente en ningún entorno de 0.

(b) Si $\alpha > 1$, f es creciente en algún intervalo abierto conteniendo al 0.

(Son los problemas 11.63 y 11.64 del *Calculus* de SPIVAK.)

7 Probar que la ecuación $\cos x + x \operatorname{sen} x - x^2 = 0$ tiene exactamente dos raíces reales.

8 Hallar los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x$ en $[0, 9]$.

9 Probar que el máximo valor de $ax+by$ donde $x, y > 0$ y $x^2+xy+y^2 = 3k^2$ es $2k\sqrt{a^2 - ab + b^2}$. (*Hardy*.)

10 Estudiar los extremos de la función $y(x)$ definida implícitamente por la ecuación

$$\frac{1+y}{1-y} = \operatorname{sen}^2 x + 2 \cos x + 1 . \qquad (\textit{Hardy}.)$$

11 Gráfica de la curva $y = \dfrac{x^3 - 1}{(2x-1)^2}$.

12 Gráfica (el estudio de los puntos de inflexión con el mayor detalle que se pueda) de la curva

$$y^2 = (x^2+1)(x+2).$$

13 Gráfica de la función $y = \sqrt{(x+1)(x+4)(x+9)}$.

14 Sean $\varphi(x) = \pi \cdot \operatorname{sen} x$ y $F(x) = (\varphi \circ \varphi \circ \varphi)(x)$. Estudiar los extremos relativos de F en el intervalo $[0, \pi]$.

15 (a) Esbozar la gráfica de $\varphi(x) = 8 \operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(b) Sea $F(x) = \varphi\left(\dfrac{\pi}{9\sqrt{3}} \cdot \varphi(x)\right)$, donde $\varphi(x)$ es la función del apartado anterior; estudiar los extremos relativos de $F(x)$ en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Encontrar el polinomio de Taylor $T_4F(x; a)$ para $a = \frac{\pi}{3}$.

16 Sea $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$. (i) Discutir el número de raíces reales de la ecuación $f(x) = k$ según los valores de k (contando multiplicidades).

(ii) Hallar la parte entera de las raíces reales para $k = \frac{3}{2}$.

(iii) Dibujar, razonadamente, la gráfica de $y = \dfrac{1}{f(x)}$ en un entorno de 0.

17 La función $f(x) = (x+a) \operatorname{arc\,tg} x$ tiene un extremo en $x = 1$. Hallar el valor de a, y, para ese valor, dibujar la gráfica de $f(x)$. (Tomado de A. DONNEDU, *Análisis y geometría diferencial*, Aguilar.)

18 Probar las desigualdades (*Hardy*)

$$\pi < \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x(1-x)} \leq 4, \quad \text{si } 0 < x < 1 .$$

19 Consideremos, en el intervalo $[0, 1]$, la función

$$f(x) = \begin{cases} x\left(2 - \cos(\ln x) - \operatorname{sen}(\ln x)\right) & \text{si } 0 < x \leq 1 , \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 . \end{cases}$$

Probar que es estrictamente creciente, y que $f'(x) = 0$ para infinitos valores de x. ¿Es derivable en 0? Encontrar un punto de los que (TVM) asegura la existencia. (Del HAYRER Y WANNER, pág. 244.)

20 Probar que $f(x) = \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ es una función decreciente en $(0, \infty)$.

21 Polinomio de Taylor de grado 4, centrado en $a = \frac{\pi}{4}$, de la función $\operatorname{tg} x$. Estimar el error cometido al calcular con ese polinomio el valor para la tangente del ángulo de $49^\circ\ 30'$. (Usar que $\operatorname{tg}(60^\circ) = \sqrt{3}$.)

22 Probar, por estimación del resto integral, que el error al aproximar e^x, para $x \in [0, 1]$, por el valor que da el correspondiente polinomio de Maclaurin de grado 10 es menor que 10^{-7}. (Del Hayrer y Wanner, pág. 116.)

23 La función $\varphi(x)$ admite desarrollo limitado de orden 3 en torno al 0. Obtener dicho desarrollo, si se sabe que

$$\text{(i)}\quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2\big(\varphi(x)\big) - \operatorname{Sh}^2 x}{x^3} = -1\,,$$

$$\text{(ii)}\quad \varphi^{-1}(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\,.$$

(De un examen en la *E. T. S I Aeronáuticos*, Madrid, 1990.)

24 El período de las oscilaciones de un péndulo simple (una masa puntual m al extremo de un hilo inextensible sin peso de longitud l sujeto en el otro extremo a un punto fijo en el campo gravitatorio g) en función de la amplitud α (el ángulo de separación inicial respecto de la vertical), es

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,K\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)\,, \text{ donde } K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2x^2}}\,.$$

Encontrar el desarrollo limitado de orden n en torno al 0 de la función $K(k)$. Así, para pequeñas oscilaciones, $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{2} \approx \dfrac{\alpha}{2} \ll 1$, se tiene

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2 + \dots\right)\,.$$

(De P. Puig Adam, *Cálculo integral*, (17ª ed.), Gómez Puig ed., Madrid, 1979, y L. Landau y E. Lifchitz, *Mecánica*, ed Reverté)

25 Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable, se cumple $|f(x)| \geq |f'(x)|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y $\exists x_0$ tal que $|f(x_0)| > |f'(x_0)|$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ no tiene soluciones. (Olimpiada Iberoamericana, 2001.)

Problemas —segundo bloque de trabajo—

2.1.— Si $a < b < c$, $a+b+c = 2$ y $ab+ac+bc = 1$, probar que $a \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $b \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ y $c \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$.

(Referencias: KLAMBAUER, es uno de los ejercicios del Capítulo 4.)

2.2.— Dibujar, razonadamente, la gráfica de la siguiente curva, dada por ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2t - 4t^3 \\ y = t^2 - 3t^4 \end{cases}$$

(Referencias: Es el problema 6 de V. I. ARNOL'D, *A mathematical trivium*, Russian Math. Surveys **46**:1 (1991), 271–278.)

2.3.— Supóngase que $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tiene segunda derivada continua que cumple $f''(x) > 0$ en $(0,1)$ y que $f(0) = 0$. Elijamos $a \in (0,1)$ tal que $f'(a) < f(1)$. Demostrar que hay un único $b \in (0,1)$ tal que $f'(a) = f(b)/b$.

(Referencias: Propuesto por *Oscar Ciaurri, Logroño, Spain* en la sección de Problemas del número de junio-julio de 1999 de la revista *American Mathematical Monthly*.)

2.4.— Consideremos las funciones

$$f_m(x) = \begin{cases} x^m \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,, \end{cases}$$

donde $m \in \mathbf{N}$; probar que f_{2n} es derivable n veces en $\mathbb{R}$ pero no está en la clase $\mathcal{C}^{(n)}(\mathbb{R})$, y que $f_{2n+1} \in \mathcal{C}^{(n)}(\mathbb{R})$ pero no es derivable $n+1$ veces en $\mathbb{R}$.

(Referencias: Son los problemas 10.31 y 10.32 del *Calculus* de SPIVAK. Ver también el problema 10.11. Opcionalmente, se podría hacer uso de la **fórmula de Faa di Bruno** para la derivada n-ésima de $F(x) = (f \circ g)(x)$, a saber,

$$F^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{n} f^{(j)}\big(g(x)\big) \cdot \sum_{j} \frac{n!}{j_1! \cdots j_n!} \left(\frac{g'(x)}{1!}\right)^{j_1} \left(\frac{g''(x)}{2!}\right)^{j_2} \cdots \left(\frac{g^{(n)}(x)}{n!}\right)^{j_n},$$

donde la $\sum_j$ se extiende a todas las posibles *particiones* de j en n sumandos no negativos $j_1, j_2, \ldots, j_n$, que además (es decir, además de ser $j = j_1 + j_2 + \ldots j_n$ y j_1, etc. ≥ 0) verifican $n = j_1 + 2j_2 + \ldots nj_n$.)

Problemas —tercer bloque de trabajo—

***3.1*.**— (a) Sea f dos veces derivable en $I = [-a, a]$. Sean $M_0 = \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$ y $M_2 = \sup\limits_{x \in I} |f''(x)|$. Probar que $\forall\, x \in I$, $|f'(x)| \le \dfrac{M_0}{a} + \dfrac{x^2 + a^2}{2a} M_2$.

(b) Si f es derivable dos veces en un intervalo J no necesariamente acotado, pero los supremos M_0 y M_2 son finitos, entonces también $M_1 = \sup\limits_{x \in I} |f'(x)|$ es finito, y se tiene

$$\begin{cases} M_1 \le 2\sqrt{M_0 M_2} & \text{si la longitud de } J \text{ es } \ge 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}} \\ M_1 \le \sqrt{2 M_0 M_2} & \text{si } J = \mathbb{R} \text{ (aplíquese (a)).} \end{cases}$$

(Referencias: Es parte del problema 8.14.2 del libro *Fundamentos de análisis moderno* de J. Dieudonné, y allí se puede encontrar alguna indicación. Ver también Spivak, problema 19.1 (resuelto en Klambauer).)

***3.2*.**— En un examen de Cálculo se daba la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(3x)}{\operatorname{tg}(5x)} & \text{si } x \ne 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

y había que calcular $f'(0)$. La contestación de un estudiante fue así:

$$f(x) \sim \frac{(3x)^2/2}{5x} = \frac{9x}{10} \Rightarrow f'(x) \sim \frac{9}{10} \Rightarrow f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = \frac{9}{10}.$$

Discutir la calidad de esta respuesta, y su generalidad, encontrando algún ejemplo en que un razonamiento análogo no funcione igual de bien.

***3.3*.**— (Problema 7 del *trivium* de Arnol'd.) ¿Cuántas normales se pueden trazar a una elipse desde un punto dado del plano? Encontrar la región en la que el número de normales es máximo.

(Referencias: Problema estudiado ya por Apolonio de Perga (*fl. circa* 247–222 a.C) en el libro *v* de *Las cónicas*. Los puntos de contacto con la elipse de las normales desde un punto dado son extremos relativos de la función que da la distancia del punto a un punto arbitrario de la elipse. La condición para que la ecuación $x^4 + 4px^3 - 4qx - 1 = 0$ tenga raíces múltiples es expresable en la forma $(p+q)^{2/3} - (p-q)^{2/3} = 1$ (Hardy, *Pure Mathematics*).)

***3.4*.**— Sea f dos veces derivable en $[0, 1]$, cumpliendo $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = f'(1) = 0$. Probar que $|f''(\xi)| > 4$ para algún $\xi \in [0, 1]$.

(Referencias: Spivak, problema 11.39. También en Klambauer ¿Es el mismo enunciado? El problema data al menos de 1921, véase G. Polya y G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis I*, Springer, 4ª ed., 1970, Pt. II, Cap 3, Nº 121.)

3

Cálculo integral

LA RECUPERACIÓN del valor de una función a partir del conocimiento de su diferencial, da lugar al concepto matemático de integral definida. Empecemos con un ejemplo tomado de la Física: tenemos una varilla delgada (unidimensional) de longitud l, fabricada de modo tan minucioso que la densidad lineal (masa por unidad de longitud) es función de la distancia a uno de sus extremos (al izquierdo), según la fórmula $\rho(x) = e^{-x}$. ¿Cuál es la masa total de la varilla?

Sed ex iis quæ in methodo tangentium expofui, patet effe $d, \frac{1}{2}\, xx = x\,dx$; ergo contra $\frac{1}{2}\, xx = f, x\,dx$ (ut enim poteftates & radices in vulgaribus calculis, fic nobis fummæ & differentiæ feu f & d, reciprocæ funt.)
(Leibniz, 1686)

La información que tenemos nos dice, en términos diferenciales, que la masa (el diferencial de masa) del elemento diferencial de longitud de la varilla situado a distancia x del extremo izquierdo es $dm = e^{-x}\,dx$. De modo que para hallar la masa total se nos ocurre "sumar" todas estas masas infinitesimales dm, desde la situada en $x = 0$ hasta la situada en $x = l$. Para esta "suma" tenemos, gracias a Leibniz (1686), una notación elocuente. Así,

And whereas M^r Leibnits præfixes the letter $\int$ to the Ordinate of a curve to denote the Summ of the Ordinates or Area of the curve, I did some years before represent the same thing by inscribing the Ordinate in a square . . . My symbols therefore . . . are the oldest in the kind.
(Newton, 1714)

$$M = \int dm = \int_0^l e^{-x}\,dx\,,$$

donde la efe alargada no se lee "suma", sino (desde Johann Bernoulli, 1696) "integral".

Ahora, e^{-x} es la derivada de $-e^{-x}$, como podemos tantear, así que

$$\int_0^l e^{-x}dx = \int_0^l d\left(-e^{-x}\right)\,,$$

y esta última "suma" de "diferenciales en escalera" será igual a la variación total de $F(x) = -e^{-x}$ entre 0 y l, es decir, a $F(l) - F(0)$. De manera que la masa de la varilla va a ser $M = F(l) - F(0) = 1 - e^{-l}$.

Como un segundo ejemplo, ahora geométrico, supongamos que queremos hallar el área A comprendida entre una curva $y = y(x)$, el eje $X'X$, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Supondremos que $y(x)$ es continua, y que $y(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$.

Aquí, el elemento diferencial de área, en cada abscisa x, es el área de una banda rectangular de altura $y(x)$ y base infinitesimal dx, $dA = y(x)\,dx$, de modo que

$$A = \int_a^b y(x)\,dx\,.$$

Si conocemos una **primitiva de** $y(x)$ es decir, una función $Y(x)$ tal que $y(x) = Y'(x)\ \forall x \in [a,b]$, entonces podremos hallar A, como antes:

$$A = \int_a^b Y'(x)\,dx = \int_a^b dY = Y(b) - Y(a)\,.$$

Un tercer ejemplo puede ser el cálculo del volumen V del sólido (de revolución) engendrado cuando el recinto plano anterior de área A gira en torno al eje $X'X$, dando una vuelta completa. El elemento diferencial de volumen es el volumen de un disco de radio $y(x)$ y altura infinitesimal dx,

$$dV = \pi y^2\,dx \quad \Longrightarrow \quad V = \int_a^b \pi y^2\,dx\,.$$

En el caso particular $y(x) = \frac{R}{h}x$ y $[a,b] = [0,h]$, resulta que el volumen del cono de revolución de radio R y altura h es

$$V = \int_0^h \pi\,\frac{R^2 x^2}{h^2}\,dx = \int_0^h d\left(\frac{\pi R^2 x^3}{3h^2}\right) = \frac{\pi R^2 h^3}{3h^2} - 0 = \frac{1}{3}\pi R^2 h\,,$$

igual a **un tercio** del área de la base, por la altura, como ya probó Arquímedes (287-212 a. C.) , que conocía el cálculo de áreas y volúmenes como límite de sumas de cantidades infinitesimales.

Ya hemos visto un poco en los dos temas anteriores que en el siglo XIX, el cálculo avanza por el camino que deja atrás la intuición geométrica y persigue asentarse sobre bases lógicas más rigurosas que las que tenía hasta entonces. Pensando sólo en necesidades internas del propio conocimiento matemático, una piedra de toque eran las nuevas funciones que habían surgido a la luz tras los trabajos de J. B. Fourier (1768-1830) con las series trigonométricas en el primer tercio del siglo. El repaso debía llegar también al final al concepto de integral definida, que de hecho era el más antiguo del **cálculo infinitesimal**. Había que definir ese concepto con rigor, y después estudiar a qué funciones era aplicable. La respuesta de B. Riemann en 1854, que estudiaremos más adelante, zanjó toda discusión, al menos hasta principios del siglo XX, en que H. Lebesgue estableció una nueva teoría de la integral (que no se da en este primer curso de análisis).

3.1 PRIMITIVAS

Estudiaremos ahora las técnicas más básicas del cálculo de primitivas, dejando sin tocar algún tipo clásico, como el de las integrales **binomias**.

Definiciones

La **integral indefinida** de una función $f(x)$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, denotada por $\int f$ o $\int f(x)\,dx$ es el conjunto (no vacío si f es continua, ver la nota al margen) de funciones $\{F\colon I \to \mathbb{R} \,:\, F'(x) = f(x)\ \forall x \in I\}$. Cada función F de este conjunto se dice que es una **primitiva** de f en I. Se escribe

$$\int f(x)\,dx \;=\; F(x) + C$$

pues, como ya sabemos, dos primitivas de f en I se diferencian en una constante.

Comprobaremos en la sección siguiente que dada una función f continua en $[a,b]$, la función

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

es una primitiva de f. A veces quedan definidas así funciones nuevas, como la función error, el seno integral, el logaritmo integral, las funciones elípticas, ...

Propiedades

1. Si $F \in \mathcal{C}^{(1)}$, $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$.
2. Si f y g tienen primitivas, $\int(\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$.
3. Fórmula de **integración por partes**: Si $u, v \in \mathcal{C}^{(1)}$,
$$\int u v' \;=\; u v - \int u' v\,.$$
4. Fórmula de **integración por partes extendida**: Si $u, v \in \mathcal{C}^{(n+1)}$,
$$\int u v^{(n+1)} = u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n u^{(n)} v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v\,.$$
5. Fórmula de **cambio de variable** del tipo $x = g(t)$: Si g es de clase $\mathcal{C}^{(1)}$ y tiene inversa también $\mathcal{C}^{(1)}$,
$$\int f \;=\; F(x) + C \quad\Longrightarrow\quad \int f\big(g(t)\big)\, g'(t)\,dt \;=\; F\big(g(t)\big) + C\,,$$

u	$v^{(n+1)}$	
u'	$v^{(n)}$	$\oplus$
u''	$v^{(n-1)}$	$\ominus$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$u^{(n)}$	v'	$\ominus^{n-1}$
$u^{(n+1)}$	v	$\ominus^{n}$

Ejemplos

1.– Hallar $I = \displaystyle\int \left(\frac{1}{x} - \log\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) dx\,.$

Con el cambio $x = 1/t$, se llega a $I = -\log|t| + J$, donde $J = \displaystyle\int \frac{\log(1+t)}{t^2}\,dt\,.$

Esta integral sale por partes, tomando $u = \log(1+t)$, $dv = \dfrac{dt}{t^2}$:

$$J = -\frac{1}{t}\log(1+t) + \int \frac{1}{t(1+t)}\,dt = -\frac{1}{t}\log(1+t) + \log|t| - \log|1+t|\,,$$

donde se ha usado la descomposición $\dfrac{1}{t(1+t)} = -\dfrac{1}{1+t} + \dfrac{1}{t}\,.$

Sustituyendo el valor de J y “deshaciendo el cambio”, resulta

$$I \;=\; -(1+x)\log\left(\frac{x+1}{x}\right) + C.$$

2.– Por partes, tomando $dv = dx$, salen

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

x^3	e^{2x}	
$3x^2$	$\frac{1}{2}e^{2x}$	$\oplus$
$6x$	$\frac{1}{4}e^{2x}$	$\ominus$
6	$\frac{1}{8}e^{2x}$	$\oplus$
0	$\frac{1}{16}e^{2x}$	$\ominus$

3.– Con la fórmula extendida de integración por partes,

$$\int x^3 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C.$$

Integrales inmediatas

Recordando las derivadas de las funciones elementales, se tienen los siguientes esquemas (donde dice x, dx, puede decir $u(x)$, $d\big(u(x)\big)$) de fórmulas (el intervalo de definición es el dominio del integrando en cada caso):

$$\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

$$\int \operatorname{Sh} x\, dx = \operatorname{Ch} x + C \qquad \int \operatorname{Ch} x\, dx = \operatorname{Sh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Ch}^2 x} = \operatorname{Th} x + C \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{Sh}^2 x} = -\operatorname{Coth} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arg\,Ch} x + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Arg\,Sh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$$

Funciones trigonométricas (I)

1.– Integrales del tipo $\displaystyle\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$, con $m, n \in \mathbb{Z}$.

(a) $\begin{cases} m \text{ impar:} & \text{cambio } u = \cos x\,; \\ n \text{ impar:} & \text{cambio } u = \operatorname{sen} x\,; \\ m+n \text{ par:} & \text{cambio } u = \operatorname{tg} x\,. \end{cases}$

Estos cambios, con $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ conducen a integrales inmediatas. En general, a integrales de funciones racionales. En alg´un caso pueden funcionar con un exponente entero y el otro no. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx &= \frac{2}{5}(\cos x)^{5/2} - 2(\cos x)^{1/2} + C \\
\int \frac{4}{\cos^3 x}\, dx &= \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \log\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right) + C \\
\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^5 x}\, dx &= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C
\end{aligned}$$

(b) $m, n \in \mathbb{N}$ ambos pares: uso repetido de las fórmulas

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 a &= \frac{1-\cos 2a}{2} \\
\cos^2 a &= \frac{1+\cos 2a}{2} \\
\operatorname{sen} a \cos b &= \frac{1}{2}\big[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\big] \\
\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b &= \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big] \\
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big]
\end{aligned}$$

Por ejemplo ($m \neq 0$),

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2(mx)\, dx &= \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2mx)}{4m} + C \\
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{16}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 6x}{12}\right) + C
\end{aligned}$$

Aunque también se puede expresar el integrando en función sólo de $\operatorname{sen} x$ o $\cos x$, y aplicar entonces una fórmula de reducción.

(c) Fórmulas de reducción, integrando por partes.

Por ejemplo, sea $I_m = \displaystyle\int \cos^m x \, dx$. Si tomamos, por partes, $dv = \cos x \, dx$, resulta

$$I_m = \operatorname{sen} x \cos^{m-1} x + (m-1)\int \cos^{m-2} x \,(1-\cos^2 x)\, dx\,,$$

luego $m\,I_m = \operatorname{sen} x \cos^{m-1} x + (m-1)\,I_{m-2}$. Para $m \in \mathbb{Z}$ esta fórmula reduce el cálculo de I_m hasta I_0, I_1 o I_{-1}, inmediatas. Por ejemplo,

$$\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\right) + C$$

Hallar, en menos de 5 minutos, el valor medio de $\operatorname{sen}^{100} x$*, con un 10% de error relativo (Arnold)*

Cuando $m \in \mathbb{N}$ se obtiene, aplicando la recurrencia para integrales definidas (¿volvemos después a la página 36 ?):

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x\,dx = \begin{cases} \frac{(m-1)(m-3)\cdots 1}{m(m-2)\cdots 2}\,\frac{\pi}{2} & \text{si } m \text{ es par} \\ \frac{(m-1)(m-3)\cdots 2}{m(m-2)\cdots 3} & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

Se pueden comprobar, como ejercicio, estas otras fórmulas de reducción para la integral $I_{m,n} = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$:

$$\begin{aligned} (m+1)\,I_{m,n} &= \operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1)\,I_{m+2,n-2} \\ (m+n)\,I_{m,n} &= \operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1)\,I_{m,n-2} \end{aligned}$$

(d) $I_n = \int \operatorname{tg}^n x\,dx$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

En los casos n impar se pueden hacer los cambios del apartado *(a)*. En cualquier caso se puede usar la fórmula de recurrencia

$$(n-1)\big(I_n + I_{n-2}\big) = \operatorname{tg}^{n-1} x\,,$$

obtenida usando $1 + \operatorname{tg}^2 x = (\operatorname{tg} x)'$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^5 x\,dx &= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \log|\cos x| + C \\ \int \frac{1}{\cos^6 x}\,dx &= \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C \end{aligned}$$

2.– Productos de senos y cosenos.
Se usan las fórmulas de transformación de productos en sumas que ya hemos escrito antes. Así, si $m \pm n \neq 0$,

$$\int \operatorname{sen}(mx)\,\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n}\,,$$

de donde se deduce que para $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$, se tiene

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\,\operatorname{sen}(nx)\,dx = 0\,.$$

3.– Integrales $\displaystyle\int P(x) \begin{cases} \operatorname{sen}(ax) \\ \cos(ax) \end{cases} dx$, o $\displaystyle\int e^{ax} \begin{cases} \operatorname{sen}(bx) \\ \cos(bx) \end{cases} dx$, donde $P(x)$ es un polinomio en x.

Salen con la fórmula de integración por partes extendida. Por ejemplo, sea $I = \displaystyle\int (x^3 - 2x^2 + 1) \operatorname{sen}(2x)\, dx$. Repasemos el algoritmo, cómodo para el cálculo:

$x^3 - 2x^2 + 1$	$\operatorname{sen}(2x)$	
$3x^2 - 4x$	$-\frac{1}{2} \cos(2x)$	$\oplus$
$6x - 4$	$-\frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x)$	$\ominus$
6	$\frac{1}{8} \cos(2x)$	$\oplus$
0	$\frac{1}{16} \operatorname{sen}(2x)$	$\ominus$

En la columna de la izquierda se hacen derivadas sucesivas; en la central, integrales sucesivas. Y finalmente,

$$I = (x^3 - 2x^2 + 1) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2x)\right) \cdot \oplus + (3x^2 - 4x) \cdot \left(-\frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x)\right) \cdot \ominus + \dots$$

$$= -\frac{1}{2} (x^3 - 2x^2 + 1) \cos(2x) + \frac{1}{4} (3x^2 - 4x) \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{8} (6x - 4) \cos(2x)$$

$$- \frac{3}{8} \operatorname{sen}(2x) + C$$

Sea ahora $I = \displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx)\, dx$. Se tiene

e^{ax}	$\operatorname{sen}(bx)$	
ae^{ax}	$-\frac{1}{b} \cos(bx)$	$\oplus$
a^2e^{ax}	$-\frac{1}{b^2} \operatorname{sen}(bx)$	$\ominus$

luego

$$I = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \operatorname{sen}(bx) - \frac{a^2}{b^2} I,$$

de modo que, despejando,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} \big(a \operatorname{sen}(bx) - b \cos(bx)\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{ax} \operatorname{sen}(bx + \varphi) + C, \end{aligned}$$

si $\operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ y $\cos \varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Otras fórmulas de reducción, por partes

1.– Integrales del tipo $I_n = \displaystyle\int \frac{x^n}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Tomando $u = x^{n-1}$, se llega a

$$n\,I_n \;=\; -x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2} + a^2(n-1)\,I_{n-2}\,,$$

con la que se recurre hasta $I_1 = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$, o $I_0 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C$.

2.– Integrales del tipo $I_n = \displaystyle\int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^n}\,dx$, donde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

(Modo 1). En primer lugar, sumando y restando x^2 en el numerador, se tiene $I_n = I_{n-1} - K_n$, donde $K_n = \displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n}\,dx$. Esta integral K_n se hace por partes, tomando $u = x$. Se llega a

$$I_n \;=\; \frac{x}{2(n-1)\,(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\,I_{n-1}\,,$$

con la que se recurre hasta $I_1 = a\,\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right)$.

(Modo 2). Con el cambio de variable $x = a \operatorname{tg} t$, se tiene

$$I_n \;=\; \frac{1}{a^{2n-3}} \int (\cos t)^{2n-2}\,dt\,.$$

Se aplica reducción por partes, que ya hemos visto, en esta integral, y al final el cambio se deshace con $\operatorname{sen} t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, $\cos t = \dfrac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Funciones racionales

Una **función racional** (real) de una variable x es un cociente de polinomios en x con coeficientes reales. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios y el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el grado de $Q(x)$, haciendo la división de los polinomios se obtiene

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \;=\; C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,,$$

donde ahora, el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. La integral de $C(x)$ es inmediata, así que en el estudio de la integración de funciones racionales nos podemos limitar al caso en que el grado del numerador, $P(x)$, es menor que el grado del denominador, $Q(x)$.

En tal caso, cuando se conozca la descomposición completa en factores de $Q(x)$, se usa el método de descomposición en fracciones simples: el cociente

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se puede escribir, en general, como una suma de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

por cada factor de $Q(x)$ del tipo $(x-a)^n$ (correspondiente a la raíz real a de multiplicidad n, y

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k\,x + C_k}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k}$$

por cada par de raíces complejas conjugadas $\alpha \pm \beta\,i$ de multiplicidad m de $Q(x)$. Diversos métodos de cálculo permiten obtener los coeficientes A_k, B_k y C_k, que están unívocamente determinados.

La integración, despu´es, delas distintas fracciones simples es así:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x-a} &= \ln|x-a| + C \\
\int \frac{dx}{(x-a)^n} &= \frac{-1}{(n-1)\,(x-a)^{n-1}} + C \quad \text{si } n \neq 1 \\
\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx &= \int \left(\frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{A\,\alpha+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \right) dx \\
&= \frac{A}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + \frac{A\,\alpha+B}{\beta}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C\,,
\end{aligned}$$

haciendo el cambio $x-\alpha=\beta t$ en la segunda integral. Y análogamente,

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k}\,dx &= \int \left(\frac{A(x-\alpha)}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k} + \frac{A\,\alpha+B}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k} \right) dx \\
&= \frac{-A}{2(k-1)\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^{k-1}} + (A\,\alpha+B)\,I_n(t)\,,
\end{aligned}$$

donde hemos puesto, tras el cambio $x-\alpha=t$,

$$I_n(t) = \int \frac{dt}{(t^2+\beta^2)^k}\,,$$

integral que ya se ha estudiado antes.

Ejemplos. 1.– $\quad I = \displaystyle\int \frac{x^2+5x-3}{(x+1)(x^2-4)}\,dx.$

Proponemos la descomposición

$$\frac{x^2+5x-3}{(x+1)(x^2-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}\,.$$

Cuando $Q(x) = (x-a)\, q_a(x)$ con $q_a(a) \neq 0$, como en este caso, se tiene

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \;=\; \frac{A}{x-a} + \frac{R(x)}{q_a(x)}\,,$$

y multiplicando por $(x-a)\, q_a(x)$,

$$\frac{P(x)}{q_a(x)} \;=\; A + \frac{(x-a)\, R(x)}{q_a(x)}\,,$$

luego, para $x = a$,

$$A \;=\; \frac{P(a)}{q_a(a)}\,;$$

así en nuestro ejemplo $(q_{-1}(x) = x^2 - 4$, etc.,) resulta

$$I \;=\; \frac{7}{3} \ln|x+1| + \frac{11}{12} \ln|x-2| - \frac{9}{4} \ln|x+2|\;.$$

2.– $\qquad I = \displaystyle\int \frac{7x^4 + 25x^3 + 6x^2 - 34x + 23}{(x-1)^2 (x+2)^3}\, dx.$

Cuando $Q(x) = (x-a)^m\, q_a(x)$ con $m > 1$ (y $q_a(a) \neq 0$) como en este caso, se tiene

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \;=\; \frac{A_0}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{R(x)}{q_a(x)}\,,$$

luego, multiplicando por $(x-a)^m$,

$$\frac{P(x)}{q_a(x)} \;=\; A_0 + A_1\,(x-a) + \ldots + A_{m-1}\,(x-a)^{m-1} + o\left((x-a)^{m-1}\right)$$

en el entorno de a, de modo que los A_k son los coeficientes del desarrollo limitado (polinomio de Taylor) de orden $m-1$ del cociente $\dfrac{P(x)}{q_a(x)}$ en torno al punto a. A veces, como desde luego si $q_a(x) = 1$, este desarrollo limitado se puede obtener fácilmente.

Otro método práctico de cálculo de estos A_k es ir derivando sucesivamente, y evaluando en $x = a$, la ecuación "aproximada"

$$\begin{aligned} P(x) &= q_a(x)\left(A_0 + A_1\,(x-a) + \ldots + A_{m-1}\,(x-a)^{m-1}\right) + o\left((x-a)^{m-1}\right) \\ &\approx q_a(x)\left(A_0 + A_1\,(x-a) + \ldots + A_{m-1}\,(x-a)^{m-1}\right) \end{aligned}$$

Así, en el ejemplo,

$$7x^4 + 25x^3 + 6x^2 - 34x + 23 \;\approx\; (x+2)^3\,(A_0 + A_1(x-1))$$

$$\begin{aligned} x &= 1 \implies A_0 = 1 \\ 28x^3 + 75x^2 + 12x - 34 &\approx A_1\,(x+2)^3 + 3(x+2)^2\,A_0 \\ x &= 1 \implies A_1 = 2 \end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$7x^4 + 25x^3 + 6x^2 - 34x + 23 \approx (x-1)^2\left(B_0 + B_1(x+2) + B_2(x+2)^2\right)$$

$$x = -2 \implies B_0 = 3$$

$$\begin{aligned} 28x^3 + 75x^2 + 12x - 34 \approx{}& (x-1)^2\big(B_1 + 2\,B_2(x+2)\big) \\ &+ 2(x-1)\big(B_0 + B_1(x+2)\big) \end{aligned}$$

$$x = -2 \implies B_1 = 4$$

$$84x^2 + 150x + 12 \approx 2(x-1)\,B_1 + (x-1)^2\,2B_2 + 2B_0 + 2(x-1)\,B_1$$

$$x = -2 \implies B_2 = 5$$

Finalmente, $I = \dfrac{-1}{x-1} + 2\ln|x-1| - \dfrac{3}{2\,(x+2)^2} - \dfrac{4}{x+2} + 5\ln|x+2|\,.$

3.– $\qquad I = \displaystyle\int \frac{x^3 - 3x + 6}{(x^2-2x+5)(x-1)^2}\,dx\,.$

Pongamos la descomposición

$$\frac{x^3 - 3x + 6}{(x^2-2x+5)(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2-2x+5}\,,$$

entonces, como en el ejemplo anterior, resultan $A = 1$ y $B = 0$. La tercera fracción resulta del cálculo algebraico:

$$\frac{x^3 - 3x + 6}{(x^2-2x+5)(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x^2-2x+5)(x-1)^2} = \frac{x+1}{x^2-2x+5}\,.$$

Luego $I = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C\,.$

4.– Dejamos estas dos integrales como ejercicio. Se puede hacer una descomposición en fracciones simples del tipo $A/(x-a)$ para cada raíz a, real o compleja.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3-1} &= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x-1)^3}{x^3-1}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C \\ \int \frac{dx}{x^6+1} &= \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{3}\,x+1}{x^2-\sqrt{3}\,x+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}(2x-\sqrt{3}) + \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}(2x+\sqrt{3}) + C\,. \end{aligned}$$

Para integrar fracciones cuyo denominador tiene raíces complejas múltiples puede llevar menos trabajo el método siguiente. Incluso para la fracción “simple” de ese caso supone un método alternativo a los ya vistos.

Método de Hermite

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Sean $H(x) = \mathrm{mcd}\big(Q(x), Q'(x)\big)$ y $M(x) = Q(x)/H(x)$. Entonces (Ch. Hermite, 1873) se pueden encontrar de modo único dos polinomios $h(x)$ y $m(x)$, con coeficientes indeterminados y de grados una unidad menos que $H(x)$ y $M(x)$, respectivamente, tales que

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \;=\; \frac{h(x)}{H(x)} + \int \frac{m(x)}{M(x)}\,dx\,.$$

Los coeficientes de $h(x)$ y $m(x)$ se determinan por identificación, derivando esta igualdad y reduciendo las fracciones a común denominador. La fracción integrada es la *parte racional* de la integral, y la integral que queda es su *parte transcedente* (los logaritmos y arcos tangente).

Por ejemplo,

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} \;=\; \frac{-x}{3\,(x^3-1)} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3-1}$$

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^3-3x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx \;=\; \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)} + \ln|x| + \operatorname{arc\,tg} x + C$$

Funciones trigonométricas (II)

Veamos unos cambios de variable que convierten en una integral de una función racional la integral genérica

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx\,,$$

donde $R(x,y)$ es una función racional de sus dos variables, es decir, un cociente $P(x,y)/Q(x,y)$ donde $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son polinomios en x e y.

(a) Siempre se racionaliza con el cambio $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$, por el cual se tiene

$$\operatorname{sen} x \;=\; \frac{2t}{1+t^2}\,, \quad \cos x \;=\; \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \quad dx \;=\; \frac{2\,dt}{1+t^2}\,.$$

(b) Pueden ser más ventajosos los cambios siguientes:

$$\begin{cases} \text{(I) Si } \; R(-x,y) = -R(x,y) : & \text{cambio } \cos x = t\,; \\ \text{(II) Si } \; R(x,-y) = -R(x,y) : & \text{cambio } \operatorname{sen} x = t\,; \\ \text{(III) Si } \; R(-x,-y) = R(x,y) : & \text{cambio } \operatorname{tg} x = t\,. \end{cases}$$

Que agotan las posibilidades para la función R, pues

$$R(x,y) = \frac{R(x,y) - R(-x,y)}{2} + \frac{R(x,y) + R(-x,-y)}{2} + \frac{R(-x,y) - R(-x,-y)}{2}$$

y los sumandos son, respectivamente, de los tipos (I), (III) y (II).

Ejercicios. Calcular las integrales:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{1 + \operatorname{sen}(2x)}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \log\left(\frac{2 - \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\operatorname{sen} x}{-2 - \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\operatorname{sen} x}\right) + C$$

$$\int \frac{\cos(2x)}{\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x} = \frac{\sqrt{2}}{4} \log\left(\frac{\sqrt{2} + \operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{2} - \operatorname{sen}(2x)}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{(1 + \cos x)\operatorname{sen} x}\, dx = \frac{1}{2(1 + \cos x)} - \frac{1}{4}\log(1 + \cos x) + \frac{1}{4}\log(1 - \cos x) + C$$

Funciones irracionales

1.– Integrales del tipo $\int R\left(x, x^{n_1/d_1}, \dots, x^{n_k/d_k}\right)\, dx$, donde los $n_i/d_i \in \mathbb{Q}$ y R es una función racional de $k+1$ variables.

Se hace el cambio $x = t^M$, donde $M = \operatorname{mcm}(d_1, \dots, d_k)$.

Ejercicio. Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[4]{1+x}}\, dx$.

2.– Integrales del tipo $\int R\left(x, y^{n_1/d_1}, \dots, y^{n_k/d_k}\right)\, dx$, donde los $n_i/d_i \in \mathbb{Q}$, $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ con $ad - bc \neq 0$, y R es una función racional de $k+1$ variables.

Se hace el cambio $y = t^M$, donde $M = \operatorname{mcm}(d_1, \dots, d_k)$.

Ejercicio. Calcular la integral $\displaystyle\int \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x+1}\, dx$.

3.– Integrales del tipo $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\, dx$ donde R es una función racional de dos variables.

(a) Cambios trigonométricos. En primer lugar se completa un cuadrado a partir del trinomio de segundo grado, del modo siguiente:

$$ax^2 + bx + c \;=\; a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

y entonces, con el cambio $x + \dfrac{b}{2a} = u$ la integral se lleva a uno de los tipos

$$\text{(T-I)} \int R\left(u, \sqrt{A^2 - u^2}\right)\, dx \;:\quad u = A \operatorname{sen} t\,.$$

$$\text{(T-II)} \int R\left(u, \sqrt{A^2 + u^2}\right)\, dx \;:\quad u = A \operatorname{tg} t\,, \quad \text{o bien} \quad u = A \operatorname{Sh} t\,.$$

$$\text{(T-III)} \int R\left(u, \sqrt{u^2 - A^2}\right)\, dx \;:\quad u = \frac{A}{\cos t}\,, \quad \text{o bien} \quad u = A \operatorname{Ch} t\,.$$

que se racionalizan con los cambios indicados.

(b) Cambios de Euler. Se puede encontrar la interpretación geométrica que da origen a estos cambios, que también racionalizan estas integrales, en PUIG ADAM, *opcit*, pág. 59.

$$\text{(E-I)} \quad \text{Si } a > 0\,, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} + t\,.$$

$$\text{(E-II)} \quad \text{Si } c > 0\,, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}\,.$$

$$\text{(E-III)} \quad \text{Si } a < 0 \text{ y } c < 0\,, \quad \text{y} \quad ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)\,,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)\, t\,.$$

(c) Noticias del método de Abel. El matemático noruego N. H Abel (1802-1829) desarrolló un estudio original, meramente analítico, sobre la racionalización de estas integrales, mostrando cómo eran reducibles a ciertos tipos, y cómo racionalizar cada tipo. Se puede ver su método, completo, en el libro de KLAMBAUER. Presentaremos sólo unas instantáneas:

(A-I) Si $P(x)$ es un polinomio en x, entonces

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx = q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,,$$

donde $q(x)$ es un polinomio con coeficientes indeterminados de grado una unidad menos que el grado de $P(x)$, y λ es una constante. Esta constante, y los coeficientes de $q(x)$, se determinan derivando la igualdad anterior.

(A-II) Sea $m \in \mathbb{N}$. Una integral del tipo

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

se reduce al tipo anterior con el cambio $x - \alpha = \dfrac{1}{t}$.

(A-III) Sea $m \in \mathbb{N}$. La integral

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{(2m+1)/2}}$$

se racionaliza con el ***cambio de Abel***

$$t = \left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

(A-IV) Sea $m \in \mathbb{N}$. La integral

$$\int \frac{x}{(x^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha x^2+\beta}}\,dx$$

se racionaliza con el cambio $\sqrt{\alpha x^2+\beta} = t$. Y la integral

$$\int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$$

se racionaliza con el cambio de Abel $\left(\sqrt{\alpha x^2+\beta}\right)' = t$.

Ejercicios. Calcular las siguientes integrales, probando más de uno de los cambios estudiados:

1.– $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x+3}\,dx$ ***2.***– $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$

3.– $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\,dx$ ***4.***– $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}$

5.– $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x-3}}\,dx$ ***6.***– $\displaystyle\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

7.– $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}\,dx$ ***8.***– $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x^2-x+2)^{7/2}}$

9.– $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+2}}\,dx$ ***10.***– $\displaystyle\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx$

3.2 LA INTEGRAL DE RIEMANN

... "Hay que disponer de una tabla de secantes de los ángulos de 0° a 90°, de minuto en minuto. La distancia en el mapa entre los paralelos de latitudes Φ_1 y Φ_2 será la suma de los valores de la tabla para los ángulos comprendidos entre Φ_1 y Φ_2, multiplicada por la longitud de una milla de ecuador en el mapa".

(Para construir un mapa en proyección Mercator.)

Vamos a definir **integrabilidad** (e **integral definida**) **de una función real** $f(x)$ **acotada en un intervalo cerrado y acotado** $[a, b]$, usando en primer lugar el procedimiento de G. Darboux en su *Memoria sobre las funciones discontinuas*, de los *Annales' de l École normale supérieure de Paris*, 1875 El trabajo epónimo de esta sección es la tesis de habilitación para la Universidad de Gotinga de Bernhard Riemann (1826–1866) en 1854, titulado *Sobre la posibilidad de representar una función mediante una serie trigonométrica*, que no se publicó hasta 1867

"Cauchy ya había establecido criterios para la existencia de una integral definida como el límite de ciertas sumas, y probado que dicho límite siempre existe cuando la función es continua. Riemann hizo una impresionante extensión al señalar que la existencia de tal límite no se confinaba a los casos de continuidad." (Cita de F. CAJORI, *A History of Mathematics*, Chelsea, 1991, pág. 421.) [1]

Particiones. Sumas superior e inferior

Una **partición** P de $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos de $[a, b]$ que incluye los puntos a y b. Se denota por $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, donde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Los **subintervalos** de la partición P son los intervalos $[x_{j-1}, x_j]$, de **longitudes** $x_j - x_{j-1}$, para $j = 1, \ldots, n$. La **norma** de la partición, $\|P\|$, es el máximo de las longitudes de sus subintervalos.

Un **refinamiento** de la partición P es cualquier otra partición Q de $[a, b]$ que contenga a P. Dos particiones P y P' de $[a, b]$ siempre admiten un refinamiento común, por ejemplo, la partición $P \cup P'$.

Sea $f(x)$ acotada en $[a, b]$ compacto. Sea P una partición de $[a, b]$ y sean

$$m_j = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\}, \quad M_j = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\}.$$

Se definen, y esto se debe a Darboux:

la **suma inferior** de f asociada a P: $s(f, P) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1})$;

y la **suma superior** de f asociada a P: $S(f, P) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1})$.

Es claro que $s(f, P) \leq S(f, P)\ \forall\, P$. La propiedad principal de estas sumas es la expuesta en el siguiente

Lema. Para cualquier par P, Q de particiones de $[a, b]$, se tiene $s(f, P) \leq S(f, Q)$.

[1] La primera edición de este libro es de 1893. En la página de portada se puede leer esta cita de J. W. L. Glaisher (1848–1928), del Trinity College de Cambridge: *"I am sure that no subject loses more than mathematics by any attempt to dissociate it from its history."*

Demostración. Veremos que, bajo refinamiento, las s pequeñas crecen y las S grandes disminuyen. Esto dará la conclusión, pues será:

$$s(f,P) \le s(f,P\cup Q) \le S(f,P\cup Q) \le S(f,Q).$$

Para ello, es obvio (inducción) que basta considerar el caso en que refinamos una partición Π añadiéndole un solo punto. Sea, pues, $\Pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, y $\Theta = \Pi \cup \{u\} = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, u, x_k, \dots, x_n\}$, donde $u \in [x_{k-1}, x_k]$;

el término	se reemplaza por la suma
(1) $m_k(x_k - x_{k-1})$	(2) $\mu_1(u - x_{k-1}) + \mu_2(x_k - u)$
en $s(f,\Pi)$	en $s(f,\Theta)$

siendo μ_1, μ_2, respectivamente, los ínfimos de f en los subintervalos $[x_{k-1}, u]$ y $[u, x_k]$ de Θ. Pero $m_k \le \min\{\mu_1, \mu_2\}$, luego $(1) \le (2)$, y ya está probado.

Al pensar en un significado geométrico para las sumas inferiores y superiores de una $f \ge 0$ en $[a,b]$, se ve que las primeras serían aproximaciones por defecto, y las segundas por exceso, de la posiblemente existente *área* comprendida entre la curva $y = f(x)$ y el eje de abscisas en dicho intervalo. Y que existirá un número que mida ese área cuando no haya hueco entre estos dos tipos de aproximaciones. Esto nos lleva de manera natural a comprender las definiciones que vienen ahora.

Integrabilidad. Integral

(I 1) Sea f acotada en el intervalo acotado $[a,b]$. La función f es **integrable** (en el sentido de Darboux) en $[a,b]$ si (y sólo si) $\forall\, \varepsilon > 0$ existen P_ε, Q_ε particiones de $[a,b]$ tales que $S(f,P_\varepsilon) - s(f,Q_\varepsilon) < \varepsilon$.

NOTAS ***1.***– Considerando refinamientos comunes (se podrá desarrollar esta demostración como ejercicio), se puede reformular la definición así:

f es **integrable** (en el sentido de Darboux) en $[a,b]$ si (y sólo si) $\forall\, \varepsilon > 0$ existe una partición P_ε de $[a,b]$ tal que $S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$.

2.– Así pues, la integrabilidad se investiga estimando la pequeñez de las sumas finitas

$$S(f,P) - s(f,P) \;=\; \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\cdot(x_j - x_{j-1}).$$

(I 2) Sea f acotada en $[a,b]$ compacto. Se definen

la **integral inferior** de f en $[a,b]$: $\underline{\int_a^b} f = \sup_P \{s(f,P)\}$,

y la **integral superior** de f en $[a,b]$: $\overline{\int_a^b} f = \inf_P \{S(f,P)\}$;

los anteriores supremo e ínfimo existen pues $\{s(f,P)\}$ está acotado superiormente (por cualquier S grande) y $\{S(f,P)\}$ está acotado inferiormente (por cualquier s pequeña). Y la extensión de las desigualdades a los extremos prueba que siempre se va a cumplir $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$. Es un ejercicio de detalle probar el siguiente hecho, que caracteriza la integrabilidad y se podría haber dado como primera definición de la misma:

Proposición. La función acotada f es integrable en $[a,b] \iff \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Este segundo acercamiento a la noción de integrabilidad proporciona además el concepto de integral definida de una función acotada: Si la función f es integrable en $[a,b]$, el valor común de $\underline{\int_a^b} f$ y $\overline{\int_a^b} f$ se denota por $\int_a^b f$, ó bien $\int_a^b f(x)\,dx$, y se llama la **integral de** f **en** $[a,b]$.

Ejemplos

1.– La función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ no es integrable en ningún intervalo $[a,b]$.

Pues $\forall\, P$, $\quad s(f,P) = 0 \Rightarrow \underline{\int_a^b} f = 0\,, \quad$ y $\quad S(f,P) = b-a \Rightarrow \overline{\int_a^b} f = b-a\,.$

2.– La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es integrable en $[a,b]$, $(0 < a < b)$.

Sea P_n la partición del intervalo $[a,b]$ dada por

$$x_j = a + \frac{j\,(b-a)}{n}, \qquad j = 0,1,\ldots,n\,.$$

La función f es decreciente en el intervalo, luego

$$\begin{aligned} S(f,P_n) - s(f,P_n) &= \frac{b-a}{n}\left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{b}\right)\right] \\ &= \frac{(b-a)^2}{nab}\,, \end{aligned}$$

y $f(x)$ verifica la definición (I 1), pues $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$

Sea entonces, de acuerdo con (I 2), $\int_a^b \frac{dx}{x} = A_{a,b}$. Si $0 < b < a$, definamos $A_{a,b} = -A_{b,a}$. Son de fácil comprobación las propiedades:

(i) $A_{a,b} + A_{b,c} = A_{a,c} \quad \forall\, a,b,c > 0\,.$

(ii) $A_{sa,sb} = A_{a,b} \quad \forall\, a, b, s > 0$.

(iii) $A_{1,ab} = A_{1,a} + A_{1,b} \quad \forall\, a, b > 0$.

De hecho, se puede definir, para $x > 0$, la función **logaritmo neperiano** por $\ln x = A_{1,x}$. La (iii) anterior da la ecuación funcional de toda función logarítmica, y el número e es el único para el que $A_{1,e} = 1$.

Probar las desigualdades $(0 < a < b)$*:*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{b-a}{\ln b - \ln a} \leq \frac{a+b}{2}$$

3.— Se tiene $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, $(0 < a < b)$.

Sea $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$.

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \cdot \left(\frac{1}{x_{j-1}^2} - \frac{1}{x_j^2} \right) \leq \|P\| \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{x_{j-1}^2} - \frac{1}{x_j^2} \right) \\ &= \|P\| \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right), \end{aligned}$$

luego para cada $\varepsilon > 0$, si P_ε es una partición tal que $\| P_\varepsilon \| < \dfrac{\varepsilon\, a^2 b^2}{b^2 - a^2}$, se cumple $S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Por otra parte, las desigualdades

$$\frac{1}{x_j^2} < \frac{1}{x_j\, x_{j-1}} < \frac{1}{x_{j-1}^2} \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n$$

dan, para toda partición P:

$$\begin{aligned} s(f,P) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j^2}(x_j - x_{j-1}) < \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j - x_{j-1}}{x_j\, x_{j-1}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \\ &< \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_{j-1}^2}(x_j - x_{j-1}) = S(f,P), \end{aligned}$$

luego $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

Condiciones suficientes de integrabilidad. Ejemplos

En primer lugar, monotonía y continuidad son, cada una de ellas, condiciones suficientes para que una función sea integrable:

Proposición 1. Si f es acotada y monótona en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Demostración. (En el ejemplo 3 anterior se han seguido los mismos pasos que ahora en este caso general.)

Supongamos por ejemplo que la función f es creciente, sea $\varepsilon > 0$, y sea $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición cualquiera de $[a, b]$ que verifique

$$\|P\| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Como en cada subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$ son (finitos) $M_j = f(x_j)$ y $m_j = f(x_{j-1})$, resulta:

$$\begin{aligned} S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{n} \big[f(x_j) - f(x_{j-1})\big](x_j - x_{j-1}) < \|P\| \sum_{j=1}^{n} \big[f(x_j) - f(x_{j-1})\big] \\ &< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \big(f(b) - f(a)\big) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Proposición 2. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Demostración. Como $[a, b]$ es compacto, ya sabemos que f es uniformemente continua en $[a, b]$. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Por el teorema de Weierstrass, los extremos M_j y m_j de f en el subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$ se alcanzan en puntos y_j, z_j de dicho subintervalo.
Así pues, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, si $\|P\| < \delta(\varepsilon)$, entonces

$$M_j - m_j = f(y_j) - f(z_j) < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Luego para una P así se va a tener:

$$S(f, P) - s(f, P) < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon.$$

Ejemplo 4.— La función $f(t) = e^{-t^2}$ es integrable en $[0, x]$ $\forall x > 0$. Lo cual define la función (no elemental) $\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$. (**Función error,** da las áreas bajo una **campana de Gauss.**)

Proposición 3. Si f es integrable en $[a, b]$, $f\big([a, b]\big) \subset [\alpha, \beta]$ y g es continua en $[\alpha, \beta]$, entonces $g \circ f$ es integrable en $[a, b]$.

Demostración. Véala en M. de Guzmán y B. Rubio, *Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático*, vol. 2, Pirámide, Madrid, 1992, págs. 16 y ss. Como una aplicación de este resultado, resulta la integrabilidad (en un intervalo acotado) de la función $|f|$ cuando f sea integrable en el mismo.

Proposición 4. Si f es acotada en $[a, b]$ y el conjunto de sus puntos de discontinuidad es numerable, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Demostración. No la vemos, pero puede ser un pequeño ejercicio después de leer el siguiente

Ejemplo 5.— La función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ó si } x = 0, \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \text{ irreducible}, \end{cases}$ es integrable en $[0,1]$, y $\displaystyle\int_0^1 f = 0$.

Para toda partición P, la suma inferior asociada es 0. Veamos que $\forall \varepsilon > 0$ podemos encontrar una partición P_ε de $[0,1]$ tal que $S(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$:

Si $\varepsilon > 1$, cualquier partición sirve. En otro caso, el conjunto de puntos $\left\{ x \in [0,1] \colon f(x) \geq \dfrac{\varepsilon}{2} \right\}$ es no vacío y finito, digamos que es el conjunto $\{r_1, r_2, \ldots, r_m = 1\}$. Sea $h \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^h} < \text{mín}\{r_1, r_2 - r_1, \ldots, r_m - r_{m-1}\}$. Consideremos la siguiente partición, llamémosla N, del intervalo $[0,1]$:

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = r_1 - \frac{\varepsilon}{2^{h+1}}, x_2 = r_1 + \frac{\varepsilon}{2^{h+1}}, \ldots, x_{2m-1} = 1 - \frac{\varepsilon}{2^{h+m}}, x_{2m} = 1 \right\}.$$

Se tiene, y con esto terminamos:

$$\begin{aligned} S(f,N) &= \sum_{j=1}^{2m} M_j (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j \text{ impar}} + \sum_{j \text{ par}} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{j \text{ impar}} (x_j - x_{j-1}) + \\ &+ 1 \cdot \sum_{j \text{ par}} (x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{\varepsilon \cdot 2^{-h}}{1 - \frac{1}{2}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ejercicio. Probar que la función $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leq 2, \end{cases}$ es integrable en $[0,2]$ y hallar su integral.

Sumas de Riemann

Presentamos ahora la definición original de Riemann de integrabilidad e integral de una función:

Sea f una función definida en $[a,b]$, y sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Una **suma de Riemann de** f (asociada a P) es cualquier

$$\sigma(f,P) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}), \quad \text{con} \quad \xi_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

(Cuando $\xi_j = x_{j-1}$, la $\sigma(f,P)$ es la **suma de Cauchy**.)

Se dice que el número U es el **límite de las sumas de Riemann** de f en $[a,b]$ cuando $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que si P es una partición de $[a,b]$ con $\|P\| < \delta$, se tiene $|\sigma(f,P) - U| < \varepsilon$ para toda $\sigma(f,P)$, es decir, para toda elección de los ξ_j en los subintervalos correspondientes de P. Se escribe, entendiendo el significado, $U = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1})$. (Se puede probar que si este límite U existe, es único.)

(I 3) La función f es **integrable** (en el sentido de Riemann) en $[a, b]$ cuando existe el límite U de las sumas de Riemann de f en $[a, b]$. Entonces, la **integral de** f **en** $[a, b]$ es ese número U.

En el próximo teorema, debido a P. Du Bois-Reymond y a Darboux, se prueba que las construcciones de la integral por Darboux y por Riemann son equivalentes. Nuestra demostración está tomada de G. Pedrick, *A First Course in Real Analysis*, Springer, 1994.

Teorema de Darboux. La función f es integrable (en el sentido de Riemann) en $[a, b]$, y $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) = U$ si y sólo si f es acotada en $[a, b]$, integrable (en el sentido de Darboux) en $[a, b]$, y $\int_a^b f = U$.

Demostración. $\boxed{\textit{Sólo si}}$ Primeramente, f debe estar acotada en $[a, b]$, pues si no, $\forall \in \mathbb{N}$, si P_n es la equipartición de $[a, b]$ en n subintervalos iguales, f dejará de estar acotada en alguno de los subintervalos de P_n, existiendo ξ_n, η_n, ambos en dicho subintervalo, tales que $f(\xi_n) - f(\eta_n) > n$ (pues si no, en particular $|f(x_j) - f(\xi)| \leq n \ \forall \xi \in [x_{j-1}, x_j]$, de donde $|f(\xi)| \leq n + |f(x_j)|$, y f estaría acotada en $[x_{j-1}, x_j]$).

Y si se forman dos sumas de Riemann de la función f asociadas a esa partición, una, $\sigma(f, P_n)$, en la que se elige ξ_n en el subintervalo de no acotación, y otra, $\sigma'(f, P_n)$, en la que se elige η_n, siendo los mismos los puntos elegidos en los demás subintervalos, se tendría

$$\sigma(f, P_n) - \sigma'(f, P_n) \ > \ b - a,$$

contra la hipótesis de existencia de límite para las sumas de Riemann.

En segundo lugar, veamos que f cumple la definición (I 1) de integrabilidad: Sea $\varepsilon > 0$; por hipótesis $\exists \, \delta > 0$ tal que $\|P\| < \delta \Rightarrow |\sigma(f, P) - U| < \frac{\varepsilon}{4}$, o bien $U - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma(f, P) < U + \frac{\varepsilon}{4}$, para toda suma de Riemann $\sigma(f, P)$.

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $\|P\| < \delta$;

$$\begin{cases} m_j = \inf\limits_{[x_{j-1}, x_j]} \{f(x)\} \Rightarrow \exists \, u_j \in [x_{j-1}, x_j] \text{ tal que } f(u_j) < m_j + \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}, \\ M_j = \sup\limits_{[x_{j-1}, x_j]} \{f(x)\} \Rightarrow \exists \, v_j \in [x_{j-1}, x_j] \text{ tal que } f(v_j) > M_j - \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}; \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f(u_j)(x_j - x_{j-1}) = \sigma_1(f,P) < s(f,P) + \frac{\varepsilon}{4}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f(v_j)(x_j - x_{j-1}) = \sigma_2(f,P) > S(f,P) - \frac{\varepsilon}{4}. \end{cases}$$

Luego se tiene:

$$U - \frac{\varepsilon}{2} \ < \ \sigma_1(f,P) - \frac{\varepsilon}{4} \ < \ s(f,P) \leq S(f,P) \ < \ \sigma_2(f,P) + \frac{\varepsilon}{4} \ < \ U + \frac{\varepsilon}{2},$$

de modo que

$$S(f,P) - s(f,P) \ < \ \varepsilon,$$

y f es integrable (en el sentido de Darboux).

Además, también se tiene entonces

$$U - \frac{\varepsilon}{2} \ < \ s(f,P) \leq \int_a^b f \leq S(f,P) \ < \ U + \frac{\varepsilon}{2},$$

luego

$$\left| \int_a^b f - U \right| \ < \ \varepsilon, \quad \text{y esto } \forall\, \varepsilon \ > \ 0 \ \Rightarrow \ \int_a^b f - U \ = \ 0.$$

$\boxed{\textit{Si}}$ Dado $\varepsilon > 0$, sea P_ε una partición (fija desde aquí) de $[a,b]$ tal que $S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Vamos a probar que $\exists\, \delta > 0$ tal que si Q es una partición de $[a,b]$ tal que $\|Q\| < \delta$, toda suma de Riemann $\sigma(f,Q)$ verifica:

$$s(f,P_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{3} \ < \ \sigma(f,Q) \ < \ S(f,P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{3};$$

pues con ésto, se va a tener $\left| \sigma(f,Q) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$, y por lo tanto, que $\int_a^b f$ es el límite de las sumas de Riemann de f en $[a,b]$.

Sea $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$; sea $Q = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$; elijamos un $u_j \in [y_{j-1}, y_j]$ para cada $j = 1, \ldots, m$, y consideremos la suma de Riemann

$$\sigma(f,Q) \ = \ \sum_{j=1}^{m} f(u_j) \cdot (y_j - y_{j-1});$$

supongamos como primera condición que la norma de Q es menor que la mitad de la longitud del más pequeño de los subintervalos de P_ε ; entonces cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ contiene al menos a uno de los u_j, con lo cual,

$$\sigma(f,Q) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\substack{j \text{ tal que} \\ u_j\in[x_{i-1},x_i]}} f(u_j)\cdot(y_j - y_{j-1})\right) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \sum_{\substack{j \text{ tal que} \\ u_j\in[x_{i-1},x_i]}} (y_j - y_{j-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} M_i\big((x_i - x_{i-1}) + 2\,\|Q\|\big) \leq S(f,P_\varepsilon) + 2\,\|Q\| \sum_{i=1}^{n} M_i .$$

(Se entenderá que M_i representa al supremo de los valores de f en $[x_i, x_{i-1}]$.) Ahora, si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i \leq 0$, se tiene $\sigma(f,Q) < S(f,P_\varepsilon) + \dfrac{\varepsilon}{3}$ sin más. En otro caso, esta última desigualdad se cumple cuando $\|Q\| < \dfrac{\varepsilon}{6\displaystyle\sum_{1=1}^{n} M_i}$.

De modo análogo se llega a

$$\sigma(f,Q) \geq s(f,P_\varepsilon) - 2\,\|Q\| \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

Y aquí, si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \leq 0$, se tiene $\sigma(f,Q) > s(f,P_\varepsilon) - \dfrac{\varepsilon}{3}$ sin más. Y en el otro caso, la misma desigualdad se cumple cuando $\|Q\| < \dfrac{\varepsilon}{6\displaystyle\sum_{1=1}^{n} m_i}$.

Las, en general, tres condiciones sobre $\|Q\|$ proporcionan el número $\delta > 0$ requerido, y la demostración queda completa.

Desde aquí representaremos por$\mathcal{R}$ $[a,b]$ la clase de las funciones integrables en $[a,b]$.

El criterio de integrabilidad de Riemann

La proposición siguiente aparece en la memoria de Riemann citada al comienzo de esta sección. La versión que presentamos (con ayuda de la que da PEDRICKe n su libro) respeta, salvo en lo que se refiere a una parte de la notación, el enunciado original.

Proposición. Sea f acotada en $[a,b]$, con supremo e ínfimo M y m respectivamente. Entonces, $f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \forall\sigma > 0$ y $s > 0$, $\exists d > 0$ tal que, si $P = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ es una partición de $[a,b]$ tal que $\|P\| < d$, entonces

$$\sum_{k\in K}(x_k - x_{k-1}) < s\,, \text{ siendo } K = \{k \in \{1,2,\dots,n\}\colon M_k - m_k \geq \sigma\},$$

donde M_k y m_k son el supremo e ínfimo de f en el subintervalo $[x_k, x_{k-1}]$ de la partición P.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Cuando f es integrable, dados $\sigma > 0$ y $s > 0$, $\exists d > 0$ tal que, si $P = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ es una partición de $[a, b]$ tal que $\| P\| < d$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n}(M_j - m_j)\,(x_j - x_{j-1}) \;<\; s\,\sigma\,.$$

Pero, si K es el conjunto de índices del enunciado,

$$\sum_{j=1}^{n}(M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \geq \sum_{k\in K}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \geq \sigma \sum_{k\in K}(x_k - x_{k-1})\,,$$

luego $\sum_{k\in K}(x_k - x_{k-1}) < s$, como se quería probar.

$\boxed{\Leftarrow}$ Dado $\varepsilon > 0$, sean $\sigma = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$ y $s = \frac{\varepsilon}{2(M-m)} > 0$. Por la hipótesis de esta implicación, $\exists d > 0$ tal que, si $P = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ es una partición de $[a, b]$ tal que $\| P\| < d$, entonces, si $K = \left\{k \in \{1, 2, \dots , n\}\colon M_k - m_k \geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right\}$,

$$\sum_{k\in K}(x_k - x_{k-1}) \;<\; \frac{\varepsilon}{2(M-m)}\,.$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned} S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) &= \sum_{k\in K}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{j\notin K}(M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &< (M - m)\cdot\frac{\varepsilon}{2(M-m)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b - a) = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

luego f es integrable.

Ejercicio. Aplicar el criterio anterior a la función

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

NOTA.— Con algo más de trabajo técnico (verlo, por ejemplo, en M. SPIVAK, *Cálculo en variedades*, Reverté, 1970, págs. 46 y ss.), se llega a probar el **criterio de integrabilidad de Lebesgue**:

$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff f$ es **continua en casi todo punto** x, es decir, si el conjunto de los puntos de discontinuidad de f tiene **medida** 0, lo que quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ dicho conjunto queda cubierto por una sucesión de intervalos cerrados cuya suma (serie) de longitudes es menor que ε.

3.3 TEOREMAS DEL CÁLCULO INTEGRAL

Propiedades básicas

Proposición 1. Sea $c \in (a,b)$; se tiene $f \in \mathcal{R}[a,b] \iff f \in \mathcal{R}[a,c]$ y $f \in \mathcal{R}[c,b]$. Y

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Dado $\varepsilon > 0$, sea P una partición de $[a,b]$ tal que $c \in P$ y $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Los $x_j \in P \cap [a,c]$ hacen una partición A de $[a,c]$, y los $x_j \in P \cap [c,b]$ hacen una partición B de $[c,b]$. Se tiene

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) \;&=\; \big(S(f|_{[a,c]}, A) - s(f|_{[a,c]}, A)\big) \\ &\qquad + \big(S(f|_{[c,b]}, B) - s(f|_{[c,b]}, B)\big) \;<\; \varepsilon, \end{aligned}$$

luego cada paréntesis (que es no negativo) debe ser menor que ε.

$\boxed{\Leftarrow}$ Dado $\varepsilon > 0$, sean P_ε partición de $[a,c]$ y Q_ε partición de $[c,b]$ tales que $S(f|_{[a,c]}, P_\varepsilon) - s(f|_{[a,c]}, P_\varepsilon) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $S'(f|_{[c,b]}, Q_\varepsilon) - s'(f|_{[c,b]}, Q_\varepsilon) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Entonces,

$$(S + S') - (s + s') \;=\; S''(f, P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon) - s''(f, P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon) \;<\; \varepsilon,$$

luego f es integrable en $[a,b]$.

Y $\displaystyle\int_a^b f$, que es el único número comprendido entre las S'' y las s'', es pues igual a la suma de los únicos números comprendidos, respectivamente, entre las S y s y entre las S' y las s', que son $\displaystyle\int_a^c f$ y $\displaystyle\int_c^b f$.

Ahora, con las **definiciones** $\displaystyle\int_a^a f = 0$ y $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$ cuando $b < a$ y $f \in \mathcal{R}[b,a]$, se sigue la igualdad de aditividad de la integral respecto del intervalo de integración:

$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f}$$

para todos los números a, b, c, cuando f sea integrable en el mayor de los intervalos que forman.

Proposición 2. Suponer que $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se verifican:

(i) $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

(ii) $\lambda f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$.

(iii) Si $f \leq g$ en $[a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(iv) $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ y $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

(v) $fg \in \mathcal{R}[a,b]$ y $\displaystyle\left|\int_a^b fg\right| \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (***Desigualdad de Schwarz***).

(vi) Si $\dfrac{1}{g}$ está acotada en $[a,b]$, entonces $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$.

Demostración. (i), (ii) y (iii) (considerar aquí $g-f$) resultan sencillas considerando sumas de Riemann.

(iv) Ya se ha visto que $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ (por cierto, que puede ser que $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ y f no sea integrable, por ejemplo $f(x) = -1$ si $x \notin \mathbb{Q}$ y $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$). La desigualdad sale de aplicar (iii) en $-|f| \leq f \leq |f|$.

(v) Como $fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big)$, y $h \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow h^2 \in \mathcal{R}[a,b]$, por ser h^2 la composición de una función continua y una integrable, resulta $fg \in \mathcal{R}[a,b]$.

Desigualdad de Schwarz$\forall \quad \lambda \in \mathbb{R}$ se tiene, por (iii),

$$0 \leq \int_a^b (\lambda g - f)^2 \; = \; \lambda^2 \left(\int_a^b g^2\right) - 2\lambda \left(\int_a^b fg\right) + \left(\int_a^b f^2\right),$$

luego el discriminante de esta ecuación de segundo grado en λ debe ser negativo.

(vi) Por hipótesis, existen constantes positivas c y C tales que $c < |g| < C$; luego (composición de continua e integrable) $\dfrac{1}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$, y aplicar (v).

Ejercicio. Probar que si f es continua en $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ para todo x y $\displaystyle\int_a^b f = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow

(TFC) Teorema. Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$, y sea $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$ para cada $x \in [a,b]$. Entonces:

(i) F es continua en $[a,b]$.

(ii) Si además f es continua en $x_0 \in [a,b]$, entonces F es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.

Hallar $f(x)$ *si* $f'''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$.

Demostración. (i) Supongamos $|f(x)| \leq M$ en $[a,b]$.

$$\begin{array}{ccccc} -(x-a)\cdot M & \leq & \displaystyle\int_a^x f & \leq & (x-a)\cdot M \\ \downarrow & & \text{si } x \to a^+ & & \downarrow \\ 0 & \leq & \displaystyle\lim_{x\to a^+} F(x) & \leq & 0 \end{array}$$

luego F es continua por la derecha en a.

Sean $y, z \in (a,b]$, $y < z$; se tiene

$$|F(z) - F(y)| \ = \ \left|\int_y^z f\right| \leq \int_y^z |f| \leq M(z-y)\,,$$

luego F es uniformemente continua, y en particular es continua, en $(a,b]$.

(ii) Veamos que $F'_+(x_0) = f(x_0)$ (análogamente, $F'_-(x_0) = f(x_0)$). Sea $h > 0$:

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \ = \ \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} \big[f(x) - f(x_0)\big]\, dx\right).$$

Ahora, como f es continua en x_0, dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|\,f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; luego, si $0 < h < \delta$,

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(x) - f(x_0)|\, dx \ < \ \frac{\varepsilon h}{h} \ = \ \varepsilon\,.$$

Consecuencias. (i) Si f es continua en $[a,b]$, la función $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$ es una primitiva de f en $[a,b]$.

(ii) Si g es derivable, $\mathrm{Im}(g) \subset [a,b]$ y f es continua en $[a,b]$,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)\, dt\right) \ = \ f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,.$$

Hallar $f'(2)$ si $f(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^3-4} \frac{x\, dt}{1+\sqrt{t}}$.

Demostración. (ii) Sea $H(x) = \displaystyle\int_a^{g(x)} f = F\big(g(x)\big)$, donde $F(y) = \displaystyle\int_a^y f$. Aplicar la regla de la cadena.

Regla de Barrow (I). Sea f continua en $[a,b]$ y G una primitiva de f en $[a,b]$; entonces, $\displaystyle\int_a^b f = G(b) - G(a)$.

Demostración. Pues $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$ es otra primitiva de f en $[a,b]$; y así, por una consecuencia del (TVM) diferencial, $F(x) = G(x) + C$ para todo $x \in [a,b]$.

Para $x = a$ resulta $C = -G(a)$; luego

$$F(b) = \int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Regla de Barrow (II). Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y supongamos que existe una función F primitiva de f en $[a,b]$. Entonces, $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dF$$
$$= F(b) - F(a)$$

(Leibniz)

Demostración. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición cualquiera de $[a,b]$; aplicando el (TVM) diferencial en cada subintervalo,

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{n} \big(F(x_j) - F(x_{j-1})\big) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}),$$

lo que es una suma de Riemann, digamos $\sigma(f,P)$. Como $s(f,P) \leq \sigma(f,P) \leq S(f,P)$ y f es integrable, se sigue la conclusión.

Consecuencias. (i) (Fórmula de **integración por partes.**) Si u, v son derivables en $[a,b]$ y $u', v' \in \mathcal{R}[a,b]$, se tiene

$$\int_a^b uv' + \int_a^b u'v = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

(ii) (Fórmula del **cambio de variable.**) Sea $u\colon [a,b] \to [\alpha,\beta]$ estrictamente monótona, derivable y con derivada $u' \in \mathcal{R}[a,b]$; sea f continua en $[a,b]$. Entonces,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_a^b f\big(u(t)\big)\,u'(t)\,dt.$$

Demostraciones (i) Las funciones u y v son continuas, luego integrables. Sea $g = uv$; $g' = u'v + uv' \in \mathcal{R}[a,b]$, luego por la regla de Barrow (II), $\displaystyle\int_a^b g' = g(b) - g(a)$.

(ii) Para cada $y \in [\alpha,\beta]$, sea $F(y) = \displaystyle\int_\alpha^y f$; aplicando (TFC), se tiene que $F'(y) = f(y)$.

Para cada $t \in [a,b]$, sea $g(t) = F\big(u(t)\big)$. Por la regla de la cadena, $g'(t) = f\big(u(t)\big)\,u'(t)$. Aplicando la regla de Barrow (II),

$$\int_a^b f\big(u(t)\big)\,u'(t)\,dt = \int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a)$$
$$= F\big(u(b)\big) - F\big(u(a)\big) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Teoremas del valor medio para integrales

(TVM1) Teorema. Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f = f(c)$.

Demostración. Si f es constante, el teorema es trivial. Si no, sean m y M los valores mínimo y máximo, respectivamente, de f en $[a,b]$. De $m \leq f(x) \leq M$ se obtiene, integrando en $[a,b]$,

$$m(b-a) \;<\; \int_a^b f \;<\; M(b-a) \qquad \therefore \qquad m \;<\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f \;<\; M\,,$$

y de la propiedad (TVI) de las funciones continuas se sigue la conclusión, con $c \in (a,b)$ en este caso.

Es sencillo arreglar esta demostración para probar un resultado más general, del que el anterior es el caso $g(x) = 1$ para todo x:

(TVM1G) Teorema. Si f es continua en $[a,b]$, y g es no negativa e integrable en $[a,b]$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$.

Probar $\dfrac{1}{7\sqrt{2}} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \frac{1}{7}$

El resultado siguiente se suele llamar **segundo teorema del valor medio** del cálculo integral:

(TVM2) Teorema. (i) Sea $f \geq 0$ y decreciente en $[a,b]$; sea $g \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces,

$$\int_a^b fg \;=\; f(a)\int_a^c g \qquad \text{para algún } c \;\in\; [a,b]\,.$$

Probar $\dfrac{3}{8} \leq \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,dx \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$

(Y si $f \geq 0$ y creciente, $\exists\, c \in [a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b fg = f(b)\int_c^b g$.)

(ii) Si f es monótona y g es integrable, se tiene

$$\int_a^b fg \;=\; f(a)\int_a^c g \,+\, f(b)\int_c^b g \qquad \text{para algún } c \;\in\; [a,b]\,.$$

(Spivak.)

Probar $\left|\displaystyle\int_1^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right| \leq 2$

La demostración de este resultado requiere un detalle técnico que solamente dejamos enunciado. Puede encontrarse una demostración en el libro citado de GUZMÁN Y RUBIO

Lema de Abel–Bonnet. Sea $f \geq 0$ y decreciente en $[a,b]$; sea $g \in \mathcal{R}[a,b]$; sean m y M los valores extremos de la función (continua) $\displaystyle\int_a^x g$ en $[a,b]$. Entonces,

$$m\,f(a) \leq \int_a^b fg \leq M\,f(a)\,.$$

Demostración de (TVM2). (i) Aplicando el lema, $\int_a^b fg = \mu f(a)$ con $\mu \in [m, M]$; ahora, por ser $\int_a^x g$ continua, y aplicando (TVI), existe un $c \in [a, b]$ tal que $\mu = \int_a^c g$.

(ii) Supongamos que f sea decreciente; entonces la función $f(x) - f(b)$ es no negativa y decreciente también; aplicando la parte (i) de este teorema, se sigue que existe un $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b \big(f(x) - f(b)\big) g(x)\, dx \;=\; \big(f(a) - f(b)\big) \int_a^c g(x)\, dx\,;$$

luego

$$\int_a^b fg \;=\; f(b) \int_a^b g \,+\, \big(f(a) - f(b)\big) \int_a^c g \;=\; f(a) \int_a^c g \,+\, f(b) \int_c^b g\,.$$

3.4 APLICACIONES GEOMÉTRICAS

Desarrollaremos ahora los métodos prácticos de cálculo, mediante integrales definidas, de áreas de recintos planos, longitudes de arco y volúmenes y áreas de las superficies de sólidos de revolución. Supondremos en las funciones unas condiciones de suavidad suficientes, que precisaremos, para la validez de las correspondientes fórmulas. En el caso de áreas planas, las fórmulas son **las definiciones** del área. Las definiciones generales de longitud, volumen y área de una superficie, en cambio, deben esperar a ser presentadas en un estudio posterior.

Cálculo de áreas planas

(I) Recintos limitados por curvas en explícitas

(a) Área total A limitada por una curva $y = y(x)$, el eje $X'X$, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Supondremos que $y(x)$ es una función, continua en $[a, b]$.

$$A \;=\; \int_a^b \big|y(x)\big|\, dx\,.$$

Si, por ejemplo, $y(a) > 0$ e $y(x) = 0$ tiene (solamente) las soluciones $x_1 < x_2$ en el intervalo (a, b), el área total sería

$$A \;=\; \int_a^{x_1} y(x)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} y(x)\, dx + \int_{x_2}^b y(x)\, dx\,.$$

(b) Área total A limitada por dos curvas de ecuaciones $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Se supone que y_1 e y_2 son funciones, continuas en $[a, b]$.

$$A \;=\; \int_a^b \big|y_1(x) - y_2(x)\big| \, dx \, .$$

(c) Área total A limitada por una curva $x = x(y)$, el eje $Y'Y$, y las rectas horizontales $y = c$ e $y = d$. Supondremos que $x(y)$ es una función, continua en $[c, d]$.

$$A \;=\; \int_c^d \big|x(y)\big| \, dy \, .$$

Ejercicios. 1.– La parábola $y^2 = 2x$ divide al círculo $x^2 + y^2 \leq 8$ en dos regiones de áreas respectivas $2\pi + \frac{4}{3}$ y $6\pi - \frac{4}{3}$.

2.– El área de la región acotada con forma de cuadrilátero curvilíneo determinada por las gráficas de las parábolas $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $y = x^2$ e $y = 2x^2$ es $\frac{1}{6}$.

(II) Recintos limitados por curvas en paramétricas

(a) Área limitada con el eje $X'X$ por un arco simple. Detalladamente, sean $\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right.$ las ecuaciones paramétricas de una curva γ , y supongamos que

- $x(t)$ e $y(t)$ son de la clase $\mathcal{C}^{(1)}\big([t_0, t_1]\big)$,
- $x'(t) > 0 \; \forall t \in [t_0, t_1]$,
- $y(t) > 0 \; \forall t \in [t_0, t_1]$.

Entonces, el área A limitada por el arco de la curva γ , el eje $X'X$ y las rectas verticales $x = x(t_0)$ y $x = x(t_1)$ es

$$A \;=\; \int_{t_0}^{t_1} y(t) \, x'(t) \, dt \, .$$

(b) Área limitada por arcos cerrados. Sean $\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right.$ las ecuaciones paramétricas de una curva γ , y supongamos que

- $x(t)$ e $y(t)$ son de la clase $\mathcal{C}^{(1)}\big([t_0, t_1]\big)$,
- $\big(x(t_0), y(t_0)\big) = \big(x(t_1), y(t_1)\big)$.
- $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0 \; \forall t \in [t_0, t_1]$.

Entonces, el área orientada A encerrada por el arco de la curva γ en $[t_0, t_1]$, que es positiva si, al recorrer t el intervalo $[t_0, t_1]$ la curva es recorrida en sentido antihorario, es

$$\begin{aligned} A &= -\int_{t_0}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt \;=\; \int_{t_0}^{t_1} x(t)\, y'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \big(x(t)\, y'(t) - y(t)\, x'(t)\big)\, dt\,. \end{aligned}$$

Ejercicios. 1.– La **cicloide** es la curva que traza un punto fijo de la circunferencia de un círculo, cuando este círculo rueda sin deslizar, manteniéndose siempre en su plano, a lo largo de una línea recta.

El área comprendida entre la cicloide $\left\{\begin{array}{l} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array}\right.$ $(a > 0)$ y el eje $X'X$, entre $x = 0$ y $x = 2\pi a$, es $3\pi a^2$, es decir, el triple del área de su "círculo generador".

2.– El área interior a la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (ver pág. 47) es $3\pi a^2/8$.

(III) Recintos limitados por curvas en polares

Cuando se fijan en el plano un punto O (*polo*) y una semirrecta OX (*eje polar*), cada punto $P \neq O$ del plano queda unívocamente determinado por la distancia $OP = r > 0$, y el ángulo $\angle XOP = \theta \in [0, 2\pi)$, que se llaman **coordenadas polares** del punto P. Admitamos que el polo es el único punto descrito por $r = 0$. Normalmente vamos a suponer que el polo y el eje polar son el origen y el semieje OX positivo de un sistema de coordenadas cartesianas, de modo que la relación entre las coordenadas polares (r, θ) y las cartesianas (x, y) de un punto P viene dada por

$$x = r\cos\theta\,; \qquad y = r\operatorname{sen}\theta\,.$$

Ahora supondremos que una curva plana γ está definida por medio de una función explícita $r = r(\theta)$, donde $\big(r(\theta), \theta\big)$ son las coordenadas polares del punto genérico que recorre la curva cuando $\theta \in I$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo. El intervalo I podría ser incluso todo $\mathbb{R}$. Por ejemplo, la curva definida en polares por la función $r = a\theta$ $(a > 0)$, para $\theta \in \mathbb{R}^+$, es una **espiral de Arquímedes**.

Si la función $r(\theta)$ es continua en $[\alpha, \beta]$, el área A del triángulo mixtilíneo formado por las semirrectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ y el arco de γ correspondiente a los valores de $\theta \in [\alpha, \beta]$, es

El área de un sector circular de radio r y ángulo (en radianes) α es

$$\tfrac{1}{2}\, r^2 \alpha$$

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \big[r(\theta)\big]^2\, d\theta\,.$$

Pues dada una partición $P = \{\alpha = w_0, w_1, \ldots, w_n = \beta\}$ del intervalo $[\alpha, \beta]$, el área A se aproxima por una suma de áreas de sectores circulares como

$$\sigma(P) = \sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{2}\big[r(\theta_j)\big]^2 (w_j - w_{j-1}),$$

donde θ_j se toma como se quiera en el subintervalo $[w_{j-1}, w_j]$, y esta $\sigma(P)$ no es más que una suma de Riemann correspondiente a la función $\frac{1}{2}r^2$ que es integrable en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

Ejercicio. El área encerrada por la **lemniscata de Bernoulli**, de ecuación cartesiana $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$ (una curva con forma de 8 horizontal) es a^2.

Longitud de arcos de curva

(I) Curva en cartesianas

Sea la curva $y = y(x)$ donde supondremos que la función $y \in \mathcal{C}^{(1)}\big([a, b]\big)$. Si $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ es una partición de $[a, b]$, la longitud L del arco de extremos $\big(a, y(a)\big)$ y $\big(b, y(b)\big)$ se va a aproximar, plausiblemente, por la longitud de la línea quebrada

$$\sigma(P) = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\big[y(x_j) - y(x_{j-1})\big]^2 + (x_j - x_{j-1})^2}\,.$$

Aplicando el (TVM) diferencial en cada subintervalo, resulta

$$\begin{aligned}\sigma(P) &= \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\big[y'(\xi_j)\big]^2 (x_j - x_{j-1})^2 + (x_j - x_{j-1})^2} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sqrt{1 + \big[y'(\xi_j)\big]^2}\,(x_j - x_{j-1}),\end{aligned}$$

donde $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$. Pero esto es una suma de Riemann para la función $\sqrt{1 + \big[y'(x)\big]^2}$ que es integrable en el intervalo $[a, b]$. Luego se tiene la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \big[y'(x)\big]^2}\,dx\,.$$

(II) Curva en paramétricas

Con análoga argumentación, si $x(t)$ e $y(t)$ son funciones $\mathcal{C}^{(1)}\big([t_0, t_1]\big)$, la longitud del arco de la curva $\gamma\colon \big(x(t), y(t)\big)$ entre los puntos correspondientes a los valores del parámetro t_0 y t_1 es

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\big[\dot{x}(t)\big]^2 + \big[\dot{y}(t)\big]^2}\,dt\,.$$

(III) Curva en polares

La longitud del arco de la curva $r = r(\theta)$ entre los puntos correspondientes a los ángulos α y β, cuando $r \in \mathcal{C}^{(1)}\big([\alpha,\beta]\big)$,es

$$L \;=\; \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\big[r(\theta)\big]^2 + \big[r'(\theta)\big]^2}\, d\theta\,.$$

Pues, para $\theta \in [\,\alpha,\beta]$, las ecuaciones

$$x(\theta) \;=\; r(\theta)\cos\theta\,, \qquad y(\theta) \;=\; r(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\,,$$

dan una parametrización de la curva a la que puede aplicarse la fórmula del caso ***(II)*** anterior.

Ejercicio. La longitud de una circunferencia de radio R es $2\pi R$. Hacer el cálculo, por ejemplo con la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, en cartesianas, en paramétricas y en polares.

Volúmenes de revolución

(I) Por discos

(a) En cartesianas. Supongamos que $y(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$. Consideremos la región $\mathcal{R}$ limitada por la curva $y = y(x)$, el eje $X'X$, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. El volumen del sólido engendrado cuando $\mathcal{R}$ hace una revolución completa en torno al eje $X'X$ es

$$V_X \;=\; \pi \int_a^b \big[y(x)\big]^2\, dx\,.$$

Pues se entiende, plausiblemente, que dicho volumen es el límite, cuando la norma de la partición $P = \{x_0 = a\,, x_1\,, \ldots\,, x_n = b\}$ de $[a,b]$ tiende a 0, de las sumas de volúmenes de cilindros

$$\sum_{j=1}^{n} \pi\big[y(\xi_j)\big]^2 (x_j - x_{j-1})$$

donde $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j\,]$. Pero éstas son sumas de Riemann para la función $\pi\, y^2$, que es integrable en $[a,b]$.

(b) En paramétricas. La fórmula que da un volumen como el anterior, cuando la curva que limita la región $\mathcal{R}$ viene dada por ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, con $y(t)$ continua y $x(t)$ con derivada continua en el intervalo $[t_0, t_1\,]$, siendo $a = x(t_0)$ y $b = x(t_1)$, es

$$V_X \;=\; \pi \int_{t_0}^{t_1} \big[y(t)\big]^2\, \dot{x}(t)\, dt\,.$$

Si la curva está definida en polares, con $r(\theta)$ derivable con continuidad, el cálculo de un volumen similar se hace con la fórmula anterior, pasando de polares a paramétricas como ya ha quedado dicho.

(II) Por tubos

En la misma situación que en el anterior apartado (a), el volumen del sólido engendrado cuando la región $\mathcal{R}$ da una vuelta completa en torno al eje $Y'Y$ es

$$V_Y = 2\pi \int_a^b x\, y(x)\, dx\,.$$

Pues, plausiblemente, dicho volumen va a ser el límite, cuando la norma de la partición $P = \{x_0 = a\,, x_1\,, \ldots\,, x_n = b\}$ de $[a, b]$ tiende a 0, de las sumas de volúmenes de "tubos"

$$\sum_{j=1}^{n} \pi \left(x_j^2 - x_{j-1}^2\right) \cdot y(\xi_j) = \sum_{j=1}^{n} 2\pi\, \xi_j\, y(\xi_j)\,(x_j - x_{j-1})\,,$$

donde $\xi_j = \dfrac{x_{j-1} + x_j}{2}$. Pero éstas son sumas de Riemann para la función $2\pi x y$, que es integrable en $[a, b]$.

Ejercicios. 1. El volumen de la esfera de radio R es $\frac{4}{3}\pi R^3$.

2.– El volumen del **toro** engendrado por revolución del círculo $(x-a)^2+y^2 \leq b^2$ $(b \leq a)$ en torno al eje $Y'Y$ es $2\pi^2 a b^2$.

Áreas de superficies de revolución

A partir de su desarrollo plano como sector circular de radio g y longitud de arco $2\pi r$, se obtiene que el área lateral de un **cono de revolución** de radio r y generatriz g es $\pi r g$. Y a partir de esto, aplicando el **teorema de Thales** se obtiene que el área lateral de un **cono de revolución truncado**, cuyas bases son círculos de radios r y R, y cuya generatriz tiene una longitud l, es $2\pi \dfrac{R+r}{2}\, l$.

Con esto, la superficie del sólido de revolución engendrado por la región plana $\mathcal{R}$ a la que nos hemos referido en el epígrafe sobre volúmenes anterior, apartado (a), y donde ahora solamente añadimos que supondremos la función $y(x)$ derivable con continuidad en el intervalo $[a, b]$, tendrá un área S_X aproximable, plausiblemente, por sumas de áreas laterales de conos de revolución truncados, de la forma

$$\sigma(P) = \sum_{j=1}^{n} 2\pi \left(\frac{y(x_{j-1}) + y(x_j)}{2}\right) \cdot \sqrt{\left[y(x_j) - y(x_{j-1})\right]^2 + (x_j - x_{j-1})^2}\,,$$

al considerar una partición $P = \{x_j\}_{j=0}^n$ del intervalo $[a,b]$. Aplicando (TVI) y (TVM) para la función $y(x)$, se tiene

$$\sigma(P) \;=\; \sum_{j=1}^{n} 2\pi\, y(\eta_j)\,\sqrt{1 + \left[y'(\xi_j)\right]^2}\,(x_j - x_{j-1})\,,$$

donde $\eta_j\,,\xi_j \in [x_{j-1}\,,x_j\,]$; esta suma es a su vez aproximable (**teorema de Bliss**, demostrado en Klambauer, pág. 35) por la suma

$$\sigma(P) \;=\; \sum_{j=1}^{n} 2\pi\, y(\xi_j)\,\sqrt{1 + \left[y'(\xi_j)\right]^2}\,(x_j - x_{j-1})\,,$$

que es una suma de Riemann para la función $2\pi\, y\,\sqrt{1 + y'^2}$, que es integrable es $[a,b]$. Luego tenemos la fórmula

$$S_X \;=\; 2\pi \int_a^b y(x)\,\sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}\,dx\,.$$

Cuando la curva generatriz de la superficie venga dada en paramétricas, la fórmula es, análogamente,

$$S_X \;=\; 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t)\,\sqrt{\left[\dot{x}(t)\right]^2 + \left[\dot{y}(t)\right]^2}\,dt\,.$$

Y, finalmente, si la curva se da en polares, $r = r(\theta)$, se pasa a paramétricas, y se aplica la fórmula anterior.

Ejercicios. ***1.*** La superficie del elipsoide de revolución engendrada cuando la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ gira en torno al eje $X'X$, es

$$S \;=\; 2\pi b\left\{ b + \frac{a^2}{c}\,\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{c}{a}\right)\right\}\,,$$

donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

2. La superficie del sólido de revolución engendrado por giro de la **cardioide** $r = a(1 + \cos\theta)$ (donde $a > 0$) en torno al eje polar, es $\dfrac{32}{5}\,\pi a^2$.

3.5 INTEGRALES IMPROPIAS DE RIEMANN.

Se trata ahora de ver cuándo, y cómo, es posible definir $\int_I f$ en casos en que o bien f no está acotada en el intervalo I, o bien I no es acotado, o las dos cosas a la vez. ($\int_I f$ se llama en tales casos una **integral impropia**).

Toda respuesta razonable y útil al "cómo", debiera preservar la aditividad de la integral respecto del intervalo de integración, es decir, que debe seguir sucediendo

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

De modo que si, por ejemplo, $I = \mathbb{R}$ y además f no está acotada en un entorno del punto $c \in \mathbb{R}$, en el caso de existir las siguientes integrales impropias, debiera verificarse

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \;=\; \int_{-\infty}^{d_1} f \;+ \int_{d_1}^{c} f + \int_{c}^{d_2} f + \int_{d_2}^{+\infty} f\,,$$

siendo $d_1 < c < d_2$ arbitrarios.

Con lo cual se ve que basta discutir la definición de dos tipos de integrales impropias:

De primera especie: $\displaystyle\int_{-\infty}^{d} f\,,\ \int_{d}^{+\infty} f$ con $d \in \mathbb{R}$ y f acotada en todo subintervalo acotado del intervalo de integración.

De segunda especie: $\displaystyle\int_a^b f$ con $[a,b]$ acotado y f no acotada en $[a,b)$ o en $(a,b]$, pero acotada en todo subintervalo acotado de $[a,b)$ o, respectivamente, de $(a,b]$.

De hecho, y aunque esto que sigue tiene más interés teórico que práctico, el estudio general podría limitarse al caso de la integral de primera especie del tipo $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, dado que:

$$\int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx = \int_{-d}^{+\infty} f(-t)\,dt \quad \text{con el cambio } x = -t\,;$$

$$\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b^-} f(a+b-t)\,dt \quad \text{con el cambio } x = a+b-t\,;$$

$$\int_{a}^{b^-} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} f\left(\frac{a+bt}{1+t}\right)\frac{b-a}{(1+t)^2}\,dt \quad \text{con el cambio } t = \frac{x-a}{b-x}\,.$$

Definiciones

Si $f \in \mathcal{R}[a,T]\ \forall T > a$ y $\exists \displaystyle\lim_{T\to+\infty}\int_a^T f$, se dice que la **integral impropia de primera especie** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ es **convergente**, y, por definición,

$$\int_a^{+\infty} f \;=\; \lim_{T\to+\infty}\int_a^T f\,.$$

Análogamente (suponiendo ahora que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$), si $f \in \mathcal{R}[a,t]$ $\forall t \in (a,b)$ y $\exists \lim\limits_{t\to b^-} \int_a^t f$, se dice que la **integral impropia de segunda especie** $\int_a^b f$ **es convergente**, y, por definición,

$$\int_a^b f = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f\,.$$

Y, en general, una **integral impropia es convergente** cuando se puede escribir como una suma finita de integrales impropias convergentes de primera y segunda especie. Así, por ejemplo, si f es integrable en todo intervalo acotado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, lo que se escribe $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, ($f$ **localmente integrable en** $\mathbb{R}$), se tendrá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{\substack{a\to -\infty\\ b\to +\infty}} \int_a^b f = \lim_{a\to -\infty} \int_a^c f + \lim_{b\to +\infty} \int_c^b f\,,$$

con c arbitrario, cuando existan los límites del lado derecho. Una integral impropia no convergente se dice **divergente**.

Nota — El **valor principal de Cauchy** de ciertas integrales impropias se define así:

$$\text{Para una } f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(\mathbb{R}): \quad \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{T\to +\infty} \int_{-T}^{T} f\,,$$

$$\text{Para una } f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}\{[a,c) \cup (c,b]\}: \quad \mathrm{VP}\int_a^b f = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f \right).$$

Se tiene el siguiente resultado: si una integral impropia de uno de los dos tipos anteriores converge, entonces su VP existe y es igual al valor de la integral. Pero el enunciado recíproco es falso, pues por ejemplo, $\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{+\infty} x = 0$ y $\mathrm{VP}\int_{-a}^{b} \frac{dx}{x} = \log\left(\frac{b}{a}\right)$ si $a > 0$ y $b > 0$.

Ejemplos y ejercicios

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1}$ si $p > 1$ y es divergente (a $+\infty$) si $p \le 1$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}$ si $p < 1$ y es divergente (a $+\infty$) si $p \ge 1$.

Luego $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ diverge a $+\infty$ para todo p.

3. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$ si $a > 0$, y diverge si $a \le 0$.

4. $\displaystyle\int_t^1 \log x\,dx = \big[x\log x - x\big]_t^1 = t - 1 - t\log t$, luego

$$\int_0^1 \log x\,dx \;=\; \lim_{t\to 0^+}(t-1-t\log t) \;=\; -1\,.$$

5. Para $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \cdots = n!\int_0^\infty e^{-x}dx = n!\,.$

6. Discutir la existencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)^p}$; probar que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx = 2.$

7. $\displaystyle\int_a^\infty f$ convergente no implica que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Encontrar un contraejemplo con una función no negativa en $[0,\infty)$.

Criterio de convergencia de Cauchy. Criterios de comparación

En lo que sigue, $\displaystyle\int_a^b f$ será una integral impropia, con $-\infty < a < b \le \infty$ y $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}[a,b)$.

Criterio de Cauchy. La integral $\displaystyle\int_a^b f$ es convergente $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists t(\varepsilon) \in [a,b)$ tal que si $t < t_1 < t_2 < b$, entonces $\displaystyle\left|\int_{t_1}^{t_2} f\right| < \varepsilon$.

Demostración. Pues llamando $F(t) = \displaystyle\int_a^t f$, el resultado se deduce de la condición (de Cauchy) para que exista el límite $\displaystyle\lim_{t\to b^-} F(t)$:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que si $b-\delta < t_1 < t_2 < b$, entonces $|F(t_1) - F(t_2)| < \varepsilon$.

Por ejemplo, la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx$ diverge, pues $\displaystyle\int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx \ge \frac{1}{\pi}$ implica que no se satisface el criterio de Cauchy.

Los siguientes criterios se refieren a ***integrandos de signo constante.***

Proposición. Sea $f \ge 0$ y localmente integrable en $[a,b)$. $\displaystyle\int_a^b f$ converge $\Longleftrightarrow$ $\exists\, K > 0$ tal que $F(x) = \displaystyle\int_a^x f < K\ \forall x \in [a,b)$. (Si la integral no converge, diverge a $+\infty$, y se suele escribir $\displaystyle\int_a^b f = +\infty$.)

Demostración. Pues con la hipótesis de ser $f \geq 0$, la función $F(x)$ es monótona no decreciente. Y entonces,

$$\lim_{x \to b^-} F(x) = \sup\{F(x) \colon x \in [a, b)\},$$

y existe este límite $\Longleftrightarrow$ F está acotada superiormente.

Criterio de comparación. Sean $f, g \geq 0$ localmente integrables en $[a, b)$ y suponer que $\exists K > 0$ tal que $0 \leq f(x) \leq K\, g(x)$ $\forall x \in [c, b)$ para algún $c \in [a, b)$. Entonces,

$$\int_a^b g \quad \text{convergente} \quad \Longrightarrow \int_a^b f \quad \text{convergente.}$$

La integral

$$\int_1^\infty \frac{x\, dx}{\sqrt{x^5+1}}$$

es convergente

Demostración. Por el criterio de Cauchy, la convergencia de las integrales en $[a, b)$ sólo depende de la convergencia de las integrales en el intervalo $[c, b)$ de la hipótesis. Pero se tiene

$$\int_c^t f \leq K \int_c^t g \leq K \int_a^b g \quad \forall\, t \in [c, b),$$

luego, $\displaystyle\int_a^b g < +\infty \Longrightarrow$ existe $\displaystyle\int_c^b f$, aplicando la proposición anterior.

Criterio de comparación por límite. Sean $f \geq 0$, $g > 0$ localmente integrables en $[a, b)$; suponer que $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

La integral

$$\int_1^\infty \frac{x\, dx}{\sqrt{x^5-1}}$$

es convergente

1. Si $l > 0$, $\int_a^b f$ convergente $\Longleftrightarrow \int_a^b g$ convergente.
2. Si $l = 0$, $\int_a^b g$ convergente $\Longrightarrow \int_a^b f$ convergente.

Demostración. Cuando $\exists \displaystyle\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$, se va a tener $0 < C_1 \leq \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq C_2$ $\forall\, x \in [c, b)$, y aplicando el anterior criterio de comparación (dos veces), f es integrable si y sólo si g es integrable. Cuando aquel límite es cero, solamente se tiene $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq C$ $\forall\, x \in [c, b)$.

Ejercicios. Discutir la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\int_1^\infty \frac{e^{1/x}}{1+x^2}\, dx\,; \int_1^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2}\, dx\,; \int_1^\infty \frac{1}{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt,; \int_1^2 \frac{dx}{\ln x}\,; \int_1^\infty \frac{dx}{\ln(1+x)}\,;$$

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}\,; \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,; \int_0^\infty \frac{|\cos x|}{\sqrt{1-x^2}}\,; \int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-x}\, dx\,.$$

Las funciones Gamma y Beta de Euler

Definición. La integral impropia $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ converge si y sólo si $p > 0$, ya que se tiene:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{p-1}e^{-x}}{x^{p-1}} = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{p-1}e^{-x}}{x^s} = 0 \quad \forall s.$$

Lo que define, para $p \in (0, +\infty)$, la función

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx,$$

que se conoce como **función Gamma de Euler**.

Propiedades.

1. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)\ \forall p > 0$. (Integrar por partes, $x^p = u$.)
2. $\Gamma(n+1) = n!$ para $n = 0, 1, \ldots$
3. $\Gamma \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^+)$, y se tiene $\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}(\log x)^n dx$ para cada $n \in \mathbb{N}$, para todo $p > 0$.
4. **Fórmula de Gauss**: $\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^p\, n!}{p(p+1)\cdots(p+n)}$.

Una fórmula multiplicativa para la función Gamma hará aparecer otra importante función definida por otra integral impropia. Sean $p, q > 0$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy\right)\\
&= \int_0^{+\infty} x^{p-1}\left(\int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-(x+y)}dy\right)dx\\
\boxed{x+y=u}\ &= \int_0^{+\infty} x^{p-1}\left(\int_x^{+\infty} (u-x)^{q-1}e^{-u}du\right)dx\\
\boxed{\textbf{\textit{Fubini}}}\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\int_0^{u} x^{p-1}(u-x)^{q-1}dx\right)du\\
\boxed{x=ut}\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\int_0^{1} u^{p-1}t^{p-1}(1-t)^{q-1}u^{q-1}\,u\,dt\right)du\\
&= \left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1}e^{-u}du\right)\left(\int_0^{1} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt\right)\\
&= \Gamma(p+q)\left(\int_0^{1} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt\right).
\end{aligned}$$

Definición. La integral impropia $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ converge si y sólo si $p>0$ y $q>0$ ya que se tiene:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}} \;=\; 1\,, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}} \;=\; 1\,.$$

Lo que define, para $p,q\in\mathbb{R}^+$, la función

$$B(p,q) \;=\; \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\,,$$

que se conoce como **función Beta de Euler**.

Propiedades.

1. $B(p,q)=B(q,p)$ (cambio $y=1-x$).
2. Otras formas de la función Beta (cambios $x=\cos^2\theta$, $x=y/(1+y)$):

$$\begin{aligned} B(p,q) \;&=\; 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta\,\mathrm{sen}^{2q-1}\theta\,d\theta \\ &=\; \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx \;=\; \int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx\,. \end{aligned}$$

3. $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ (ya ha quedado demostrada).
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$; $\qquad \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}\,.$

   Pues por la anterior, $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \;=\; B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \;=\; 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} d\theta \;=\; \pi\,.$ La otra integral es así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \;=\; 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \;=\; \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

   con el cambio $x^2=t$.
5. $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\mathrm{sen}(p\pi)}$ si $0<p<1$.
6. **Fórmula de duplicación para la función Gamma**:

$$\Gamma(2p) \;=\; \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right).$$

Pues $\Gamma(2p) = \frac{\left(\Gamma(p)\right)^2}{B(p,p)}$, y, con la forma trigonométrica de la función Beta,

$$\begin{aligned} B(p,p) &= 2^{2-2p}\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}2\theta)^{2p-1}d\theta = 2^{1-2p}\int_0^{\pi}(\operatorname{sen}t)^{2p-1}dt \\ &= 2^{2-2p}\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}t)^{2p-1}dt \\ &= 2^{1-2p}B\left(\frac{1}{2},p\right) = 2^{1-2p}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Ejercicios.

1. Para $\nu \in \mathbb{R}^+$ fijo, $\displaystyle\int_0^\infty x^\nu e^{-px}dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$ $\forall p > 0$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^n dx = n!$ para $n \in \mathbb{N}$.
3. Calcular las integrales $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty t^n e^{-t^2/2}\,dt$ para $n \in \mathbb{N}$.
4. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^n}dx$.
5. Hallar el área interior al óvalo $y^2(1+x^2) = 1-x^2$ (Puig Adam, *op cit.*).

   Una respuesta es $B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) - B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$.
6. Hallar el área entre la **cisoide de Diocles** $y^2(a-x) = x^3$ $(a > 0)$ y su asíntota; hallar el volumen del sólido de revolución generado por el giro de esta curva en torno a su asíntota.
7. Lo mismo que en el anterior, con la **versiera de Mª Gaetana Agnesi** $y^2(1+x) = 1-x$.
8. Longitud de la **lemniscata de Bernoulli**, $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.
9. La curva $y^3 - x^3 = 1$ y las tangentes a la misma en sus dos puntos de inflexión delimitan una región acotada. Hallar el área, dejando la expresión final en función del valor $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$.
10. Hallar el área limitada entre la curva $(a^2-x^2)y^2 = x^{4k}$ $(k \geq 1)$ y sus asíntotas (Propuesto por O. Ciaurri).
11. Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \left(1-e^{-t}\right) t^{q-1}dt$, para los valores de q que hacen convergente la integral.

Integrandos de signo variable

Definiciones. Sea $f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$; se dice que la integral impropia $\int_a^b f$ es **absolutamente convergente** cuando la $\int_a^b |f|$ es convergente.

Cuando $\int_a^b f$ es convergente, pero $\int_a^b |f| = +\infty$, se dice que $\int_a^b f$ es **condicionalmente convergente.**

Proposición. $\int_a^b f$ absolutamente convergente $\Longrightarrow \int_a^b f$ es convergente.

Demostración. Por el criterio de Cauchy, $\forall \varepsilon > 0\ \exists t(\varepsilon) \in [a,b)$ tal que si $t < t_1 < t_2 < b$, entonces

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} |f|\right| = \int_{t_1}^{t_2} |f| < \varepsilon .$$

Pero entonces,

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f\right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \;\text{ converge,}$$

aplicando otra vez el criterio de Cauchy.

Ejemplos. 1.– La integral $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ es convergente, pues como $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| < \frac{1}{x^2}$, es absolutamente convergente.

2.– La integral $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ es condicionalmente convergente; anteriormente se ha visto que la integral del valor absoluto diverge; por otro lado, la integral $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ no es impropia; e integrando por partes el otro sumando,

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx ;$$

de modo que la integral converge.

A continuación vemos los dos criterios más usuales para el estudio de la convergencia de integrales con integrando de signo variable:

Criterio de Dirichlet. Sea $f \in \mathcal{R}_{loc}[a,b)$, verificando que $\left|\int_a^c f\right| \leq K\ \forall\, c \in [a,b)$. Sea por otra parte g monótona en $[a,b)$ y tal que $\lim_{x \to b^-} g(x) = 0$. Entonces, la integral $\int_a^b fg$ es convergente.

Demostración. Supongamos por ejemplo, que g es decreciente (si no, se llevaría a cabo la demostración que sigue con las funciones $-g$ y $-f$); como $\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$, se deduce que $g \geq 0$ en $[a,b)$ y que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists c \in [a,b)$ tal que $0 \leq g(x) < \dfrac{\varepsilon}{2K}$ $\forall x \in (c,b)$.

Sean t_1 y t_2 tales que $c < t_1 < t_2 < b$; aplicando (TVM2), $\exists s \in [t_1, t_2]$ tal que

$$\int_{t_1}^{t_2} fg \;=\; g(t_1)\int_{t_1}^{s} f;$$

luego

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} fg\right| \;=\; g(t_1)\cdot\left|\int_{t_1}^{s} f\right| \leq \frac{\varepsilon}{2K}\left(\left|\int_a^s f\right| + \left|\int_a^{t_1} f\right|\right) \;<\; \frac{2K\varepsilon}{2K} \;=\; \varepsilon,$$

y la integral verifica el criterio de convergencia de Cauchy.

Ejemplo.— Si g es una función monótona en $[0,\infty)$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, la integral $\displaystyle\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ es convergente.

Criterio de Abel. Sea $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{loc}}[a,b)$, verificando que $\displaystyle\int_a^b f$ es convergente. Sea por otra parte g monótona y acotada en $[a,b)$. Entonces, la integral $\displaystyle\int_a^b fg$ es convergente.

Demostración. Por ser g monótona y acotada en $[a,b)$, existe el $\lim_{x\to b^-} g(x) = \sup\{g(x)\} = \lambda$.

Entonces, la función $\varphi(x) = g(x) - \lambda$ es monótona y $\lim_{x\to b^-} \varphi(x) = 0$, mientras que, por otro lado, $\displaystyle\int_a^b f$ convergente implica

$$\left|\int_a^c f\right| \leq \left|\int_a^b f\right| \;=\; K \quad \forall c \;\in\; [a,b);$$

aplicando el criterio de Dirichlet, resulta que $\varphi\, f$ es integrable en $[a,b)$. Pero, finalmente, se tiene

$$\int_a^b gf \;=\; \int_a^b \varphi f + \lambda\int_a^b f.$$

La integral $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$***. Lema de Riemann-Lebesgue***

Ya sabemos que esta integral es condicionalmente convergente. Sean $t_n = (2n+1)\,\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{t_n} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \overset{x=(n+\frac{1}{2})z}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)\,z\Big)}{z}\, dz$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{\operatorname{sen}\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)\,z\Big)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right)} - \left(\frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right)} - \frac{1}{z} \right) \operatorname{sen}\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)\,z\Big) \right\} dz = \frac{\pi}{2}\,,$$

pues por un lado, para todo n se verifica

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)\,z\Big)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right)}\, dz = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos z + \cdots + \cos(nz) \right)\, dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\, dz = \frac{\pi}{2}\,,$$

y por otro, la función $\varphi(z) = \dfrac{1}{2\operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right)} - \dfrac{1}{z}$ extendida a $[0,\pi]$ mediante $\varphi(0) = \lim\limits_{z\to 0} \varphi(z) = 0$, es continua, luego integrable, y entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right)} - \frac{1}{z} \right) \operatorname{sen}\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)\,z\Big)\, dz \;=\; 0\,,$$

aplicando el siguiente lema:

Lema de Riemann–Lebesgue. Se tiene $\lim\limits_{\omega\to\infty} \int_a^b \varphi(x)\operatorname{sen}(\omega x)\, dx = 0$, si la función $\varphi \in \mathcal{R}[a,b]$.

Para una φ continua, lo probó Dirichlet. Para una $\varphi \in \mathcal{C}^{(1)}\big([a,b]\big)$, es un resultado de integración por partes: tomando $u = \varphi(x)$,

$$\int_a^b \varphi(x)\operatorname{sen}(\omega x)\, dx = \frac{1}{\omega}\big[-\varphi(x)\ \cos(\omega x)\big]_a^b + \frac{1}{\omega}\int_a^b \varphi'(x)\cos(\omega x)\, dx\,,$$

pero

$$\left| \int_a^b \varphi'(x)\cos(\omega x)\, dx \right| \le \int_a^b |\varphi'(x)|\ dx \;=\; A\,,$$

digamos, ya que como $|\varphi'|$ es continua, es integrable. Entonces se tiene

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{\omega}\int_a^b \varphi'(x)\cos(\omega x)\, dx \;=\; 0\,,$$

y ya sale el lema en este caso. La demostración más general del lema, para φ integrable, se puede encontrar en el libro de GUZMÁN Y RUBIO ya citado, de donde también hemos tomado el cálculo de la integral anterior. Riemann probó el lema para el caso de un intervalo de la forma $[a, a+2\pi]$, y a continuación vamos a ver cómo lo hizo.

La versión original del lema

Sigue ahora, pues, un extracto con explicaciones de la memoria de Riemann, en el momento en que va a demostrar que, si f es una función periódica de período 2π, integrable en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y se supone una **representación en serie de Fourier** para f en la forma

$$f(x) \;=\; a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen}(2x) + \ldots + \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos(2x) + \ldots ,$$

entonces los coeficientes a_n, b_n tienden a 0 para $n \to \infty$, lo que constituye la versión original del lema de Riemann–Lebesgue.

Se sabía que esos coeficientes tienen una expresión como integrales definidas de la forma

$$a_n \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx\,, \qquad b_n \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\,.$$

Riemann se va a referir a la integral siguiente que abarca ambos casos si se toma $a = 0$ o $a = -\frac{\pi}{2n}$ respectivamente:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} n(x-a)\,dx\,.$$

Para reconocer si los coeficientes de la serie llegan a ser siempre infinitamente pequeños, no siempre se podrá partir de su expresión mediante integrales definidas, y habrá que recurrir a otros métodos. Es importante, sin embargo, considerar aparte un caso en el cual dicha propiedad es consecuencia inmediata de la forma de la función, a saber: cuando la función $f(x)$ permanece siempre finita y es susceptible de integración.

En tal caso, si se divide el intervalo completo de $-\pi$ a π en pequeños intervalos de longitudes $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, y se designan por $D_1, D_2, D_3, \ldots$, las mayores oscilaciones de la función en dichos intervalos, la suma

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \delta_3 D_3 + \ldots$$

se hará infinitamente pequeña cuando todos los δ tiendan a 0.

Aquí, Riemann acaba de usar la proposición que nosotros hemos enunciado (y probado, en el **Sólo si** del teorema de Darboux) así: $f \in \mathcal{R}[a, b]$ implica que dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que si P es una partición de $[a, b]$ tal que $\|P\| < \delta$, entonces $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

Esto supuesto, si se descompone la integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \operatorname{sen} n(x-a)\, dx,$$

que representa, salvo por el factor $\frac{1}{\pi}$, *los distintos coeficientes de la serie, o lo que es lo mismo la integral*

$$\int_{a}^{a+2\pi} f(x) \operatorname{sen} n(x-a)\, dx,$$

tomada desde $x = a$,

Recordemos que se está considerando que f está definida en $\mathbb{R}$ y es periódica de período 2π; n es fijo; $a \in [-\pi, \pi]$; entonces se tiene, mediante el cambio de variable $x = y - 2\pi$,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{a} f(x) \operatorname{sen} n(x-a)\, dx &= \int_{\pi}^{a+2\pi} f(y-2\pi) \operatorname{sen} n(y-a-2\pi)\, dy \\ &= \int_{\pi}^{a+2\pi} f(y) \operatorname{sen} n(y-a)\, dy,\end{aligned}$$

luego efectivamente, usando ésto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} n(x-a)\, dx \;=\; \int_{-\pi}^{a} + \int_{a}^{\pi} \;=\; \int_{a}^{a+2\pi} f(x) \operatorname{sen} n(x-a)\, dx\,.$$

en las integrales parciales correspondientes a intervalos de longitud igual a $2\pi/n$, *entonces cada una de ellas proporciona a aquella suma una porción más pequeña que el producto de* $2/n$ *por la mayor oscilación de* $f(x)$ *en su intervalo, y la suma de estas porciones es más pequeña que una cantidad que, de acuerdo con la hipótesis, se hace infinitamente pequeña con* $2\pi/n$.

En efecto, estas integrales son de la forma

$$\int_{a+s\frac{2\pi}{n}}^{a+(s+1)\frac{2\pi}{n}} f(x) \operatorname{sen} n(x-a)\, dx\,.$$

El seno es positivo en la primera mitad del intervalo, y negativo en la segunda. Luego, si se designa por M_s *al mayor valor de* $f(x)$ *en este intervalo* $s^{\text{ésimo}}$, *y por* m_s *al menor valor, es claro que la integral aumenta si se sustituye* $f(x)$ *por* M_s *en la primera mitad del intervalo y por* $-m_s$ *en la segunda mitad, y que la integral disminuye si se sustituye* $f(x)$ *por* m_s *en la primera mitad y por* $-M_s$ *en la segunda. En el primer caso se obtiene* $\frac{2}{n}(M_s - m_s)$, *y, en el segundo,* $\frac{2}{n}(m_s - M_s)$.

Llamemos nosotros $x_s = a + \frac{2\pi s}{n}$, $y_s = \frac{1}{2}(x_s + x_{s+1}) = a + \frac{(2s+1)\pi}{n}$; la estimación que se hace aquí es así: como $\operatorname{sen} n(x-a) \geq 0$ en $[x_s, y_s]$ y $\operatorname{sen} n(x-a) \leq 0$ en $[y_s, x_{s+1}]$, se tienen:

$$f(x)\operatorname{sen} n(x-a) \leq M_s \operatorname{sen} n(x-a) \text{ en } [x_s, y_s] \implies$$

$$\int_{x_s}^{y_s} f(x)\operatorname{sen} n(x-a)\,dx \leq M_s \int_{x_s}^{y_s} \operatorname{sen} n(x-a)\,dx \overset{n(x-a)=y}{=} \frac{2}{n}M_s ,$$

$$f(x)\operatorname{sen} n(x-a) = \big(-f(x)\big)\big(-\operatorname{sen} n(x-a)\big) \leq (-m_s)\big(-\operatorname{sen} n(x-a)\big)$$

$$\text{en } [y_s, x_{s+1}] \implies$$

$$\int_{y_s}^{x_{s+1}} f(x)\operatorname{sen} n(x-a)\,dx \leq (-m_s)\int_{y_s}^{x_{s+1}} \big(-\operatorname{sen} n(x-a)\big)\,dx = -\frac{2}{n}m_s ,$$

luego $I_s = \displaystyle\int_{x_s}^{x_{s+1}} f(x)\operatorname{sen} n(x-a)\,dx \leq \frac{2}{n}(M_s - m_s)$.

De modo similar se hace la estimación inferior $\dfrac{2}{n}(m_s - M_s) \leq I_s$.

> *La integral parcial, abstracción hecha del signo, es pues más pequeña que* $\frac{2}{n}(M_s - m_s)$,

Ya que tiene $\frac{2}{n}(m_s - M_s) \leq I_s \leq \frac{2}{n}(M_s - m_s)$; entonces es $|I_s| \leq \frac{2}{n}(M_s - m_s)$.

> *y, por consiguiente, la integral* $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(x)\operatorname{sen} n(x-a)\,dx$ *es más pequeña [en valor absoluto] que*
>
> $$\frac{2}{n}(M_1 - m_1) + \frac{2}{n}(M_2 - m_2) + \dots .$$

Pues, llamando $I(n)$ a la integral en cuestión, y R a la partición del intervalo $[a, a+2\pi]$ adoptada, se tiene

$$\begin{aligned} |I(n)| &\leq \sum |I_s| \leq \frac{2}{n}\sum (M_s - m_s) = \frac{1}{\pi}\sum (M_s - m_s)\frac{2\pi}{n} \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(S(f,R) - s(f,R)\Big). \end{aligned}$$

> *Esta suma, como $f(x)$ es susceptible de integración, debe hacerse infinitamente pequeña cuando la longitud de intervalo $2\pi/n$ tienda a 0.*
>
> *Así pues, en el caso que hemos supuesto, los términos [de la serie] se harán infinitamente pequeños con $1/n$, cualquiera que sea x.*

Así pues, no solamente se ha probado que $I(n)$ es una $o(1)$ para $n \to \infty$, sino que

$$I(n) = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{para } n \to \infty$$

(notación **O mayúscula** de Landau). En general, se escribe $f(x) = O\big(g(x)\big)$ para $x \to a$ cuando es $\big|f(x)\big| \le C\, g(x)$ en un entorno de a, donde C es una constante y $g(x) \ge 0$ en el entorno.

3.6 INTEGRALES MÚLTIPLES

En esta sección final del programa de la asignatura, se trata de echar un vistazo a la integral de Riemann para funciones reales definidas en $\mathbb{R}^n$. La presentación teórica que sigue, hecha para el caso $n = 2$, ilustrará un estudio posterior más general.

Integral doble

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto **acotado** del plano, lo que quiere decir que A está contenido en un **rectángulo** $\mathcal{R} = I \times J$, donde I y J son intervalos acotados de $\mathbb{R}$. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función (real, de dos variables reales) **acotada** en su dominio A, lo que quiere decir que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\big|f(x,y)\big| < C$ para todo punto $(x,y) \in A$.

Extendamos la definición de la función f a todo el rectángulo $\mathcal{R}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f\colon I \times J \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x\,,y) \quad &\longmapsto \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in A\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin A\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Sean $P_1 = \{a_1 = x_0\,, x_1\,, \dots, x_m = b_1\}$ una partición del intervalo I, y $P_2 = \{a_2 = y_0\,, y_1\,, \dots, y_n = b_2\}$ una partición del intervalo J, que descomponen el rectángulo $\mathcal{R}$ en una partición rectangular P formada por $m\,n$ subrectángulos $\mathcal{R}_{jk} = I_j \times J_k$, si denotamos $I_j = [x_{j-1}, x_j\,]$, y $J_k = [y_{k-1}, y_k\,]$, con $j = 1, \dots, m$ y $k = 1, \dots, n$. Definimos el **área de** $\mathcal{R}_{jk}$ por $a_{jk} = (x_j - x_{j-1}\,)\,(y_k - y_{k-1}\,)$. Sean ahora

$$\begin{aligned} m_{jk} &= \inf\{f(x,y)\colon (x,y) \in I_j \times J_k\}\,, \\ M_{jk} &= \sup\{f(x,y)\colon (x,y) \in I_j \times J_k\}\,, \end{aligned}$$

y definamos las **sumas superior e inferior de f relativas a la partición P de $\mathcal{R}$** respectivamente por

$$S(f,P) \;=\; \sum_{j,k} M_{jk}\, a_{jk}\,, \qquad s(f,P) \;=\; \sum_{j,k} m_{jk}\, a_{jk}\,.$$

Se puede probar que, si P y Q son dos particiones cualesquiera de $\mathcal{R}$, y m y M son, respectivamente, el ínfimo y el supremo de los valores de f en A, se tiene

$$m(b_1-a_1)(b_2-a_2) \le s(f,P) \le S(f,Q) \le M(b_1-a_1)(b_2-a_2)\,.$$

Tiene sentido, entonces, definir las **integrales superior e inferior de f en A** respectivamente por

$$\underline{\int_A} f \;=\; \sup_P\big\{s(f,P)\big\}\,, \quad \text{y} \quad \overline{\int_A} f \;=\; \inf_P\big\{S(f,P)\big\}\,.$$

La integral inferior es menor o igual que la superior. Si son iguales, se dice que f es **integrable Riemann en A** y el valor común a ambas, denotado por

$$\int_A f \;=\; \int_A f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

es la **integral de Riemann de f en A**. Cuando $f(x,y)\ge 0$ en A, el valor de $\int_A f$ da el **volumen** del “cilindro” recto cuya base es el conjunto A en el plano OXY y cuya “tapa” es la superficie $z=f(x,y)$.

Como en el caso de funciones de una variable, f es integrable en $A \iff \forall\varepsilon>0$ hay una partición P_ε del rectángulo $\mathcal{R}\supset A$ tal que $S(f,P_\varepsilon)-s(f,P_\varepsilon)<\varepsilon$. Y también, $\int_A f = U$ si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que, si P es una partición de $\mathcal{R}$ en sub-rectángulos de lados menores que δ, entonces se tiene

$$\sigma(f,P) \;=\; \left|\sum_{j,k} f(\xi_{jk},\eta_{jk})\cdot a_{jk} - U\right| \;<\; \varepsilon\,,$$

donde los $(\xi_{jk},\eta_{jk})\in I_j\times J_k$ se eligen arbitrariamente.

La caracterización de la integrabilidad del tipo de la que vimos en la pág. 96 es que f es integrable en A si y sólo si el conjunto de puntos de discontinuidad de la extensión de f al rectángulo $\mathcal{R}$ mediante $f(x,y)=0$ para $(x,y)\notin A$, **tiene medida cero**. Por ejemplo, f es integrable en A cuando f es continua en A y la **frontera de A**, $\partial A=\overline{A}-A$, es una **curva cerrada simple de clase $\mathcal{C}^{(1)}$**. Sin precisar el significado de estos términos (ver para ello, por ejemplo, W. Fleming, *Functions of several variables*, Springer, 1977, pág. 250), bien descriptivos por otra parte, baste decir que es lo que ocurre en todos los ejemplos elementales.

También se puede desarrollar, de un modo y con unos resultados similares a los vistos en el caso de una variable, una teoría de **integrales impropias de Riemann**, que estudia la posibilidad de extender la definición de $\int_A f$ a casos en que A no es acotado o f no está acotada en A.

El área de un conjunto plano. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ y $c_A(x,y) = 1\ \forall (x,y) \in A$. Cuando la función c_A es integrable en A el número

$$a(A) \;=\; \int_A c_A \;=\; \iint_A dx\, dy$$

es el **área del conjunto** A.

Integrales iteradas

Sea $A = [a,b] \times [c,d]$ y f continua (por ejemplo) en A. Entonces, las funciones (de una variable) $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,dy$, $y \mapsto \int_a^b f(x,y)\,dx$ son integrables, respectivamente en los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$, y se tiene

$$\int_A f \;=\; \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx \;=\; \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy\,,$$

fórmula que permite el cálculo de una integral doble mediante el de dos integrales simples iteradas. El intercambio de orden de integración iterada constituye un caso particular sencillo del **teorema de Fubini**.

Para dar otros ejemplos, sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $[a,b]$, y sea $A = \{(x,y) \colon x \in [a,b]\,; f(x) \le y \le g(x)\}$. Si f es continua en A, se tiene

$$\int_A f \;=\; \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

Análogamente, sean $f(y)$ y $g(y)$ dos funciones continuas en el intervalo $[c,d]$, y sea $A = \{(x,y) \colon y \in [c,d]\,; f(y) \le x \le g(y)\}$. Si f es continua en A, se tiene

$$\int_A f \;=\; \int_c^d \left(\int_{f(y)}^{g(y)} f(x,y)\,dx \right) dy\,.$$

Ejercicios.– 1 (Marsden). Sea $A = [0,1] \times [0,1]$, el **cuadrado unidad**.

Se tiene

$$\int_A x\,(x+y)\,dx\,dy \;=\; \frac{7}{12}\,.$$

2. Sea B el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(1,1)$. Se tiene

$$\int_B y\,(x+y)\,dx\,dy \;=\; \frac{53}{24}\,.$$

Hacer el cálculo de las dos formas posibles.

3 (Fleming) . Cambiando el orden de integración , comprobar que

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2+y)\,dy \;=\; \frac{16}{15}\,.$$

4 Hallar el volumen del tetraedro de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ mediante una integral doble.

5 (Marsden). Comprobar el siguiente cálculo, directamente y cambiando el orden de integración:

$$\int_0^1 dx \int_1^{e^x} (x+y)\,dy \;=\; \frac{e^2-1}{4}\,.$$

Cambio de variables

En el caso de una variable, la fórmula del cambio de variable de tipo $x = g(t)$, siendo g de clase 1 y con derivada no nula, recordemos que era

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_{t_0=g^{-1}(a)}^{t_1=g^{-1}(b)} f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,dt\,.$$

Miremos al factor $g'(t)$ como un factor puntual de dilatación de longitudes de intervalos en el cambio, pues $dx = g'(t)\,dt$. En el caso más sencillo, de un cambio lineal $x = kt$, el factor k es de dilatación “global”, pues

$$b-a \;=\; \int_a^b dx \;=\; \int_{a/k}^{b/k} k\,dt \;=\; k\left(\frac{b}{k}-\frac{a}{k}\right)\,.$$

Esperemos, entonces, que en el caso de dos variables, cuando se hace un cambio de variables del tipo $(x,y) = G(t,s)$ mediante unas ecuaciones del tipo $x = x(t,s)$, $y = y(t,s)$, y son $\mathcal{R} = G(\mathcal{R}^*)$ y $\mathcal{R}^*$ los dominios de una integral en el plano (x,y) y en el plano (t,s) respectivamente, se verifique una fórmula como

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \iint_{\mathcal{R}^*} f\big(x(t,s),y(t,s)\big)\,H(t,s)\,dt\,ds\,,$$

donde $H(t,s)$ sea el factor puntual de dilatación de áreas de rectángulos en el cambio, es decir, la función $H(t,s)$ tal que $dx\,dy = H(t,s)\,dt\,ds$.

En el caso de un cambio de variables lineal, es decir, dado por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0,$$

esta condición asegura que el cambio es inyectivo (el rango de la matriz es 2), y además el factor constante de dilatación de áreas en el cambio es el valor absoluto del determinante de la matriz del cambio, $|ad - bc|$, pues si $\mathcal{R}^*$ es el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ del plano (t,s), el área del paralelogramo transformado $\mathcal{R}$ en el plano (x,y), que tiene como vértices los puntos $(0,0)$, (a,c), (b,d) y $(a+b, c+d)$ es $|ad - bc|$. Así que, en particular, se tiene

$$\iint_{\mathcal{R}} dx\, dy = |ad - bc| \iint_{\mathcal{R}^*} dt\, ds,$$

y, de igual modo,

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dx\, dy = |ad - bc| \iint_{\mathcal{R}^*} f(at + bs, ct + ds)\, dt\, ds,$$

De hecho, una condición suficiente para que las ecuaciones generales $x = x(t,s)$ e $y = y(t,s)$ definan un "buen" cambio de variables (inyectivo y de clase uno él y el cambio inverso) de $\mathcal{R}^*$ a $\mathcal{R}$ es, como se estudiará en el curso de varias variables, que $x(t,s)$ e $y(t,s)$ tengan derivadas parciales continuas en $\mathcal{R}^*$ y que el determinante **jacobiano** de la transformación,

$$J(t,s) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)} = \begin{vmatrix} x_t(t,s) & x_s(t,s) \\ y_t(t,s) & y_s(t,s) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \forall (t,s) \in \mathcal{R}^*,$$

donde los subíndices indican derivación parcial. La transformación $(t,s) \overset{G}{\mapsto} (x,y)$ es aproximada localmente, en el entorno de un punto (t,s), por la transformación lineal (la **diferencial de** G)

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_t(t,s) & x_s(t,s) \\ y_t(t,s) & y_s(t,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ ds \end{pmatrix},$$

y el valor absoluto del determinante jacobiano es el factor de dilatación de áreas entre los rectángulos infinitesimales $d\mathcal{R}^*$ y $d\mathcal{R}$.

La fórmula del cambio de variable para integrales dobles será pues, plausiblemente,

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\mathcal{R}^*} f\big(x(t,s), y(t,s)\big)\ |J(t,s)|\ dt\, ds,$$

donde $J(t,s)$ es el determinante jacobiano $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}$.

Ejemplo.– El área del círculo $\mathcal{C} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le R^2\}$ es $\iint_{\mathcal{C}} dx\, dy$.

Cambiando a polares (r, θ) , con $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, el jacobiano es

$$J(r,\theta) \;=\; \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \;=\; r \;>\; 0\,,$$

Y el recinto transformado en el plano (r, θ) es $\mathcal{C}^* = [0, R] \times [0, 2\pi)$, luego

$$\iint_{\mathcal{C}} dx\, dy \;=\; \iint_{\mathcal{C}^*} r\, dr\, d\theta \;=\; \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\, dr \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2}\, d\theta \;=\; \pi R^2\,.$$

Ejercicios.– ***1.*** Hallar el área interior a una elipse de semiejes a y b cambiando una integral doble en cartesianas con $x = a\,r\cos\theta$, $y = b\,r\,\mathrm{sen}\,\theta$.

2.– El área de la región acotada con forma de cuadrilátero curvilíneo determinada por las gráficas de las parábolas $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $y = x^2$ e $y = 2x^2$ es $\frac{1}{6}$.

3. El **centro de gravedad** de un recinto plano $\mathcal{D}$ es el punto $G(g_X, g_Y)$ definido por

$$g_X \;=\; \frac{\iint_{\mathcal{D}} x\, dx\, dy}{\iint_{\mathcal{D}} dx\, dy}\,, \qquad g_Y \;=\; \frac{\iint_{\mathcal{D}} y\, dx\, dy}{\iint_{\mathcal{D}} dx\, dy}\,.$$

El centro de gravedad del recinto limitado por el eje OX y por la cicloide de ecuaciones paramétricas $x = R(1 - \cos t)$, $y = R(t - \mathrm{sen}\, t)$ entre $x = 0$ y $x = 2\pi R$ es el punto $\left(\pi R, \frac{5}{6}R\right)$.

Integrales triples

Los resultados y técnicas vistos para integrales dobles se generalizan para la integración de funciones reales de n variables. Solamente veremos unos ejemplos. El primero es sencillo (MARSDEN, pág. 304). Con el segundo, el profesor Rafael Cid impresionaba en la pizarra a sus alumnos de Astronomía de segundo curso de Zaragoza, que sólo sabían algo de cálculo de una variable, una mañana de finales de octubre del curso 273 El tercero, que puede encontrarse en el libro de FLEMING , pág. 220, es un buen ejercicio para resolver, o dejar propuesto, el último día de clase.

Ejemplo 1.– Evaluar la integral

$$\iiint_A (x + y + z)^2\, dx\, dy\, dz\,,$$

donde $A \subset \mathbb{R}^3$ es el tetraedro de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

Solución: Procedemos de la siguiente manera. Aquí A es simplemente el conjunto $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0\,,\; y \ge 0\,,\; z \ge 0\,,\; x + y + z \le 1\right\}$.

En los puntos de A, los valores extremos de x son 0 y 1. Para un $\underline{x}$ fijo, los puntos $(\underline{x}, y, z)$ están en un triángulo donde los valores extremos de y son 0 y $1-\underline{x}$. Para $\underline{x}$ e $\underline{y}$ fijos, los puntos $(\underline{x}, \underline{y}, z)$ están en un segmento donde z varía desde 0 a $1-(\underline{x}+\underline{y})$. Luego

$$\iiint_A (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz \;=\; \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)^2\,dz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{1-(x+y)^3}{3}\right) dy \;=\; \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{3} + \frac{x^4}{12}\right) dx \;=\; \frac{1}{10}\,.$$

Ejemplo 2.– La fuerza de atracción gravitatoria que una esfera de radio R, cuya masa total M se distribuye por los puntos de la misma con una densidad que sólo depende de la distancia al centro de la esfera, ejerce sobre un punto material de masa m que está a una distancia $r > R$ del centro de la esfera, es $\frac{GMm}{r^2}$, es decir, es la misma fuerza que ejercería sobre m un punto material P de masa M situado en el centro de la esfera.

Solución: Nos referiremos a unos ejes cartesianos de origen en el centro de la esfera, en los que el punto P tenga unas coordenadas $(0,0,r)$. Sea $Q(x,y,z)$ un punto cualquiera de la esfera $(x^2+y^2+z^2=\rho^2\le R^2)$, y sea $q=\overline{QP}$ la distancia de Q a P. La fuerza ejercida sobre la masa m en el punto P por el elemento de masa dm situado en el punto Q tiene, según la ley de Newton, módulo igual a

$$\frac{Gm}{q^2}\,dm \;=\; \frac{Gm}{q^2}\,\sigma(\rho)\,dx\,dy\,dz\,,$$

y la dirección de la recta PQ. Aquí, $\sigma(\rho)=\dfrac{dm}{dv}$ es la densidad en el punto Q. Las componentes de esta fuerza en las direcciones de los ejes X e Y se cancelarán con las correspondientes a la fuerza ejercida sobre la masa m en el punto P por el elemento de masa de la esfera situado en el punto Q' simétrico del punto Q respecto del eje Z, y sólo será útil para la atracción total la componente Z de la fuerza,

$$\frac{Gm}{q^2}\,\sigma(\rho)\,\cos\alpha\,dx\,dy\,dz\,,$$

donde $\alpha=\angle OPQ$, y $\cos\alpha=\dfrac{q^2+r^2-\rho^2}{2qr}$ aplicando el **teorema del coseno**.

De modo que la fuerza gravitatoria total ejercida por la esfera sobre la masa m en P es, integrando sobre todos los puntos de la esfera E,

$$\mathcal{F} \;=\; \frac{Gm}{2r}\iiint_E \sigma(\rho)\frac{q^2+r^2-\rho^2}{q^3}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Vamos a pasar a coordenadas polares esféricas con centro en el origen. Sean el **radio** $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \in (0,R]$, la **longitud** $\varphi = \angle XOQ_0 \in [0,2\pi)$, donde Q_0 es la proyección del punto Q en el plano OXY, es decir, el punto $Q_0(x,y,0)$, y la **colatitud** $\theta = \angle ZOQ \in [0,\pi]$, de modo que se tiene

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = \rho \cos\theta \end{cases}$$

El jacobiano de esta transformación es

$$J(\rho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\operatorname{sen}\theta > 0\,,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{Gm}{2r}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sigma(\rho)\,\rho^2\,d\rho \int_0^{\pi} \frac{q^2+r^2-\rho^2}{q^3}\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\ &= \frac{\pi Gm}{r}\int_0^R \sigma(\rho)\,\rho^2\,d\rho \int_0^{\pi} \frac{q^2+r^2-\rho^2}{q^3}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,. \end{aligned}$$

Hagamos en la integral interior el cambio de variable $\theta \mapsto q$ dado por la relación (geométrica) $q^2 = r^2+\rho^2-2r\rho\cos\theta$. Entonces, $2q\,dq = 2r\rho\operatorname{sen}\theta\,d\theta$, resultando

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{\pi Gm}{r^2}\int_0^R \sigma(\rho)\,\rho\,d\rho \int_{r-\rho}^{r+\rho} \frac{q^2+r^2-\rho^2}{q^2}\,dq \\ &= \frac{\pi Gm}{r^2}\int_0^R \sigma(\rho)\,\rho\,\left[q - \frac{r^2-\rho^2}{q}\right]_{r-\rho}^{r+\rho} d\rho \\ &= \frac{Gm}{r^2}\,4\pi\int_0^R \sigma(\rho)\,\rho^2\,d\rho \;=\; \frac{GmM}{r^2}\,, \end{aligned}$$

pues, integrando también por cambio a polares esféricas,

$$\begin{aligned} M &= \iiint_E \sigma(\rho)\,dx\,dy\,dz \;=\; \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta \int_0^R \rho^2\,\sigma(\rho)\,d\rho \\ &= 4\pi\int_0^R \rho^2\,\sigma(\rho)\,d\rho\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.– El volumen n–dimensional de la n–esfera $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leq R^2$ es, para $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n \;=\; \frac{\pi^{n/2}\,R^n}{(n/2)\,\Gamma(n/2)}\,,$$

en t́erminos de la función Gamma de Euler.

Desigualdades. (Una lectura recomendada)

El profesor M. de Guzmán publicó en 1977 (ed. Alhambra, proyecto MT-62) un bello libro de Matemáticas, titulado *Mirar y ver, nueve ensayos de geometría intuitiva*. Nos atrevemos a recomendar, para finalizar estos apuntes, su lectura. En el ensayo sexto, titulado *Cuatro desigualdades fecundas*, el lector se encuentra con una buena lección de Análisis donde se demuestran las cuatro desigualdades siguientes:

Desigualdad de Young

Si $\phi(x)$ es una función continua y estrictamente creciente en $[0, +\infty)$ y $\psi(x)$ es su función inversa, se verifica $\forall\ a, b \geq 0$:

$$\boxed{ab \leq \int_0^a \phi(x)\, dx + \int_0^b \psi(x)\, dx}$$

dándose la igualdad sólo cuando $b = \phi(a)$.

Desigualdad de Hölder

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales continuas no idénticamente nulas en el intervalo (α, β) (sin excluir que $\alpha = -\infty$ o $\beta = +\infty$). Si $r > 1$, designemos

$$\|f\|_r = \left(\int_\alpha^\beta |f(s)|^r\, ds\right)^{1/r}.$$

Supongamos que $\|f\|_p < \infty$ y que $\|g\|_q < \infty$, donde $p > 1$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Entonces, se verifica

$$\boxed{\int_\alpha^\beta |f(s)\, g(s)|\, ds \leq \|f\|_p\ \|g\|_q}$$

Desigualdad de Minkowski

Sean $f(x)$ y $h(x)$ dos funciones reales continuas no idénticamente nulas en el intervalo (α, β) y tales que $\|f\|_p < \infty$ y $\|h\|_p < \infty$, donde $p > 1$. Se verifica

$$\boxed{\|f + h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p}$$

(Para $p = 1$ también es cierta, deduciéndose de $|f + h| \leq |f| + |h|$.)

Desigualdad de Jensen

Sea $\phi(x)$ una función real definida en $\mathbb{R}$ que es **convexa** (es decir, lo que en estos apuntes se ha llamado cóncava vista desde arriba), y sea $f(x)$ una función integrable en el intervalo $[0, 1]$. Se verifica

$$\boxed{\int_0^1 \phi\big(f(s)\big)\, ds \geq \phi\left(\int_0^1 f(s)\, ds\right)}$$

Problemas —cuarto bloque de trabajo—

4.1.— Sea f no constante y derivable en $[a,b]$, cumpliendo $f(a)=f(b)=0$. Probar que existe al menos un punto $\xi\in[a,b]$ para el cual

$$|f'(\xi)| \;>\; \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

(Referencias: G. Polya y G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis I*, Springer, 4ª ed., 1970, Pt. II, Cap. 3, Nº 121. Ver también Spivak, problema 11.39.)

4.2.— La curva descrita por un punto fijo de una circunferencia de radio a que rueda sin deslizar sobre el lado interior de otra circunferencia de radio $3a$, se llama ***deltoide***.

Supongamos la circunferencia grande centrada en los ejes de coordenadas y que se comienza a describir una deltoide desde el punto $(3a,0)$. Hallar el área interior y la longitud de la curva, y el volumen y el área del sólido engendrado por revolución en torno al eje de abscisas.

4.3.— (a) ¿Cierto o falso?

$$\frac{5}{4} \;<\; \int_0^1 x^{-x}\,dx \;<\; \frac{3}{2}$$

(b) ¿Cierto o falso?

$$\frac{4}{3} \;<\; \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x-1} \;<\; \frac{5}{3}$$

(Referencias: Son, respectivamente, la octava pregunta de *The Bernoulli Trials 1999* y la duodécima de *The Bernoulli Trials 1998* de la Universidad de Waterloo, Canadá. No sé allí, porque hay que contestar en menos de diez minutos, pero aquí se trata de razonar las respuestas.)

4.4.— Encontrar el área de la región comprendida entre la curva $x^3+y^3=1$ y su asíntota.

4.5.— Los centros de dos esferas de radios a y b se encuentran a una distancia $c>a+b$. ¿Dónde habría que colocar un punto emisor de luz en la línea de los centros, entre ambas esferas, para iluminar la mayor área posible en las superficies esféricas?

(Referencias: Klambauer, ejercicios del capítulo 6.)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

material didáctico·04·matemáticas