MATEMÁTICA 9

De acuerdo al nuevo currículo de la Educación General Básica

TEXTO PARA

ESTUDIANTES

DISTRIBUCIÓN GRATUITA - PROHIBIDA LA VENTA

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRA DE EDUCACIÓN
Gloria Vidal Illingworth

VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN
Pablo Cevallos Estarellas

SUBSECRETARIA DE CALIDAD EDUCATIVA
Alba Toledo Delgado

GRUPO EDEBÉ
Proyecto: Matemáticas 1,2,3 y 4
Educación Secundaria Obligatoria

DIRECCIÓN GENERAL
Antonio Garrido González

DIRECCIÓN EDITORIAL
José Luis Gómez Cutillas

DIRECCIÓN DE EDICIÓN
DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
José Francisco Vílchez Román

DIRECCIÓN PEDAGÓGICA
Santiago Centelles Cervera

DIRECCIÓN DE PRODUCCIÓN
Juan López Navarro

EQUIPO DE EDICIÓN GRUPO EDEBÉ

Paseo San Juan Bosco, 62
08017 Barcelona
www.edebe.com

En alianza con
EDITORIAL DON BOSCO
OBRAS SALESIANAS DE COMUNICACIÓN

GERENTE GENERAL
Marcelo Mejía Morales

DIRECCIÓN EDITORIAL
María Alexandra Prócel Alarcón

ADAPTACIÓN Y EDICIÓN DE CONTENIDOS
Equipo Editorial Don Bosco
Humberto Buitrón A.

CREACIÓN DE CONTENIDOS NUEVOS
Marcia Peña Andrade
Saúl Serrano Aguirre
Lorena Valladares Perugachi

REVISIÓN DE ESTILO
Hernán Hermosa Mantilla
Isabel Luna Riofrío
Pablo Larreátegui Plaza

COORDINACIÓN GRÁFICA
Y REDIAGRAMACIÓN EDITORIAL
Pamela Cueva Villavicencio

DIAGRAMACIÓN DE PÁGINAS NUEVAS
Susana Zurita Becerra
Franklin Ramírez Torres
Patricio Llivicura Piedra
Freddy López Canelos
Erika Delgado Chávez
Sofía Vergara Anda

ILUSTRACIÓN DE PORTADA
Eduardo Delgado Padilla
Darwin Parra Ojeda

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DEL ECUADOR
Primera edición, Mayo 2011
Quito – Ecuador

Impreso por: EDITOGRAN S.A.

Vamos a compartir el conocimiento, los colores, las palabras.

El Ecuador ha sido, según el poeta Jorge Enrique Adoum, "un país irreal limitado por sí mismo, partido por una línea imaginaria", y es tarea de todos convertirlo en un país real que no tenga límites.

Con este horizonte, el Ministerio de Educación realizó la Actualización y Fortalecimiento del Currículo de la Educación General Básica que busca que las generaciones venideras aprendan de mejor manera a relacionarse con los demás seres humanos y con su entorno y, sobre todo, a soñar con la patria que vive dentro de nuestros sueños y de nuestros corazones.

Los jóvenes de octavo a décimo años van a recibir un libro de texto que les permitirá desarrollar sus habilidades.

Estos libros tienen un acompañante para los docentes. Es una guía didáctica que presenta alternativas y herramientas didácticas que enriquecen el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El Ecuador debe convertirse en un país que mire de pie hacia el futuro y eso solo será posible si la educación nos permite ser mejores ciudadanos. Es una inmensa tarea en la que todos debemos estar comprometidos, para que el "Buen Vivir" sea una práctica cotidiana.

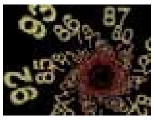
Ministerio de Educación

2010

Conoce **tu libro**

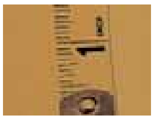
Los contenidos que vas a aprender se organizan en seis módulos que están trabajados de manera integrada a partir de los siguientes bloques:

Numérico

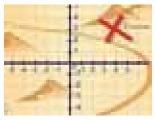


Geométrico

Medida



Relaciones y funciones



Estadística y probabilidad

Estructura de los módulos

Páginas iniciales

Buen Vivir

Eje transversal valorativo que acompaña a los contenidos y permite una formación integral.

Una imagen y una **actividad inicial** nos muestran la presencia de las matemáticas en nuestro entorno y la relación entre los bloques matemáticos.

Conocimientos que se trabajarán dentro del módulo.

Destrezas con criterios de desempeño

Se muestra un listado de las destrezas con criterios de desempeño que se desarrollarán en el módulo.

Prerrequisitos

Definiciones, ejemplos y actividades para recordar los conocimientos previos necesarios para el aprendizaje.

Buen Vivir

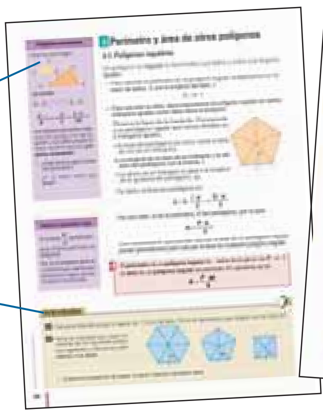
Enunciación del artículo de la Constitución de la República del Ecuador, relacionado con el proyecto del Buen Vivir.

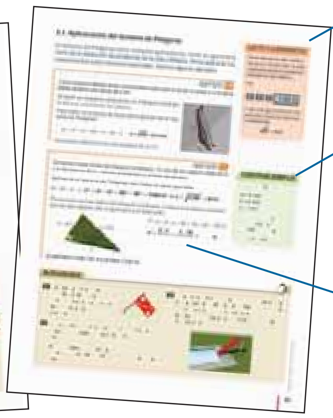
Desarrollo

Los conocimientos se organizan en apartados y subapartados.

Actividades

Al finalizar el desarrollo de un conocimiento, se proponen ejercicios a pie de página para afianzarlo.





En los márgenes se incluyen explicaciones complementarias.

Contraejemplo

Ejemplos que no cumplen con los conocimientos estudiados.

Ejemplos

En muchos casos, el desarrollo de los conocimientos finaliza con uno o varios ejemplos para facilitar el aprendizaje.

Algunas actividades llevan un icono cuyo significado es el siguiente:

Macrodestrezas matemáticas

- Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos
- Aplicación en la práctica
- Refuerzo de macrodestrezas

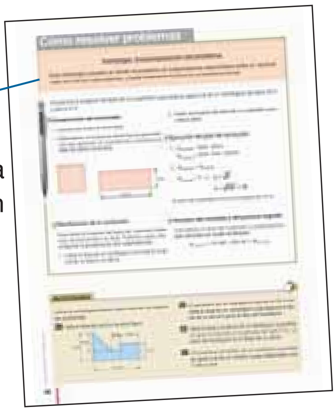
Herramientas y ejes transversales

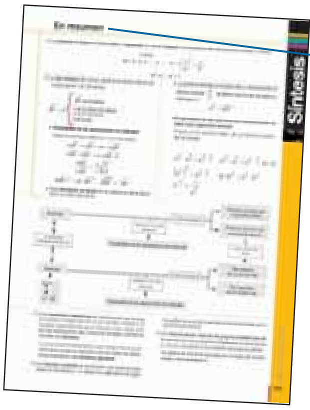
- Cálculo mental
- Uso de la calculadora
- Uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación
- Trabajo en grupo
- Buen Vivir

Páginas finales

Cómo resolver problemas

En cada módulo se trabaja una estrategia de resolución de problemas distinta.





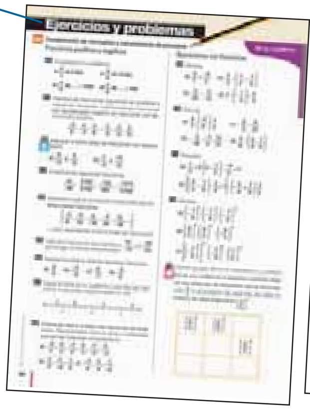
En resumen

Síntesis de las ideas clave del módulo y esquema que muestra la relación de los conocimientos en los bloques matemáticos.

Ejercicios y problemas

Cuestiones, ejercicios y problemas para consolidar la comprensión de conceptos, conocimiento de procesos y aplicación en la práctica de lo que has aprendido.

En la sección ***Más a fondo*** proponemos actividades de mayor dificultad para profundizar las macrodestrezas.



Demuestra tu ingenio

Resolución de problemas a través de diversas estrategias del pensamiento y creativas.

Buen Vivir

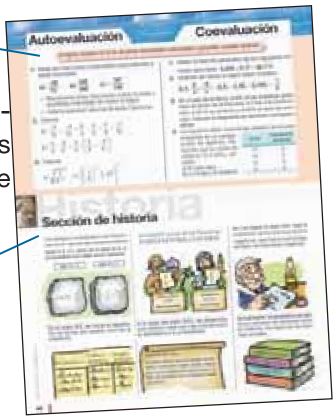
Profundización de los ejes transversales para una formación integral.

Autoevaluación y coevaluación

Permite comprobar los conocimientos, a través de actividades con indicadores esenciales de evaluación.

Sección de historia

Para conocer la evolución histórica de algunos conceptos matemáticos.

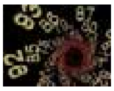
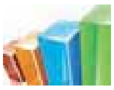


Crónica matemática

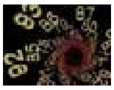
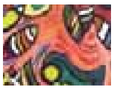
Con noticias, curiosidades... del tema trabajado.

Índice

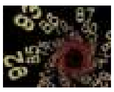
Módulo 1: Números racionales. Medidas de tendencia central

Módulo 2: Números irracionales. Perímetros y áreas de polígonos

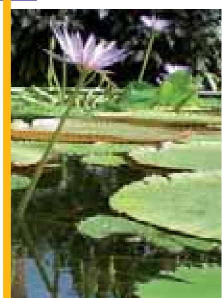
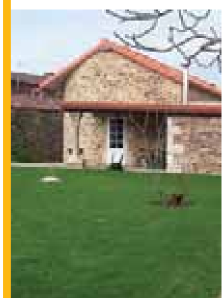



Módulo 3: Números reales. Polinomios








Módulo 1

Bloques: Numérico. Estadística y probabilidad

Buen Vivir: Biodiversidad y ambiente sano

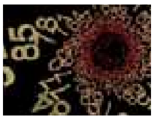
http://desktop.qkype.com

Un iceberg es una masa enorme de hielo que flota en el mar. La parte visible, llamada punta del iceberg, corresponde a 1/9 del total. Por lo tanto, la parte sumergida corresponde a sus 8/9 partes.

El iceberg más grande del mundo es el B-15A, con una longitud de 127 km, una anchura de 27 km y una superficie aproximada de 3 100 km^2, 124 km^2 menos que la superficie de la provincia de Bolívar.

— ¿La superficie de tu provincia a qué fracción de la del iceberg B-15A corresponde aproximadamente?

Números racionales
Medidas de tendencia central




Tus conocimientos sobre las fracciones y los números decimales servirán para *relacionarlos* con el cálculo de la media aritmética y la mediana. Serás capaz de *utilizarlos* para *resolver* situaciones diversas de la vida cotidiana.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Leer y escribir números racionales de acuerdo con su definición.
- Representar números racionales en notación decimal y fraccionaria.
- Ordenar y comparar números racionales.
- Resolver operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división exacta con números racionales.
- Simplificar expresiones de números racionales con la aplicación de las reglas de potenciación y de radicación.
- Efectuar aproximaciones de números decimales y calcular el error cometido.
- Calcular la media, mediana y moda de un conjunto de datos estadísticos contextualizados en problemas pertinentes.
- Reconocer y valorar la utilidad de las fracciones y decimales para resolver situaciones de la vida cotidiana.

Prerrequisitos

Recuerda

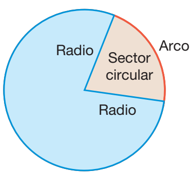
- Una **fracción** es la expresión de una división entre dos números, su **numerador** y su **denominador.** Así:

$$3 \div 4 = \frac{3}{4}$$

- Un número decimal puede expresarse con la coma decimal o mediante una fracción decimal.

$$123{,}456 = \frac{123\,456}{1000}$$

- La región de círculo limitada por dos radios y su arco correspondiente recibe el nombre de *sector circular.*



Evaluación diagnóstica

- Representa sobre la recta los siguientes números enteros. Describe el procedimiento utilizado.

$$-5, -3, -1, 0, 2, 4, 7$$

- Escribe estas fracciones: un tercio, dos quintos, tres medios y once treceavos.
- Expresa en forma de fracción: tres trimestres de un año, cuatro días de una semana, dos semanas de un mes.
- Calcula mentalmente el número decimal correspondiente a estas fracciones.

$$\frac{5}{10}; \frac{3}{100}; \frac{30}{40}; \frac{56}{10}; \frac{15}{75}$$

- Determina cuál es el valor que más se repite en la siguiente serie de cifras: 1, 5, 6, 7, 3, 4, 7, 2, 8, 2, 6, 3, 7, 3, 6, 1, 8, 3, 5, 1, 4, 7, 9, 3, 1, 5, 3, 4, 7, 2 y 5.

Buen Vivir

Biodiversidad y ambiente sano

Art. 14.- Se reconoce el derecho de la población a vivir en un ambiente sano y ecológicamente equilibrado, que garantice la sostenibilidad y el Buen Vivir, *sumak kawsay*.

Constitución de la República del Ecuador, 2008.

1 Fracciones positivas y negativas

Los números enteros no bastan para expresar cantidades que nos encontramos habitualmente. Utilizamos las fracciones para referirnos a una parte de un todo o para expresar cantidades en que dividimos una unidad elegida.

Cuando decimos que hemos estado un cuarto de hora esperando el bus, significa que hemos dividido este período de tiempo en cuatro partes iguales y el tiempo de espera corresponde a una de ellas. Las fracciones, pues, nos permiten expresar una **parte de un todo o unidad.**

MUCHO OJO

En la fracción $\frac{a}{b}$, b debe ser diferente de cero: $b \neq 0$.

Toda fracción consta de dos términos:

- El **denominador** es el número de partes iguales en que dividimos la unidad.
- El **numerador** es el número de partes que tomamos.

$$\frac{1}{4}\quad \begin{array}{l} \longrightarrow \text{ numerador} \\ \longrightarrow \text{ denominador} \end{array}$$

Una fracción también puede considerarse como parte de una cantidad. En este caso podemos calcular:

- La fracción de una cantidad: multiplicamos la fracción por la cantidad.

ejemplo 1

¿Qué cantidad son las $\frac{2}{5}$ partes de 125 m?

— Multiplicamos la fracción por 125.

$$\frac{2}{5}\cdot 125 = 50$$

Por lo tanto, las $\frac{2}{5}$ partes de 125 m son 50 m.

- Una cantidad de la cual conocemos la fracción: multiplicamos la inversa de la fracción por el valor correspondiente.

ejemplo 2

Si sabemos que 600 m son $\frac{3}{4}$ partes del total de un recorrido, determina la longitud total del recorrido.

— Sabemos que las $\frac{3}{4}$ partes de cierta cantidad x son 600.

$$\frac{3}{4}x = 600$$

— Al despejar, obtenemos que x es igual a la inversa de $\frac{3}{4}$ multiplicado por 600.

$$x = \frac{4}{3}\cdot 600 = 800$$

La longitud total del recorrido es de 800 m.

1.1. Fracciones con signo

Una fracción puede interpretarse como la expresión de una división entre dos números enteros.

$$4 \div 7 = \frac{4}{7} \qquad -1 \div 3 = \frac{-1}{3} \qquad 8 \div (-9) = \frac{8}{-9}$$

Es evidente que podemos encontrar **fracciones positivas** y **fracciones negativas.**

Una **fracción** es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, en que a y b son números enteros, siendo $b \neq 0$.

Como en el caso de los números enteros, escribimos las fracciones positivas sin indicar su signo.

$$+\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Y, teniendo en cuenta la regla de los signos para la división, podemos escribir:

$$\frac{3}{4} = \frac{-3}{-4}$$

Vemos, pues, que toda fracción positiva puede expresarse como el cociente de dos números enteros, ambos positivos o ambos negativos.

Y, del mismo modo, toda fracción negativa puede expresarse como el cociente de dos números enteros, uno de ellos positivo y el otro negativo.

$$-\frac{5}{8} = \frac{-5}{8} = \frac{5}{-8}$$

CONTRAEJEMPLO

El número Pi (π) no es un número racional, porque no se lo puede expresar como fracción.

$$\pi = 3{,}1415...$$

Actividades

1 Expresa 11 cm como fracción de: metro, decímetro, kilómetro y milímetro.

2 Inti y su padre han tardado 55 min en realizar la compra semanal. Si han estado 10 min haciendo cola en el puesto de venta de pescado, ¿qué fracción del tiempo total representan estos minutos?

www.hoy.com.ec

Mercado de Santa Clara en Quito.

3 Calcula:

a) $\frac{2}{5}$ de 12 300 b) $\frac{3}{7}$ de 2 100

4 Resuelve en tu cuaderno:

a) $\frac{2}{3}$ de ..... = 1680 b) $\frac{4}{9}$ de ..... = 1800

5 Describe oralmente una situación en la que sea necesaria emplear una fracción positiva y otra en la que se utilice una fracción negativa.

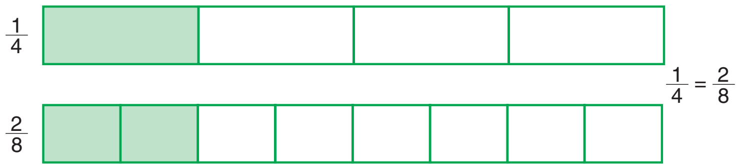
6 Clasifica las fracciones siguientes en positivas y negativas.

$$\frac{-2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{2}{-5}, \frac{-1}{-8}, \frac{7}{3}$$

— Transforma las fracciones con denominador negativo en fracciones con denominador positivo.

1.2. Fracciones equivalentes

Podemos comparar gráficamente dos fracciones distintas para ver si representan la misma parte de la unidad.



Si dos fracciones positivas representan la misma parte de la unidad, se denominan **fracciones equivalentes.**

Si dos fracciones positivas son equivalentes se cumple que el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda es igual al producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} \longrightarrow 1 \cdot 8 = 4 \cdot 2$$

Esta propiedad se conoce como **propiedad fundamental de las fracciones equivalentes** y nos permite definir la equivalencia de fracciones con signo.

> Las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ ($b \neq 0$ y $d \neq 0$) son **equivalentes** si se cumple que $a \cdot d = b \cdot c$.

Obtención de fracciones equivalentes

Para obtener fracciones equivalentes a una fracción dada, se multiplica o se divide el numerador y el denominador por un mismo número entero diferente de 0.

$$\frac{-3}{9} \underset{\cdot 2}{\overset{\cdot 2}{=}} \frac{-6}{18} \qquad \frac{-3}{9} \underset{\div 3}{\overset{\div 3}{=}} \frac{-1}{3} \qquad \frac{-3}{9} \underset{\cdot(-4)}{\overset{\cdot(-4)}{=}} \frac{12}{-36}$$

Actividades

7 Indica oralmente qué fracciones a continuación son equivalentes a $-\frac{4}{7}$.

a) $\frac{52}{-91}$ b) $\frac{-60}{-105}$ c) $\frac{-64}{84}$ d) $\frac{16}{28}$

8 Escribe una fracción equivalente a $\frac{4}{-13}$ con denominador 156.

9 Escribe una fracción equivalente a $\frac{-15}{16}$ con numerador -480.

— ¿Puedes escribir una fracción equivalente a la anterior cuyo numerador sea 215?

10 Busca el valor de x para que cada uno de estos pares de fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{-13}{7} = \frac{x}{42}$ b) $\frac{-30}{-12} = \frac{15}{x}$ c) $\frac{-1}{x} = \frac{2}{10}$ d) $\frac{-4}{x} = \frac{x}{-9}$

Simplificación de fracciones

Hemos visto que si dividimos el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número entero distinto de 0, obtenemos una fracción equivalente. En este caso decimos que hemos **simplificado** la fracción.

Toda fracción puede simplificarse hasta llegar a la **fracción irreducible.**

> Una fracción con signo es **irreducible** cuando su **numerador** y su **denominador,** sin tener en cuenta el signo, son **números primos entre sí.**

Cálculo de la fracción irreducible

Aprendamos ahora tres métodos distintos para hallar la fracción irreducible equivalente a la fracción: $\dfrac{2100}{5400}$

1. Realización de divisiones sucesivas.

Procedimiento	Ejemplo
• Resolvemos divisiones sucesivas del numerador y del denominador de la fracción entre divisores comunes de ambos hasta obtener la fracción irreducible.	$\dfrac{2100}{5400} \underset{\div 10}{\overset{\div 10}{=}} \dfrac{210}{540} \underset{\div 10}{\overset{\div 10}{=}} \dfrac{21}{54} \underset{\div 3}{\overset{\div 3}{=}} \dfrac{7}{18}$

2. Descomposición en factores primos.

Procedimiento	Ejemplo
• Descomponemos el numerador y el denominador en factores primos. • Dividimos el numerador y el denominador por los factores comunes para eliminarlos.	$\dfrac{2100}{5400} = \dfrac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot 7}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot\cancel{3}\cdot 3\cdot 3\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}} = \dfrac{7}{18}$

3. División del numerador y el denominador por su m.c.d.

Procedimiento	Ejemplo
• Calculamos el m.c.d de los términos de la fracción. • Dividimos el numerador y el denominador por su m.c.d.	$2\,100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ y $5\,400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ m.c.d. $(2\,100, 5\,400) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$ $\dfrac{2100}{5400} = \dfrac{2100 \div 300}{5400 \div 300} = \dfrac{7}{18}$

Máximo común divisor (m.c.d.)

Para calcular el máximo común divisor de dos números, por ejemplo, 126 y 270:

- Descomponemos en factores primos cada uno de los números.

  $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

  $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$

- Consideramos los factores primos comunes elevados al mínimo exponente: 2 y 3^2.
- Efectuamos el producto de los números obtenidos: $2 \cdot 3^2 = 18$.

  m.c.d. $(126, 270) = 18$

Actividades

11 Simplifica, en tu cuaderno, estas fracciones.

a) $\dfrac{117}{-78}$ c) $\dfrac{528}{-253}$ e) $\dfrac{111}{228}$

b) $\dfrac{-342}{285}$ d) $\dfrac{-36}{-28}$ f) $\dfrac{3\,102}{8\,415}$

12 Simplifica las siguientes fracciones por el proceso de dividir ambos términos por su m.c.d

$\dfrac{-24}{36}, \dfrac{105}{540}, \dfrac{42}{18}, \dfrac{173}{252}, \dfrac{360}{480}, \dfrac{-188}{-705}$

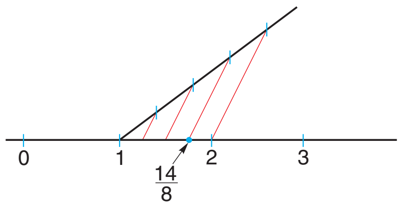
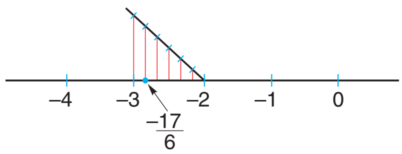
13 Explica oralmente tres maneras distintas de demostrar que dos fracciones son equivalentes.

1.3. Ubicación de fracciones sobre la recta

Las fracciones con signo pueden representarse sobre la recta de forma parecida a como representamos los números enteros.

Si la fracción es **positiva,** su representación se situará a la **derecha del 0** y, si es **negativa,** a la **izquierda del 0.**

A continuación, vamos a ver el proceso que se sigue para representar fracciones positivas y negativas sobre la recta.

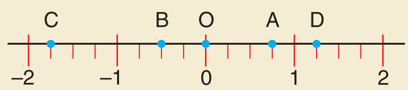
Procedimiento	*Ejemplo 1* Ubicación de $\frac{14}{8}$	*Ejemplo 2* Ubicación de $\frac{-17}{6}$
Consideramos la fracción irreducible equivalente.	$\frac{14}{8} = \frac{7}{4}$	$\frac{-17}{6}$
Efectuamos la división entera del numerador entre el denominador. El cociente de esta división determina los dos números enteros que son los extremos del segmento donde se situará la fracción.	$\begin{array}{r\|l} 7 & 4 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$ La fracción se sitúa entre 1 y 2.	$\begin{array}{r\|l} 17 & 6 \\ \hline 5 & 2 \end{array}$ La fracción se sitúa entre –2 y –3.
Dividimos el segmento determinado por estos dos números enteros en tantas partes como indique el denominador de la fracción y tomamos las que señale el resto de la división.	Tenemos que dividir el segmento determinado por 1 y 2 en 4 partes iguales y tomar 3. 	Tenemos que dividir el segmento determinado por –2 y –3 en 6 partes iguales y tomar 5. 

Actividades

14 Representa sobre la recta las siguientes fracciones.

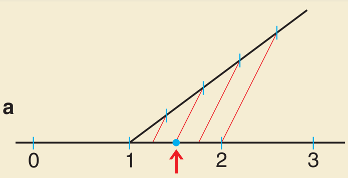
$$\frac{3}{5},\ \frac{-3}{-4},\ \frac{-2}{-14},\ -\frac{15}{6}$$

15 Expresa oralmente en forma de fracción los puntos señalados en la recta.

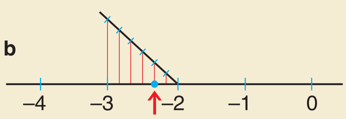


16 Escribe las fracciones que corresponden a los puntos indicados en la recta.

a

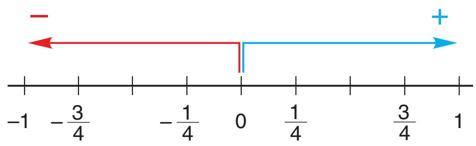


b



1.4. Ordenación de fracciones

La **representación** de las fracciones sobre la recta nos permite ordenarlas. Tal y como sucede en la ordenación de los números naturales y los números enteros, siempre es mayor la fracción situada más a la derecha.



$$-\frac{3}{4} < -\frac{1}{4} < \frac{1}{4} < \frac{3}{4}$$

También es posible comparar dos fracciones sin tener que representarlas.

Ordenación de fracciones con el mismo denominador

Dadas dos fracciones con el mismo denominador positivo, es mayor la que tiene el numerador más grande.

ejemplo 3

Compara las fracciones $\frac{11}{7}, \frac{-5}{7}$ *y* $\frac{15}{7}$.

— Como el denominador es el mismo y positivo, podemos comparar los numeradores.

$$-5 < 11 < 15$$

— Por lo tanto,

$$\frac{-5}{7} < \frac{11}{7} < \frac{15}{7}$$

Ordenación de fracciones con distinto denominador

Para comparar dos o más fracciones con distinto denominador, tomamos las fracciones equivalentes de forma que todos los denominadores sean positivos. A continuación, las reducimos a **mínimo común denominador** y **comparamos** las fracciones obtenidas.

ejemplo 4

Compara las fracciones $\frac{12}{-15}$ *y* $\frac{-3}{4}$.

— Escribimos $\frac{12}{-15}$ como $\frac{-12}{15}$ para que su denominador sea positivo.

— Reducimos las fracciones a mínimo común denominador.

m.c.m. (15, 4) = 60 $\quad 60 \div 15 = 4 \quad\quad 60 \div 4 = 15$

$$\frac{-12 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{-48}{60} \qquad \frac{-3 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{-45}{60}$$

— Las fracciones obtenidas tienen el mismo denominador positivo. Por lo tanto, será mayor la que tenga el numerador más grande.

$$-48 < -45 \Rightarrow \frac{-48}{60} < \frac{-45}{60} \Rightarrow \frac{-12}{15} < \frac{-3}{4} \Rightarrow \frac{12}{-15} < \frac{-3}{4}$$

Actividades

17 Compara las siguientes fracciones: $\frac{-5}{4}$ y $\frac{7}{-3}$.

18 Representa estas fracciones sobre la recta y ordénalas de menor a mayor.

$$-\frac{4}{5}, \frac{-12}{5}, \frac{8}{-5}, \frac{3}{15}, \frac{3}{1}$$

Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

Para calcular el mínimo común múltiplo de dos números, por ejemplo, 12 y 45:

- Descomponemos en factores primos cada uno de los números.

$$12 = 2^2 \cdot 3$$
$$45 = 3^2 \cdot 5$$

- Consideramos los factores no comunes y comunes elevados al máximo exponente: 2^2, 3^2 y 5.
- Multiplicamos los números obtenidos:

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$
m.c.m. (12, 45) = 180

Reducción a mínimo común denominador

Para reducir a mínimo común denominador dos o más fracciones:

- Calculamos el m.c.m. de los denominadores.
- Dividimos el m.c.m. entre cada denominador y multiplicamos el cociente obtenido por los dos términos de la fracción correspondiente.

2 Operaciones con fracciones

2.1. Adición, sustracción, multiplicación y división

MUCHO OJO

Siempre que sea posible simplificaremos las fracciones, hasta la fracción irreducible, para facilitar los cálculos durante los procesos seguidos en las distintas operaciones.

Operar con fracciones negativas es como operar con las positivas pero teniendo en cuenta las reglas de las operaciones con números enteros.

Conozcamos el proceso seguido para efectuar diferentes operaciones con fracciones.

Adición y sustracción	Ejemplos
Para sumar o restar fracciones, éstas deben tener el **mismo denominador.** Si no es así, se reducen previamente a **mínimo común denominador.** • Se deja el mismo denominador. • Se suman o se restan los numeradores.	$\frac{3}{4}+\frac{-2}{5}=\frac{15}{20}+\frac{-8}{20}=\frac{15+(-8)}{20}=\frac{7}{20}$ m.c.m.$(4,5)=20$ $\frac{-3}{2}-\frac{1}{3}=\frac{-9}{6}-\frac{2}{6}=\frac{-9-2}{6}=\frac{-11}{6}$ m.c.m.$(2,3)=6$
Multiplicación	**Ejemplos**
El producto de dos o más fracciones da lugar a otra fracción en la que: • El numerador es el producto de los numeradores de cada una de las fracciones. • El denominador es el producto de los denominadores de las fracciones.	$\frac{3}{4}\cdot\frac{-2}{7}=\frac{3\cdot(-2)}{4\cdot 7}=\frac{-6}{28}=\frac{-3}{14}$
División	**Ejemplos**
La división de dos fracciones es una fracción en que: • El numerador es el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda. • El denominador se obtiene multiplicando el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.	$\frac{-3}{5}\div\frac{1}{6}=\frac{-3\cdot 6}{5\cdot 1}=\frac{-18}{5}$

FÍJATE

Notación de la división de fracciones

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Actividades

19 Efectúa, en tu cuaderno, las siguientes operaciones con fracciones.

a) $\frac{-1}{2}+\frac{3}{4}$ d) $\frac{-5}{12}\cdot\frac{3}{4}$ g) $\frac{5}{-3}-\frac{-4}{9}$

b) $\frac{5}{6}-\frac{4}{3}$ e) $\frac{1}{6}\div-\frac{4}{3}$ h) $\frac{6}{-7}+\frac{-2}{5}$

c) $\frac{5}{3}\cdot\frac{-6}{4}$ f) $\frac{3}{2}\div\left(-\frac{-4}{9}\right)$ i) $\frac{-4}{15}\div\left(-\frac{6}{7}\right)$

2.2. Operaciones combinadas

Para efectuar operaciones combinadas con fracciones positivas y negativas aplicamos los mismos criterios de prioridad establecidos para los números enteros:

- Primero, se resuelven los paréntesis y los corchetes.
- A continuación, las multiplicaciones y las divisiones en el orden en que aparecen.
- Y, finalmente, las sumas y las restas.

Fíjate en este ejemplo.

ejemplo 5

Calcula $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}+\left(\frac{-2}{5}-\frac{2}{35}\right)\div\frac{4}{21}$

— En primer lugar, efectuamos la resta del interior del paréntesis.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}+\frac{-14-2}{35}\div\frac{4}{21}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}+\frac{-16}{35}\div\frac{4}{21}$$

— A continuación, resolvemos las multiplicaciones y las divisiones en el orden en que aparecen.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}+\frac{-16}{35}\div\frac{4}{21}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}+\frac{-16\cdot 21}{35\cdot 4}=\frac{10}{12}+\frac{-336}{140}$$

— Por último, calculamos las sumas y las restas, y simplificamos el resultado.

$$\frac{10}{12}+\frac{-336}{140}=\frac{350+(-1008)}{420}=\frac{-658}{420}=\frac{-47}{30}$$

Actividades

20 Efectúa las siguientes operaciones combinadas.

a) $\frac{-3}{7}-\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{6}$ b) $\frac{1}{7}\div\frac{3}{-2}+\frac{7}{8}$

21 Resuelve estas operaciones combinadas.

a) $\frac{5}{3}\cdot\frac{-6}{4}+\frac{3}{2}\div\frac{2}{3}-\frac{-4}{9}$

b) $\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{-6}{4}+\frac{3}{2}\right)\div\frac{2}{3}-\frac{-4}{9}$

c) $\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{-6}{4}+\frac{3}{2}\div\frac{2}{3}\right)-\frac{-4}{9}$

22 Copia la operación y ubica los paréntesis para que el resultado sea el que se indica.

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{11}{45}$$

23 Calcula en tu cuaderno:

a) $\dfrac{1-\frac{1}{3}}{2+\frac{3}{5}}$ b) $1-2\cdot\dfrac{\frac{1}{4}-1}{2+\frac{1}{5}}$

24 Valentina leyó en una semana la tercera parte de un libro de 180 páginas y la semana siguiente, la cuarta parte. Si tarda 3 minutos en leer una página, ¿cuánto tardará en acabar de leerlo? Expresa el resultado como una operación combinada y calcúlala.

25 Adrián sale de su casa con $ 32. En diversas compras se gasta tres octavas partes de esta cantidad. ¿Cuántos dólares se ha gastado? ¿Cuántos le quedan?

2.3. Potencias y raíces cuadradas

Cuando operamos con fracciones podemos encontrarnos, como sucede con los otros tipos de números, con multiplicaciones de factores repetidos. También pueden aparecer fracciones cuyos términos sean cuadrados perfectos.

Potencia de una fracción

En ocasiones, podemos encontrarnos con multiplicaciones de fracciones iguales. Son potencias cuya base es una fracción y su exponente, un número natural. En general:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}^{n\ \text{veces}} = \frac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b} = \frac{a^n}{b^n}$$

Para elevar una fracción a una potencia, se elevan el numerador y el denominador a esta potencia. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

FÍJATE

Podemos transformar una potencia de fracción de exponente negativo en otra de exponente positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

En la tabla siguiente puedes observar que las operaciones con potencias de base una fracción y exponente entero cumplen las mismas reglas que las potencias de base y exponente enteros.

Multiplicación de potencias de la misma base	Potencia de una potencia
$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$	$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n}$
División de potencias de la misma base	**Potencia de exponente 1**
$\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$
Potencia de un producto	**Potencia de exponente 0**
$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 \quad (a \neq 0);\ b \neq 0$

Actividades

26 Efectúa:

a) $\left(\frac{5}{7}\right)^2$ b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^3$

27 Transforma en potencias de exponente positivo:

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{2}{6}\right)^{-5}$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

28 Expresa estas operaciones como una única potencia.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \div \left(\frac{1}{4}\right)^3$ d) $\left(\frac{4}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2$

Raíz cuadrada de una fracción

Sabemos que calcular la raíz cuadrada de un número es hallar otro número que elevado al cuadrado sea igual al primero.

De forma análoga, la raíz cuadrada de una fracción será otra fracción que elevada al cuadrado sea igual a la primera.

Decimos que una fracción es cuadrado perfecto si lo son el numerador y el denominador de su fracción equivalente irreducible.

Tal y como sucede con los números enteros, la raíz cuadrada de una fracción que es cuadrado perfecto corresponde a dos fracciones: una positiva y la otra negativa.

Así, por ejemplo:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}, \text{ ya que } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

La raíz cuadrada de $\frac{4}{9}$ es $\frac{2}{3}$

> La **fracción** $\frac{a}{b}$ que es cuadrada perfecta tiene por raíz a la fracción positiva $\frac{c}{d}$ tal que: $\left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a}{b}$ donde $c^2 = a$ y $d^2 = b$

Teniendo en cuenta la regla de los signos para la multiplicación, resulta evidente que tanto el cuadrado de una fracción positiva como el de una negativa son positivos.
Por ello y, del mismo modo que ocurre con los números enteros, la raíz cuadrada de una fracción negativa no existe.

> Las **fracciones negativas** no tienen raíz cuadrada.

Actividades

29 Calcula:

$$\sqrt{\frac{100}{169}}, \sqrt{\frac{529}{81}}, \sqrt{\frac{49}{225}}, \sqrt{\frac{144}{324}}, \sqrt{\frac{729}{1296}}$$

30 Luego de simplificar, indica oralmente cuáles de estos números son cuadrados perfectos.

$$1, 8, \frac{8}{50}, \frac{1}{4}, \frac{147}{27}, \frac{108}{75}, \frac{25}{64}, \frac{20}{45}, \frac{72}{50}$$

31 Efectúa las siguientes operaciones en tu cuaderno.

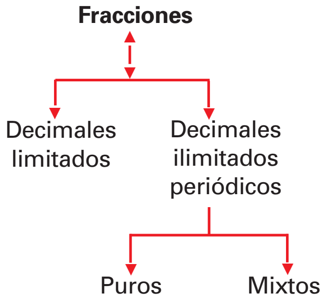
a) $\sqrt{9} + 4^2$

b) $5 \cdot \left(\sqrt{25} + 2^3\right)$

c) $2^3 \cdot \sqrt{4} + \sqrt{25} \cdot 10$

3 Relación entre las fracciones y los decimales

Dado que toda fracción puede interpretarse como una división, podemos asociar un número decimal (el resultado de esta división) a cada fracción.



3.1. Expresión decimal de una fracción

Al dividir el numerador de cualquier fracción entre su denominador, podemos encontrar tres casos distintos:

- Después de extraer una o más cifras decimales, obtenemos **resto 0.**

$$\begin{array}{l|l} 15 & 4 \\ \hline \ \ 30 & 3{,}75 \\ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

A la fracción $\frac{15}{4}$ le corresponde el **número decimal limitado** 3,75.

- El **resto nunca es 0** y en el cociente aparece una cifra o grupo de cifras que se van repitiendo y que llamamos **período.**

Obtendremos así un **número decimal ilimitado periódico.**

$$\begin{array}{l|l} 14 & 3 \\ \hline \ \ 20 & 4{,}666... \\ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 23 & 6 \\ \hline \ \ 50 & 3{,}833... \\ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 2 & \end{array}$$

El período (6) comienza inmediatamente después de la coma.

A la fracción $\frac{14}{3}$ le corresponde el número **decimal ilimitado periódico puro** 4,666...

Hay cifras decimales (8) entre la coma y el período (3).

A la fracción $\frac{23}{6}$ le corresponde el número **decimal ilimitado periódico mixto** 3,833...

Así, cualquier fracción es un número decimal limitado o ilimitado periódico.

FÍJATE

Para simbolizar el período, utilizamos un pequeño arco que comprende las cifras que lo componen.

$4{,}666... = 4{,}\widehat{6}$

$3{,}833... = 3{,}8\widehat{3}$

FÍJATE

Si dos fracciones son equivalentes, les corresponde el mismo número decimal.

$\frac{12}{7} = \frac{24}{14} = 1{,}714...$

Actividades

32 Calcula la expresión decimal de las siguientes fracciones.

$$\frac{11}{13}, \frac{8}{7}, \frac{-5}{14}, \frac{3}{-4}, \frac{13}{9}, \frac{-5}{-14}$$

33 Clasifica estos números decimales en limitados, ilimitados periódicos puros e ilimitados periódicos mixtos.

$$2{,}242424...;\ 0{,}\widehat{75};\ 3{,}435;\ 8{,}2\widehat{51};\ -2{,}89;\ 0{,}\widehat{5};\ 2{,}13444...$$

3.2. Fracción generatriz de un número decimal

Acabamos de aprender que a toda fracción le corresponde un número decimal limitado o ilimitado periódico. La afirmación recíproca también es cierta, es decir, todo número decimal limitado o ilimitado periódico es una fracción.

> La **fracción generatriz** de un número decimal limitado o ilimitado periódico es la fracción irreducible equivalente a dicho número decimal.

Veamos, ahora, la forma de calcular la fracción generatriz correspondiente a un determinado número decimal limitado o ilimitado periódico.

El número decimal es limitado	Ejemplo: 4,65
• Llamamos *x* al número decimal.	$x = 4{,}65$
• Multiplicamos la expresión de *x* por la potencia de 10 necesaria para eliminar la coma.	$100\,x = 465$
• Despejamos *x* y simplificamos la fracción.	$x = \dfrac{465}{100} = \dfrac{93}{20}$

El número decimal es ilimitado periódico puro	Ejemplo: $12{,}\overset{\frown}{6}$
• Llamamos *x* al número decimal.	$x = 12{,}\overset{\frown}{6}$
• Multiplicamos la expresión de *x* por la potencia de 10 necesaria para que la coma quede justo después del primer período.	$10\,x = 126{,}666...$
• A la expresión obtenida le restamos la expresión inicial.	$10\,x = 126{,}666...$ $-\quad x = 12{,}666...$ $9\,x = 114$
• Despejamos *x* y simplificamos la fracción.	$x = \dfrac{114}{9} = \dfrac{38}{3}$

El número decimal es ilimitado periódico mixto	Ejemplo: $1{,}2\overset{\frown}{54}$
• Llamamos *x* al número decimal.	$x = 1{,}2\overset{\frown}{54}$
• En primer lugar, multiplicamos la expresión de *x* por la potencia de 10 necesaria para que la coma quede justo después del primer período.	$1000\,x = 1254{,}5454...$
• A continuación, multiplicamos la expresión de *x* por la potencia de 10 necesaria para que la coma quede justo antes del primer período.	$10\,x = 12{,}5454...$
• Restamos las dos expresiones obtenidas.	$1000\,x = 1254{,}5454...$ $-\quad 10\,x = 12{,}5454...$ $990\,x = 1242$
• Despejamos *x* y simplificamos la fracción.	$x = \dfrac{1242}{990} = \dfrac{69}{55}$

Actividades

34 Calcula la fracción generatriz de los números decimales siguientes.

$7{,}4;\ 0{,}07;\ 4{,}562;\ -0{,}00\overset{\frown}{5};\ 2{,}\overset{\frown}{14};\ 3{,}2\overset{\frown}{61}$

35 Efectúa estas operaciones. Calcula previamente las fracciones generatrices.

a) $3{,}5 \cdot 4{,}5\overset{\frown}{6}$ b) $(2{,}8 + 0{,}\overset{\frown}{3}) \div 1{,}\overset{\frown}{5}$

Aproximación de raíces cuadradas

Veamos cómo obtener una aproximación decimal de la raíz cuadrada de 92.

- Calculamos los cuadrados perfectos más próximos a 92, que son 81 y 100. Así:

$$81 < 92 < 100$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$\sqrt{81} < \sqrt{92} < \sqrt{100}$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$9 < \sqrt{92} < 10$$

- Calculamos los cuadrados de los números con una cifra decimal más próximos a 92.

$$9{,}5^2 = 90{,}25 < 92$$
$$9{,}6^2 = 92{,}16 > 92$$

Por lo que:

$$9{,}5^2 < 92 < 9{,}6^2$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$9{,}5 < \sqrt{92} < 9{,}6$$

Decimos que 9,5 es **una aproximación con una cifra decimal** de la raíz de 92.

Podríamos seguir el proceso y dar aproximaciones con más cifras decimales. Así, cada vez nos acercaríamos más al valor exacto.

— Practica este procedimiento y halla las raíces aproximadas con tres decimales de 38 y 75.

3.3. Operaciones con decimales

Recordemos las operaciones que se efectúan con los números decimales.

Adición y sustracción

Debemos tener en cuenta el valor posicional de las cifras decimales. Así, al efectuar estas operaciones, las comas deben encontrarse en una misma columna. Observa los siguientes ejemplos.

ejemplo 6

Efectúa: a) 234,123 + 456,21; b) 133,56 – 35,987

— Colocamos los números en columna de modo que coincidan las unidades del mismo orden. Si es necesario, se añaden 0 a la derecha para que todos tengan el mismo número de cifras decimales.

$$\begin{array}{r} 234{,}123 \\ +\ 456{,}210 \\ \hline 690{,}333 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 133{,}560 \\ -\ 35{,}987 \\ \hline 97{,}573 \end{array}$$

Multiplicación

En este caso, necesitas recordar que el producto debe tener tantas cifras decimales como tengan entre los dos factores.

ejemplo 7

Calcula: 125,6 · 1,28

— Efectuamos las multiplicaciones como si se tratara de dos números enteros y se separan tantas cifras decimales como tengan entre los dos factores.

$$\begin{array}{r} 125{,}6 \\ x \quad 1{,}28 \\ \hline 10048 \\ 2512 \\ 1256 \\ \hline 160{,}768 \end{array}$$

División

Para dividir un número decimal por un número natural aproximaremos el cociente hasta que éste tenga el número de cifras decimales deseado. En caso de que el divisor también sea un número decimal, se multiplican el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor. Así obtenemos una división equivalente cuyo divisor es un número natural.

ejemplo 8

Efectúa: 72,6 ÷ 8,4

— Como el divisor tiene una cifra decimal, multiplicamos el dividendo y el divisor por 10.

$$72{,}6 \cdot 10 = 726$$
$$8{,}4 \cdot 10 = 84$$

— La división inicial se ha transformado en:

$$726 \div 84$$

$$\begin{array}{l|l} 726 & 84 \\ \hline \ \ 540 & 8{,}6 \\ \ \ \ \ 36 & \end{array}$$

Actividades

36 Efectúa: a) 4,12 + 6,2; b) 3,12 – 1,2; c) 3,12 · 1,2; d) 4,45 ÷ 2; e) 1,32 ÷ 2; f) 12,2 ÷ 2,1; g) 1,21 ÷ 4,3

4 Aproximación, redondeo y error

Cuando los números decimales tienen muchas cifras en la parte decimal, puede resultar complejo trabajar con ellos. En estos casos tomamos **aproximaciones** de dichos números.

Así, por ejemplo, 12,7 es una aproximación hasta las décimas de 12,723456.

Una de las formas de tomar aproximaciones de números decimales es por **redondeo.**

Para **aproximar** un número por **redondeo** hasta una determinada cifra decimal, procedemos del siguiente modo:

- Si la primera cifra que debemos suprimir es menor que 5, dejamos igual la última cifra que se conserva.
- Si la primera cifra que debemos suprimir es mayor o igual que 5, aumentamos en una unidad la última cifra que se conserva.

FÍJATE

$1{,}54 \xrightarrow{\text{Redondeo}} 1{,}5$

$23{,}67 \xrightarrow{\text{Redondeo}} 23{,}7$

Observa que:

$1{,}54 > 1{,}5$

En este caso decimos que hemos efectuado una **aproximación por defecto.**

Por otro lado, se tiene que:

$23{,}67 < 23{,}7$

En este caso decimos que la **aproximación** es **por exceso.**

Observa los siguientes ejemplos de aproximación por redondeo.

Número real	Orden de aproximación	Primera cifra suprimida	Aproximación por redondeo
0,537 12	Décimas	3	0,5
157,247 523	Milésimas	5	157,248
8,579 3	Centésimas	9	8,58

Siempre que efectuamos una aproximación estamos cometiendo un error. Así, por ejemplo, al aproximar 8,579 3 a 8,58 hemos cometido un error de 0,000 7.

Llamamos **error absoluto** *(E_a)* al valor absoluto de la diferencia entre el valor aproximado *(a)* y el valor exacto *(x).*

$$E_a = |a - x|$$

Estimación

Muchas veces consideramos aproximaciones para realizar estimaciones.

Redondea las siguientes cantidades hasta las décimas y haz una estimación del costo total de la compra de los siguientes productos:

Agua mineral: $ 0,45

Garbanzos: $ 0,62

Pan: $ 0,47

¿Dirías que tienes suficiente dinero para pagar la compra si dispones de $ 1,50?

¿Qué error se ha cometido con la estimación?

Actividades

37 Da una aproximación de los siguientes números con un error menor que el que se indica.

a) 3,125; $E_a = 0{,}1$ b) 21,35; $E_a = 0{,}01$ c) 41,562; $E_a = 0{,}001$

38 Redondea estos números hasta las decenas y calcula el error que se comete.

a) 2,785 b) 3,45 c) 67,892

39 Al redondear un número se ha obtenido el valor 3,02 cometiéndose un error de 0,003. ¿De qué número o números se trata?

40 Realiza una estimación del resultado de cada una de las siguientes operaciones. A continuación, efectúa los cálculos exactos y determina el error cometido con cada una de las estimaciones.

a) $2{,}5 + 3{,}268 + 6{,}01 \cdot 1{,}1$ b) $12{,}63 - 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 71{,}725$

5 Estadística: conceptos generales

Conceptos generales

Tus conocimientos sobre fracciones, números decimales, operaciones y la técnica de aproximación y redondeo te permitirán calcular de mejor manera dos medidas de tendencia central: la media aritmética y la mediana.

Muchas veces es interesante conocer algunas características o el comportamiento de un colectivo en cuestiones tan diversas como, por ejemplo:

A. El color preferido de los alumnos de una clase.

B. El número de goles marcados por cada uno de los equipos de fútbol de primera A en la última jornada.

C. La estatura del alumnado de 9.º de EGB de una ciudad.

En estos casos se han de recoger datos, organizarlos adecuadamente y analizarlos para extraer conclusiones. Ya sabes que este tipo de estudio se denomina **estudio estadístico.**

Para el estudio estadístico de una situación hay que definir, en primer lugar, los siguientes conceptos: *población, individuo, muestra, variable estadística* y *dato.*

FÍJATE

Normalmente se estudia una muestra porque la población es muy grande o porque es muy costoso estudiar la población entera.

Dado que las conclusiones que se extraen de un estudio estadístico se extrapolan a toda la población, se debe prestar mucha atención a la hora de seleccionar la muestra.

La **población** de un estudio estadístico es el conjunto de elementos objeto del estudio. Cada uno de los elementos de la población es un **individuo.**

En ocasiones, no puede tratarse toda la población porque es demasiado grande, porque no se tiene tiempo ni dinero para hacerlo, o por otro motivo. En estos casos, sólo puede estudiarse una parte de la población.

Una **muestra** es una parte de la población sobre la que se lleva a cabo el estudio.

La propiedad o característica concreta de la población que se quiere estudiar recibe el nombre de **variable estadística.** Cada valor que toma la variable estadística es un **dato.**

Así, en los casos planteados anteriormente podemos construir la tabla siguiente:

Estudio estadístico	Población	Variable estadística
A	Todos los alumnos de una clase	Color preferido
B	Equipos de fútbol de primera A	Número de goles marcados en la última jornada
C	Alumnado de 9.º de EGB de una ciudad	Estatura

Actividades

41 Indica la población y la variable estadística de cada uno de los estudios estadísticos siguientes.

a) Deporte preferido por los trabajadores de una empresa.

b) Número de alumnos por clase en un centro escolar.

c) Duración de unos determinados focos.

d) Grado de satisfacción de los estudiantes de un centro respecto a la enseñanza que reciben.

5.1. Variables estadísticas

Es interesante conocer qué clase de valor puede tomar una variable estadística. En los casos anteriores, los valores pueden ser los siguientes:

A (color preferido): rojo, azul, verde, amarillo...

B (número de goles marcados en la última jornada): 0, 1, 2, 3...

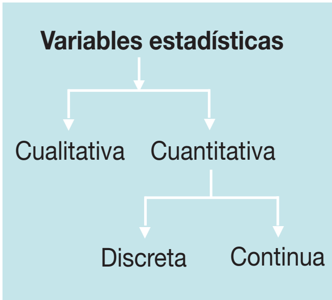
C (estatura): 1,57 m, 1,63 m, 1,594 m, 1,625 m...

Es fácil darse cuenta de que los valores que pueden tomar las variables estadísticas pueden ser, fundamentalmente, de dos tipos: numéricos *(B* y *C),* o no numéricos *(A)*. Por ello, las variables estadísticas se clasifican en *cualitativas* y *cuantitativas.*

Las **variables estadísticas cualitativas** son aquellas que no toman valores numéricos.

En el caso *A,* la variable estadística es cualitativa porque los valores no son números.

Las **variables estadísticas cuantitativas** son las características de la población que se dan en forma numérica.



En los casos *B* y *C,* las variables estadísticas son cuantitativas porque los valores son números. Pueden distinguirse dos tipos:

— Una variable estadística cuantitativa es **continua** si, dados dos valores cualesquiera de la variable, siempre puede obtenerse un valor que se encuentre entre estos dos (caso *C*).

— Una variable estadística cuantitativa es **discreta** si no puede tomar valores intermedios entre dos consecutivos (caso *B*).

Las variables estadísticas que pueden estudiarse a fondo son las cuantitativas, porque es posible hacer operaciones con sus valores.

Actividades

42 Razona de qué tipo son las variables de los estudios estadísticos de la actividad 41.

43 Indica en cada uno de estos casos si la variable estadística es cuantitativa discreta o continua. Justifica la respuesta. Trabaja en tu cuaderno.

a) Una variable estadística que sólo puede tomar los valores 1; 1,25; 1,5; 1,75 y 2.

b) Una variable estadística que puede tomar todos los valores entre 1 y 4.

44 Imagina que tienes que realizar un estudio estadístico sobre la siguiente población: alumnos de 9.º de EGB de una localidad. Indica:

a) La muestra que puedes tomar para el estudio.

b) Tres variables cualitativas.

c) Dos variables cuantitativas continuas.

d) Dos variables cuantitativas discretas.

5.2. Recolección de datos

En un estudio estadístico nos interesa conocer el valor que toma la variable estadística en los diferentes individuos que componen la **muestra** de la población.

En ocasiones, para obtenerlos basta con fijarse en cómo es o cómo se comporta cada individuo; otras veces es necesario hacer mediciones o experimentos científicos. También es frecuente realizar *encuestas.*

Una **encuesta** es un conjunto de preguntas dirigidas a una muestra significativa para la obtención de datos para un estudio estadístico.

Ramas de la estadística

La estadística se divide en dos importantes ramas:

- La **estadística descriptiva,** que se ocupa únicamente de organizar los datos obtenidos en un estudio estadístico.
- La **estadística inferencial,** cuya finalidad es extraer conclusiones fiables sobre una población a partir de los datos recogidos en un estudio estadístico.

En este curso sólo nos ocuparemos de la estadística descriptiva.

Si llevamos a cabo una encuesta, conviene tener presente que:

— Se ha de hacer en un momento adecuado para que la persona encuestada se sienta cómoda y disponga del tiempo necesario.

— Las preguntas han de ser breves y claras, y deben reducirse a las mínimas para obtener la información necesaria.

— Las preguntas no han de mostrar la opinión del encuestador.

— Es preferible formular preguntas con un número limitado de respuestas posibles que dejar opinar libremente al encuestado. En este caso, las encuestas son mucho más difíciles de tratar.


Cortesía CEDATOS


http://netaccess.com.mx

Así, por ejemplo, al realizar una encuesta en una clase sobre la práctica de deporte podemos plantear distintas preguntas:

- *¿Cuál es tu relación con el deporte?* La pregunta puede tener demasiadas respuestas diferentes y puede ser muy complicado extraer alguna conclusión.
- *¿Cuántos días a la semana practicas deporte?* Esta sencilla pregunta es más recomendable y tiene un abanico de respuestas más controlado.

Actividades

45 Razona en cada uno de los siguientes apartados si las situaciones de la encuesta son correctas; si no lo son, ofrece alguna alternativa.

a) Encuesta sobre el maltrato a los animales a la salida de una corrida de toros.

b) La pregunta: *¿Consideras necesaria la aplicación del decreto 385/2009 para el caso del expediente 257?*

c) Encuesta sobre planes de pensiones a los estudiantes de EGB.

d) Encuesta en la calle a todas las personas sobre el grado de satisfacción de las prestaciones de un nuevo modelo de taladro percutor.

e) Encuesta sobre el equipo favorito de fútbol a la salida de un partido si el entrevistador lleva la insignia de un club.

Obtención de muestras

La forma ideal para obtener los datos sería averiguar el valor que toma la variable estadística en *todos y cada uno* de los individuos de la población.

Sin embargo, esto no siempre es posible. Por ejemplo, resulta bastante sencillo preguntar el color favorito a cada uno de los alumnos de una clase, mientras que es muy complicado y costoso medir la estatura de todos los alumnos de 9.° de EGB de una gran ciudad.

Cuando no resulta posible o adecuado obtener los datos de toda la población, se recogen los correspondientes a una **muestra representativa** de esta población; es decir, una muestra que nos pueda dar una idea correcta de los valores de la variable en toda la población.

También es importante el **número de elementos de la muestra:** cuanto más grande sea, mejor representará toda la población, pero más difícil será obtener los datos (se necesitará más tiempo, seguramente más dinero...).

FÍJATE

Una forma sencilla de conseguir una muestra representativa consiste en escogerla al azar; por ejemplo, efectuando un sorteo entre todos los individuos de la población. En este caso se dice que la muestra ha sido obtenida mediante un **muestreo aleatorio.**

ejemplo 9

En los estudios estadísticos siguientes, explica cómo efectuarías la recopilación de datos y si conviene o no tomar una muestra. En caso afirmativo, di cómo la seleccionarías.

a) Si un lote de latas de pescado en conserva está en condiciones o no de salir a la venta.

b) Si un determinado modelo de auto gusta o no a la mayoría de ecuatorianos.

http://gastrosoler.com

http://www.motorfull

a) Para saber si el contenido de una conserva está en buenas condiciones es preciso abrir la lata. Por tanto, se selecciona una muestra de un lote de latas, se las abre y se comprueba si se encuentran en buen estado. La muestra se podría hacer enumerando las latas y haciendo un sorteo.

b) Se debe realizar una encuesta. No se puede hacerla a toda la población porque es demasiado numerosa. La forma más correcta sería tomar una muestra a partir del censo. Otra forma, si no se dispone del censo, podría ser una encuesta en la calle. Pero deberíamos asegurarnos de que la muestra escogida es representativa (por ejemplo, no centrarse en personas de una misma edad o lugar concreto, o que formen parte de la misma familia...).

MUCHO OJO

En una muestra aleatoria, todos los elementos de la población deben tener la misma posibilidad de ser seleccionados.

Actividades

46 Explica cómo obtendrías los datos necesarios para llevar a cabo los estudios estadísticos de la actividad 41. ¿Crees que deberías tomar una muestra? Si es así, ¿qué harías para escoger la muestra?

47 Para conocer el nivel cultural de los habitantes de tu población, se decide efectuar un examen a 100 individuos de una muestra. Razona cuál de estos métodos es el más adecuado:

a) Escoger 100 estudiantes universitarios al azar.

b) Escoger 100 personas al azar de entre las que trabajen en una determinada empresa.

c) Escoger 100 personas al azar de entre las que figuren en una guía de teléfonos.

6 Presentación de datos

Una vez recogidos los datos, debemos ordenarlos para que su estudio sea más sencillo. La mejor forma de hacerlo es mediante tablas.

6.1. Tablas de distribución de frecuencias

Vamos a confeccionar una tabla con el estudio estadístico del número de hermanos que tienen los alumnos de 9.º de EGB de un determinado centro.

De una muestra de 21 alumnos se obtuvieron estos datos:

2, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 3, 1, 0, 5, 1, 2, 0, 0, 1, 3, 2, 0, 1, 0

A partir de esta serie de datos, construimos la siguiente tabla (tabla 1).

Número de hermanos	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
0		8	$\frac{8}{21} = 0{,}381$
1		6	$\frac{6}{21} = 0{,}286$
2		4	$\frac{4}{21} = 0{,}190$
3		2	$\frac{2}{21} = 0{,}095$
5		1	$\frac{1}{21} = 0{,}048$
		21	$\frac{21}{21} = 1$

Tabla 1.

La **frecuencia absoluta** de un valor de la variable estadística es el número de veces que se repite dicho valor.

Para que las frecuencias absolutas nos informen realmente sobre la distribución de los datos de una variable, es necesario compararlas con el número total de individuos.

La **frecuencia relativa** de un valor de la variable estadística es el resultado de dividir la frecuencia absoluta de dicho valor entre el número total de individuos de la población.

Observa que:

- La suma de las frecuencias absolutas es igual al número de alumnos de la clase o, lo que es lo mismo, al número de individuos de la población, que coincide con el número de datos.
- La suma de las frecuencias relativas es igual a 1.

Las frecuencias relativas pueden expresarse en forma de fracción, como un número decimal o como un porcentaje.

$$\frac{8}{21} \xrightarrow[8 \div 21]{} 0{,}381 \xrightarrow[0{,}381 \cdot 100]{} 38{,}1\ \%$$

Fracción — Número decimal — Porcentaje

Actividades

48 Se dispone de los siguientes datos de una encuesta realizada a 25 estudiantes sobre su deporte favorito: la natación es el favorito para 10 personas; el 24 % prefiere el fútbol; la frecuencia relativa de los que eligen el baloncesto es 0,16; hay estudiantes que seleccionaron voleibol.

Confecciona una tabla con la frecuencia absoluta, la frecuencia relativa y el porcentaje de cada uno de los cuatro deportes.

Frecuencias acumuladas

Si en el estudio interesa saber cuántos alumnos de 9.º de EGB tienen 2 o menos de 2 hermanos, debemos sumar las frecuencias absolutas correspondientes a los valores 0, 1 y 2:

$$8 + 6 + 4 = 18$$

Así, 18 alumnos tienen menos de 3 hermanos. El número 18 se denomina la frecuencia absoluta acumulada del valor 2.

La **frecuencia absoluta acumulada** de un valor de la variable estadística es el resultado de sumar a su frecuencia absoluta las frecuencias absolutas de los valores anteriores.

Para saber qué parte del total de la clase tiene 2 o menos de 2 hermanos, sumamos las frecuencias relativas correspondientes a los valores 0, 1 y 2.

$$0{,}381 + 0{,}286 + 0{,}190 = 0{,}857$$

Así, el 85,7 % de la clase tiene 2 o menos de 2 hermanos. Este resultado es la frecuencia relativa acumulada del valor 2.

La **frecuencia relativa acumulada** de un valor de la variable estadística es el resultado de sumar a su frecuencia relativa las frecuencias relativas de los valores anteriores.

FÍJATE

La **frecuencia relativa acumulada** de un valor puede obtenerse también dividiendo la frecuencia absoluta acumulada de dicho valor por el número total de datos:

$$\frac{18}{21} = 0{,}857$$

La tabla que recoge las diferentes frecuencias (absoluta, absoluta acumulada, relativa y relativa acumulada) de los valores de la variable estadística se llama **tabla de distribución de frecuencias.**

Observa en la tabla 2 que:

- La frecuencia absoluta acumulada del último valor de la variable estadística es igual al número de datos.
- La frecuencia relativa acumulada del último valor de la variable estadística es igual a 1.

Número de hermanos	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
0	8	+ 8	0,381	+ 0,381
1	6	+ 14	0,286	+ 0,667
2	4	+ 18	0,190	+ 0,857
3	2	+ 20	0,095	+ 0,952
5	1	21	0,048	1

Tabla 2.

Actividades

49 Las respuestas correctas dadas por los alumnos de una clase en una prueba de Matemática compuesta por 10 preguntas han sido: 6, 6, 7, 4, 5, 7, 3, 9, 7, 8, 5, 5, 3, 6, 4, 3, 5, 6, 5, 5, 5, 7, 8, 5, 5, 6, 8, 4, 6 y 10.

Elabora una tabla de distribución de frecuencias y di cuántos alumnos han contestado correctamente: a) menos de 5 preguntas; b) 5 o más preguntas; c) 8 o más preguntas.

50 Al preguntar a los 30 estudiantes de una clase si a menudo viajaban en autobús, algunos han contestado *pocas veces*; unos, *bastantes veces* y otros, *muchas veces*.

Halla las frecuencias absolutas de *pocas veces,* de *bastantes veces* y de *muchas veces,* sabiendo que son directamente proporcionales a los números 1, 3 y 2, respectivamente.

6.2. Gráficos estadísticos

La información contenida en las tablas estadísticas se interpreta con más facilidad si la representamos mediante gráficos estadísticos.

Seguidamente, mostraremos algunos de los tipos de gráficos más utilizados: el *diagrama de barras,* el *polígono de frecuencias,* el *pictograma,* el *diagrama de sectores,* el *cartograma* y los gráficos *comparativo* y *evolutivo.*

Libros leídos	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada
0	1	1
1	3	4
2	6	10
3	8	18
4	6	24
5	5	29
6	3	32

Tabla 3. Libros leídos por una muestra de alumnos de EGB.

Diagrama de barras

Este gráfico está formado por una serie de barras verticales cuyas alturas son proporcionales a las frecuencias absolutas de los valores de la variable. Observa cómo se dibuja el diagrama de barras correspondiente a los datos de la tabla 3.

— Trazamos unos ejes de coordenadas.

— Sobre el eje de abscisas (horizontal) representamos los valores de la variable estadística.

— Sobre el eje de ordenadas (vertical) representamos sus frecuencias absolutas.

— Para cada valor de la variable estadística trazamos una barra vertical cuya altura coincida con su frecuencia absoluta.

Existen distintas variantes del diagrama de barras, entre las que destacamos el *diagrama de barras de frecuencias acumuladas* y el *diagrama de barras horizontales.*

Diagrama de barras de frecuencias acumuladas

Este diagrama se obtiene al representar en el eje de ordenadas las frecuencias absolutas acumuladas de cada valor de la variable.

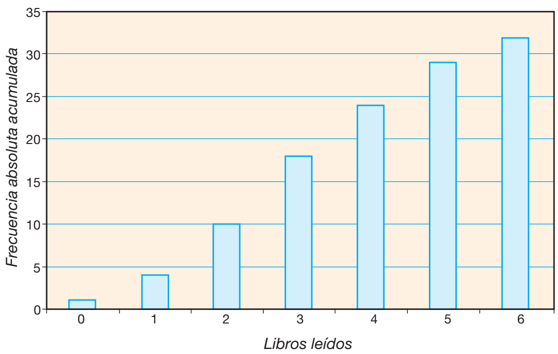
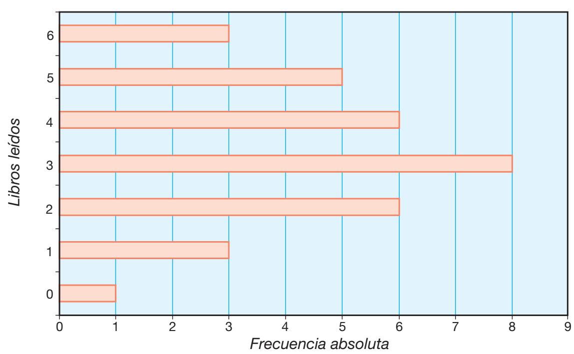


Diagrama de barras horizontales

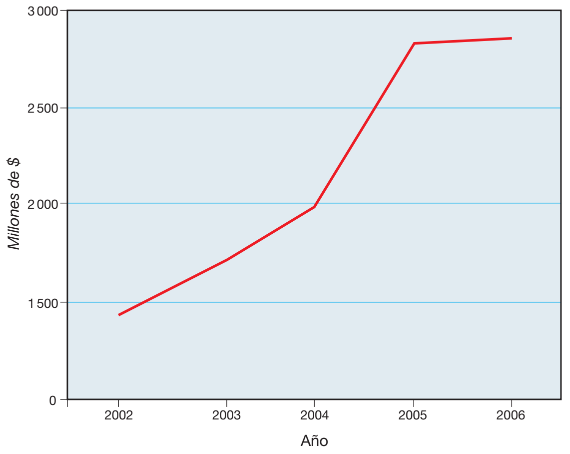
Si al dibujar el diagrama de barras representamos en el eje de abscisas las frecuencias absolutas y en el de ordenadas los valores de la variable estadística, obtenemos el siguiente diagrama.



Polígono de frecuencias

El polígono de frecuencias es una línea poligonal que se obtiene al unir los puntos determinados por los valores de la variable estadística y su correspondiente frecuencia absoluta.

El gráfico siguiente muestra las contribuciones a UNICEF en el período 2002 a 2006.



Pictograma

Es un diagrama de barras en el que éstas se han sustituido por dibujos representativos de la variable estudiada.

Por ejemplo, este pictograma muestra el número de títulos publicados por editoriales durante el año 2006 en el Ecuador.

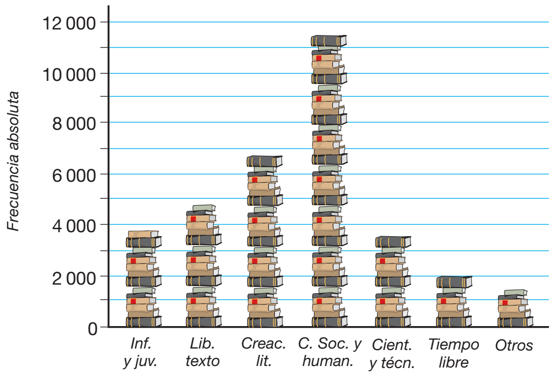


Diagrama de sectores

Los diagramas de sectores consisten en un círculo dividido en tantos sectores como valores toma la variable estadística y cuyas amplitudes son proporcionales a las frecuencias de dichos valores.

Observa cómo se dibuja el diagrama de sectores correspondiente a los datos recogidos sobre el color del pelo de los alumnos de una clase.

Color del pelo	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Rubio	6	0,1875
Castaño	18	0,5625
Negro	8	0,25

— Dibujamos un círculo.

— Calculamos la amplitud de cada sector.

Puesto que un círculo tiene un ángulo central de 360°, para saber la amplitud de los diferentes sectores buscaremos los porcentajes correspondientes de 360°. Utilizaremos las frecuencias relativas expresadas en forma de porcentajes.

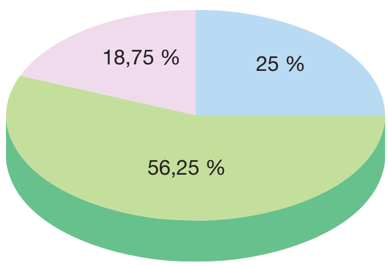
$$18{,}75\ \%\ \text{de}\ 360° = \frac{18{,}75}{100} \cdot 360° = 67{,}5°$$

$$56{,}25\ \%\ \text{de}\ 360° = \frac{56{,}25}{100} \cdot 360° = 202{,}5°$$

$$25\ \%\ \text{de}\ 360° = \frac{25}{100} \cdot 360° = 90°$$

— Con un transportador de ángulos, dividimos el círculo en tres sectores de amplitudes 67,5°, 202,5° y 90°.

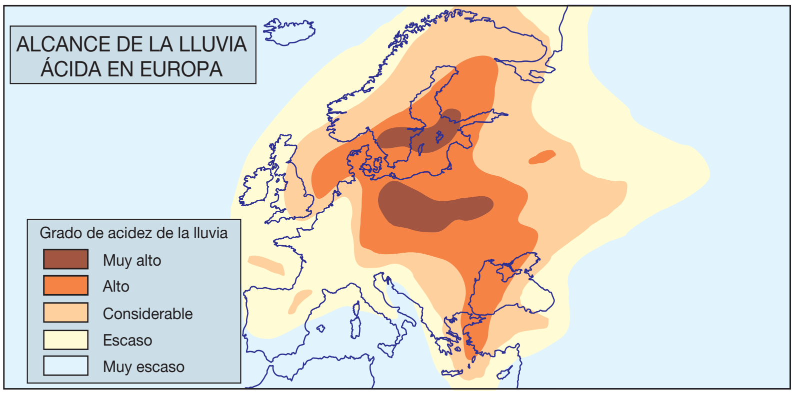
— Coloreamos cada sector de forma diferente y expresamos la frecuencia relativa correspondiente a cada uno de ellos en forma de porcentaje.



En algunos estudios estadísticos se observa que los valores de la variable estadística dependen de las zonas del territorio que estemos considerando. Por ejemplo, el número de habitantes de cada país de la Unión Europea, los diferentes tipos de cultivo de una región… En este caso, lo más habitual es confeccionar un *cartograma.*

Cartograma

Los cartogramas son mapas en los que aparecen coloreadas las diferentes zonas según el valor que toma la variable estadística en cada una de ellas.



En ocasiones, es útil recurrir al uso de gráficos *comparativos* y *evolutivos.*

Gráfico comparativo

En este gráfico se muestran los datos de más de una variable estadística. De esta manera pueden compararse más fácilmente que si se estuvieran representados por separado.

Observa la superposición de tres diagramas de barras.

Al dibujar los tres diagramas en los mismos ejes, podemos contrastar más fácilmente la evolución de la deuda externa, en porcentaje de PNB (producto nacional bruto), en diferentes zonas del planeta, durante varios años.

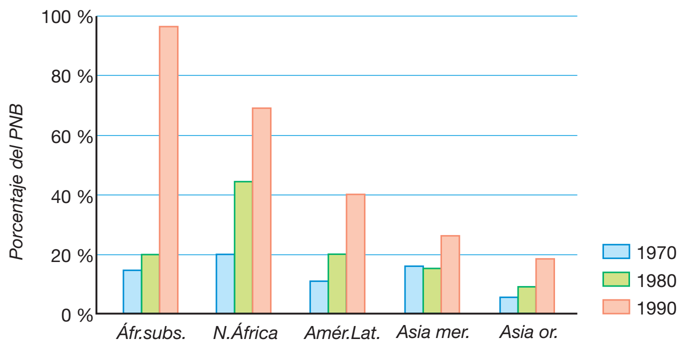
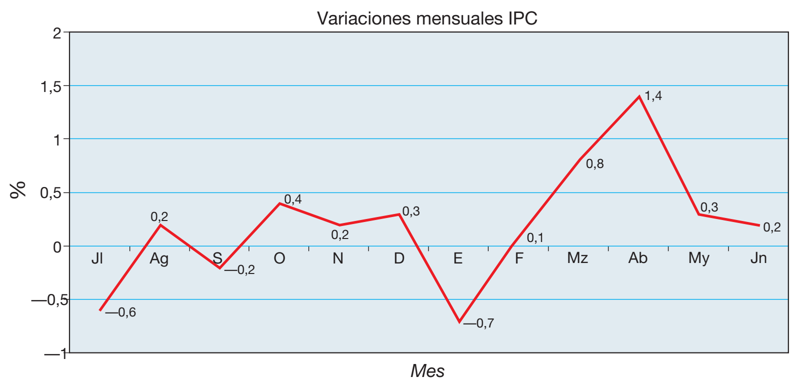


Gráfico evolutivo

En este gráfico evolutivo se muestran las variaciones mensuales del Índice de Precios al Consumo (IPC) a lo largo de un año.



ejemplo 10

En la tabla de la derecha aparece el número de habitaciones de las viviendas de un barrio.

a) ¿Qué porcentaje de viviendas tienen 2 o menos habitaciones? ¿Y más de 3 habitaciones?

b) Construye un diagrama de barras horizontales y un diagrama de sectores de este estudio estadístico.

Número de habitaciones	Frecuencia absoluta
1	20
2	50
3	60
4	20

a) Representamos por x el porcentaje de pisos que tienen 2 o menos habitaciones.

$$20 + 50 = 70$$

$$\frac{x}{100} = \frac{70}{150} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 70}{150} = 46{,}67$$

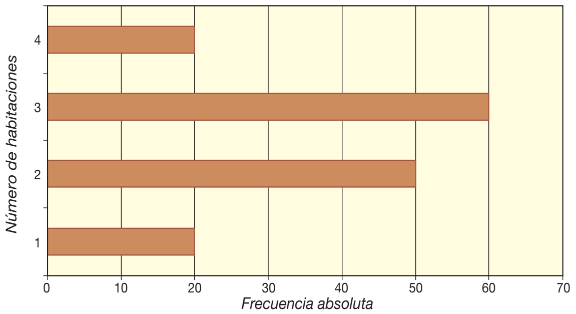
El 46,67 % de viviendas tiene 2 o menos habitaciones.

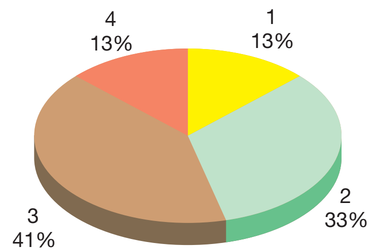
Representamos por y el porcentaje de viviendas que tiene más de 3 habitaciones.

$$\frac{y}{100} = \frac{20}{150} \Rightarrow y = \frac{100 \cdot 20}{150} = 13{,}33$$

El 13,33 % de los pisos tiene más de 3 habitaciones.

b)





Actividades

51 Al lanzar 50 veces dos dados y sumar los puntos, hemos obtenido los siguientes resultados: 4, 3, 8, 12, 6, 2, 7, 9, 11, 5, 3, 7, 12, 10, 9, 4, 6, 8, 11, 10, 2, 6, 10, 12, 3, 5, 7, 7, 11, 6, 11, 5, 4, 2, 9, 12, 10, 3, 2, 5, 7, 4, 3, 5, 6, 9, 11, 8, 6 y 6. Determina la población y la variable estadística.

— Construye la tabla de distribución de frecuencias correspondiente.

— Construye un diagrama de barras, un diagrama de barras de frecuencias acumuladas y un polígono de frecuencias que reflejen los resultados obtenidos.

52 Construye un diagrama de sectores para representar la inversión publicitaria de un país: el 44 % es publicidad televisiva, el 33 % aparece en los diarios, el 14 % en las revistas, el 6,4 % en radio, el 2,2 % es exterior (vallas publicitarias...) y el 0,4 % se anuncia en el cine. Escribe al lado de cada sector la frecuencia relativa expresada en números decimales.

53 En la siguiente tabla aparece la tasa global de fecundidad de tres provincias a lo largo del tiempo.

Confecciona el gráfico evolutivo de cada provincia según los datos de la tabla y elabora un gráfico comparativo con los datos que presentan.

Año / Provincia	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2004
Sucumbíos	2,79	2,20	1,64	1,36	1,18	1,24	1,32
Galápagos	1,93	1,95	1,81	1,78	1,70	1,88	1,90
Cañar	1,77	1,68	1,74	2,13	1,73	1,54	1,75

7 Parámetros estadísticos

Si observas los periódicos, podrás leer noticias con los siguientes datos:

- Cada persona produce en promedio 537 kg de basura al año.
- El número medio de hijos por mujer en Ecuador es 1,52.

Estas informaciones proceden del cálculo, a partir de los valores de la variable, de unos parámetros estadísticos. A continuación, estudiaremos tres de ellos: la *media aritmética,* la *moda* y la *mediana.*

7.1. Media aritmética

Cuando trabajamos con variables estadísticas cuantitativas, podemos tomar como valor representativo de la serie de datos el que resultaría de repartir la suma de todos los datos en partes iguales entre el número total de ellos.

Libros leídos (x_i)	Frecuencia absoluta (n_i)
$x_1 = 0$	$n_1 = 1$
$x_2 = 1$	$n_2 = 3$
$x_3 = 2$	$n_3 = 6$
$x_4 = 3$	$n_4 = 8$
$x_5 = 4$	$n_5 = 6$
$x_6 = 5$	$n_6 = 5$
$x_7 = 6$	$n_7 = 3$
	$N = 32$

Tabla 4.

La **media aritmética** de una serie de datos se obtiene sumando todos los datos y dividiendo entre el número total de ellos. Se representa por $\bar{x}$.

ejemplo 11

La edad, en años, de los participantes en un campeonato de ajedrez es la siguiente: 16, 21, 45, 36, 30, 18, 29, 27, 18, 47, 22 y 40. Calcula la media aritmética de estos datos.

Para hallar la media aritmética, sumamos la edad de cada uno de los participantes y dividimos el resultado por el número de participantes.

$$\bar{x} = \frac{16+21+45+36+30+18+29+27+18+47+22+40}{12} = 29{,}1$$

La edad media es de 29,1 años.

Para calcular la media aritmética de un conjunto de datos cuyos valores se repiten, podemos utilizar las frecuencias absolutas (n_i) de cada valor de la variable (x_i). Así, para los datos de la tabla 4:

$$\bar{x} = \frac{0\times1+1\times3+2\times6+3\times8+4\times6+5\times5+6\times3}{32} = 3{,}3$$

Si representamos por $x_1, x_2, ..., x_k$ los diferentes valores de la variable, por $n_1, n_2, ..., n_k$ sus respectivas frecuencias absolutas y por N el número de datos, la media aritmética se expresa:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ ... \ + x_k \cdot n_k}{N}$$

FÍJATE

El número 1 de la expresión x_1 es un *subíndice.*

La expresión x_1 se lee *equis sub uno.*

Actividades

54 Los recibos bimensuales de consumo doméstico de agua, en m³, de una familia a lo largo de un año han sido: 29, 50, 28, 41, 29 y 37. ¿Cuál es el consumo medio mensual?

55 La media aritmética de las calificaciones de las dos primeras pruebas de Matemática que ha hecho un alumno es 5,3. ¿Qué nota debe sacar en la tercera prueba para que su calificación global sea 6?

7.2. Moda

Un valor importante en cualquier serie de datos, tanto si corresponde a una variable cualitativa como cuantitativa, es el que más veces se repite dentro de la serie. Este valor de la variable recibe el nombre de *moda.*

La **moda** es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia absoluta.

Puede ocurrir que existan dos o más valores de la variable con frecuencia absoluta máxima. En este caso se dice que la distribución de datos es *bimodal* (dos modas), *trimodal* (tres modas)... o, en general, *multimodal* (varias modas).

Así, se observa en la tabla 4 de la página anterior que la moda es 3, y en el ejemplo 11 es 18.

7.3. Mediana

En el caso de variables estadísticas cuantitativas podemos ordenar los datos de una serie de menor a mayor.

Observa los siguientes datos, ya ordenados, de la variable estadística *horas diarias dedicadas al estudio.*

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3

Vemos que el 1 ocupa el lugar central. Diremos que 1 es la *mediana.*

Pero, ¿qué ocurre si el número de datos es par? Obsérvalo en este ejemplo.

15, 23, 24, 26 , 26 , 28 , 30, 36, 36, 40

Ahora hay dos datos centrales, 26 y 28. Diremos que la mediana es la media aritmética de estos dos datos.

$$\frac{26 + 28}{2} = 27$$

Al ordenar de menor a mayor los datos obtenidos en un estudio estadístico, la **mediana** es:

- El dato que ocupa el lugar central si el número de datos es impar.
- La media aritmética de los dos datos centrales si el número de datos es par.

Rango

Centralización y dispersión

La media aritmética, la moda y la mediana son parámetros estadísticos de *centralización* porque nos proporcionan una idea global de la variable estudiada.

Existen otros parámetros, llamados de **dispersión,** que nos informan de si los datos están agrupados alrededor de los parámetros de centralización.

Uno de estos parámetros es el **rango**, *recorrido* o *amplitud,* que es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de una serie de datos.

Observa las siguientes series de datos:

- 5, 6, 4, 5, 4, 6, 5 y 5
- 1, 10, 2, 7, 9, 0, 8 y 3

En la primera el **rango** es 2, el valor máximo 6 y el mínimo 4; en la segunda serie, el **rango** es 10, el valor máximo 10 y el mínimo, 0.

La media aritmética de ambas es 5. Sin embargo, mientras que en la primera serie todos los datos se acercan a la media, en la segunda están más alejados.

Actividades

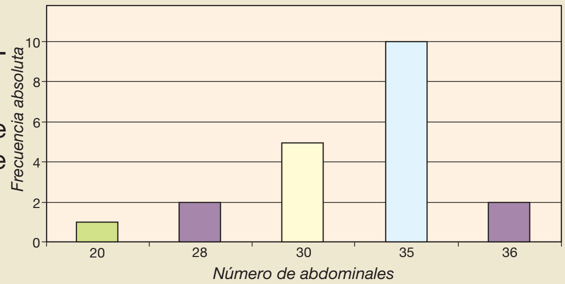
56 Un jugador de baloncesto ha conseguido las siguientes puntuaciones en distintos partidos: 15, 20, 21, 17, 18, 11, 15, 16, 14, 11, 22, 25, 9, 12, 18, 15, 14, 14 y 20. Calcula la media aritmética, la moda, la mediana y el rango.

— Añade el valor 19 a la serie y calcula de nuevo los parámetros estadísticos anteriores.

57 El diagrama de barras de la derecha representa el número de abdominales que han hecho los 20 alumnos de una clase en 1 minuto.

a) Elabora la tabla de distribución de frecuencias.

b) Halla la media aritmética, la moda, la mediana y rango.



Ejercicios y problemas integradores

- Durante el empaquetado de fundas de azúcar, un supervisor registra en su informe de observaciones la siguiente sucesión de tiempos (en segundos), utilizados por una de las máquinas:

Con estos datos, dentro de su informe, el supervisor debe presentar el cálculo de la media aritmética y de la mediana. Veamos como lo realiza:

Para la media aritmética tenemos $\bar{x} = \dfrac{\textit{suma de todos los datos}}{\textit{número total de datos}}$

reemplazando los datos registrados en la fórmula tenemos:

$$\bar{x} = \frac{4,16 + 42,2 + 4,96 + 4,20 + 4,73 + 4,28 + 4,39}{7} = \frac{68,92}{7}$$

Luego, el promedio de tiempo que usan las máquinas para sellar fundas de azúcar es $\bar{x} = 9,845\,714\,29$ segundos, como puedes observar, no corresponde a un número decimal periódico infinito. Realicemos una aproximación de este valor a las milésimas, el valor será de $\bar{x} = 9,846$ segundos.

Ahora realicemos el cálculo de la mediana, para esto es necesario que los datos se encuentren ordenados, los ponemos de menor a mayor: 4,16; 4,20; 4,28; 4,39; 4,73; 4,96; 42,2.

La posición de la mediana en una distribución de frecuencias se determina por la fórmula: $Me = \frac{n+1}{2}$, en nuestro caso, n = 7 lecturas. Por lo anterior, la posición que ocupa la mediana en la sucesión de tiempos es el cuarto lugar. Es decir, la mediana de los datos es Me = 4,39 segundos.

Pero, al momento de pasar a limpio su informe, el supervisor se da cuenta de que cometió un error al registrar el tiempo 42,2 segundos, pues este debió ser registrado como 4,22 segundos, al cambiar este dato, debe volver a realizar los cálculos. Veamos que obtiene:

Cálculo de la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{4{,}16 + 42{,}2 + 4{,}96 + 4{,}20 + 4{,}73 + 4{,}28 + 4{,}39}{7} = \frac{30{,}94}{7}$$

Por lo que el promedio de los tiempos registrados es $\bar{x} = 4{,}42$ *s*.

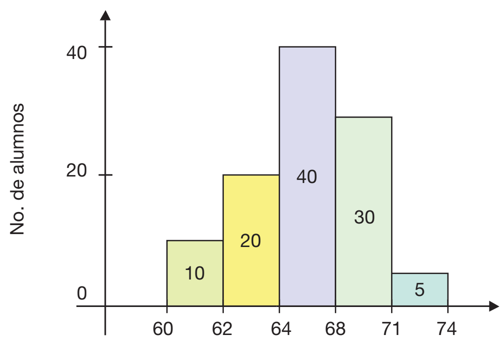
De manera semejante, calculamos la mediana de los tiempos, ordenándolos en forma ascendente tenemos: 4,16; 4,20; 4,22; 4,28; 4,39; 4,73; 4,96. Luego el valor de la nueva mediana es de Me = 4,28 *s*.

Hechas las correcciones queda claro que de las medidas de tendencia central, la más sensible a los valores atípicos (extremos, o muy grandes o muy pequeños) es la media aritmética.

Investiga qué sucede con los valores de la media, mediana y moda en una distribución cualquiera de datos, si le sumas una misma cantidad a cada uno de los datos, si restas un mismo valor a cada uno de los datos, si multiplicas por un mismo valor o si divides a cada uno de los datos por un mismo valor.

Practica

- El histograma de la distribución correspondiente al peso en kg de 105 alumnos de Bachillerato es el siguiente:



a) Si Miguel pesa 72 kg, ¿Cuántos alumnos hay menos pesados que él?

b) Calcula la moda

c) Calcula la mediana

Cómo resolver problemas

Estrategia: Búsqueda de contraejemplos

La *búsqueda de contraejemplos* se utiliza para demostrar que un cierto enunciado matemático es falso.

Recuerda que un enunciado expresado de manera general ha de cumplirse en todos los casos imaginables. Así, si encontramos un caso particular ***(contraejemplo)*** en que esto no sea así, el enunciado ya no es válido.

Demuestra la falsedad del siguiente enunciado:

«La moda de una serie de datos es siempre mayor que la media aritmética.»

Comprensión del enunciado

— Escribe la definición de los conceptos estadísticos que aparecen en el problema.

— Lee de nuevo el enunciado y explícalo con tus palabras.

Planificación de la resolución

— Para resolver el problema aplicaremos la estrategia de buscar un contraejemplo.

— Para ello, buscaremos una serie de datos en los que la moda sea menor que la media aritmética.

— A partir de las definiciones de moda y media aritmética, podemos intuir una serie concreta sencilla que contradiga el texto del enunciado.

Ejecución del plan de resolución

— Consideramos, por ejemplo, una serie sencilla de tres datos y dos valores distintos. Como la moda es inferior a la media aritmética, el valor que se repite debe ser el menor. Así, proponemos la serie de datos:

1 1 2

— Como el valor que más se repite es el 1, este valor es la moda de la serie.

— Calculamos la media aritmética:

$$\frac{1+1+2}{3} = \frac{4}{3} > 1$$

— Puesto que la moda es menor que la media aritmética, hemos demostrado que el enunciado inicial no es cierto.

Revisión del resultado y del proceso seguido

— Repasamos los cálculos efectuados y comprobamos que son correctos.

Actividades

Pon en práctica la estrategia anterior para demostrar la falsedad de los enunciados siguientes:

58 La suma de las frecuencias relativas de los valores de una serie de datos coincide con el número de datos.

59 Para decidir por mayoría absoluta la aceptación o el rechazo de una norma en una comunidad de 100 individuos con derecho a voto es necesario la obtención de 51 votos.

En resumen

Fracciones positivas

Fracciones negativas

$\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros, $b \neq 0$

con ellas efectuamos

Operaciones

Suma, resta, multiplicación y división

Operaciones combinadas

Potenciación y radicación

expresión decimal de una fracción

Número decimal

fracción generatriz de un número decimal

con ellos estudiamos

Aproximaciones, estimaciones, redondeos y errores

Completa en tu cuaderno:

Estadística

estudia las

Variables estadísticas

pueden ser

Cualitativas

Cuantitativas discretas

Cuantitativas continuas

de una

....

si es muy grande se toma una

....

se obtienen

Datos

se ordenan mediante

se representan mediante

se estudian sus

Tabla de distribución de frecuencias:

- Frecuencia ....
- Frecuencia ....
- Frecuencia ....
  ....
- Frecuencia ....
  ....

Gráficos estadísticos:

- Diagrama de barras
- Polígono de frecuencias
- Pictograma
- Diagrama de sectores
- Cartograma
- Gráficos comparativo y evolutivo

Parámetros estadísticos:

- Media aritmética
- Moda
- Mediana

Ejercicios y problemas

Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

Fracciones positivas y negativas

60 Completa en tu cuaderno:

a) $\frac{2}{7}$ de 2 800 c) $\frac{3}{4}$ de 15 000

b) $\frac{3}{5}$ de..... = 1500 d) $\frac{3}{8}$ de..... = 240

61 Clasifica las fracciones siguientes en positivas y negativas. Después, transforma las fracciones con denominador negativo en fracciones con denominador positivo.

$$\frac{-3}{5},\ \frac{4}{-7},\ \frac{3}{8},\ -\frac{5}{9},\ \frac{-2}{-3},\ \frac{3}{11}$$

62 Averigua si estos pares de fracciones son equivalentes.

a) $\frac{6}{10}$ y $\frac{9}{15}$ b) $\frac{7}{-5}$ y $\frac{14}{10}$

63 Simplifica las siguientes fracciones.

$$\frac{44}{-80};\ \frac{5\,292}{9\,702};\ \frac{-123}{360};\ \frac{-1274}{-3\,458}$$

64 Determina cuál es la fracción irreducible equivalente a estas fracciones.

$$\left\{\frac{-3}{8},\ \frac{-6}{16},\ \frac{6}{-16},\ \frac{-9}{24},\ \frac{12}{-32},\ \ldots\right\}$$

— ¿Son equivalentes entre sí todas las fracciones?

65 Halla dos fracciones equivalentes a $\frac{14}{-18}$ y a $\frac{-54}{135}$ que tengan el mismo denominador.

66 Representa sobre la recta las siguientes fracciones.

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{-3}{-2}$ c) $\frac{9}{-7}$ d) $\frac{-5}{8}$

67 Copia la recta en tu cuaderno y escribe las fracciones irreducibles representadas en ella.

68 Ordena de menor a mayor las fracciones de estas series. Represéntalas sobre la recta y comprueba que las has ordenado correctamente.

a) $\frac{-3}{4},\ \frac{5}{2},\ \frac{-7}{6},\ \frac{3}{4},\ \frac{-7}{-6},\ \frac{5}{-2}$

b) $\frac{4}{3},\ \frac{2}{-3},\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{-3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{1}{-2}$

Operaciones con fracciones

69 Efectúa:

a) $\frac{3}{7}+\frac{-5}{4}$ c) $\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$

b) $\frac{3}{20}-\frac{5}{12}$ d) $2-\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{5}$

70 Calcula:

a) $\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{-7}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}$ c) $-\frac{2}{3}\div\frac{3}{34}$

b) $-\frac{3}{20}\cdot\frac{-4}{5}\cdot\frac{13}{15}$ d) $\frac{5}{6}\div\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)$

71 Resuelve:

a) $\frac{1}{3}+2\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)\div\frac{-4}{5}+1$

b) $\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\div\frac{4}{3}+1\right]\div\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}$

72 Efectúa:

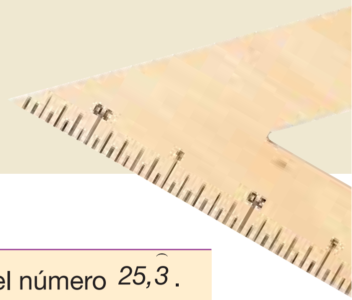
a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{5}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}\div\left(-\frac{3}{4}\right)^{-4}$

c) $\left[\left(-\frac{7}{8}\right)^{7}\right]^{-2}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)^{9}\div\left(\frac{7}{8}\right)^{-3}$

73 Formen grupos de 3 o 4 compañeros, y completen en sus cuadernos el siguiente cuadrado mágico con potencias de exponente natural de la fracción $\frac{2}{3}$ si el producto de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es $\left(\frac{2}{3}\right)^{15}$.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{6}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{7}$	
		$\left(\frac{2}{3}\right)^{9}$



74 Halla las siguientes raíces cuadradas.

a) $\sqrt{1+\frac{11}{25}}$ c) $\sqrt{\frac{120}{49}+\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{-10}{7}\right)}$

b) $\sqrt{\frac{7}{2}+\left(\frac{-5}{4}\right)}$ d) $\sqrt{\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}-3\cdot\left(\frac{-7}{2}\right)}$

Relación entre las fracciones y los decimales

75 Clasifica estos números decimales en limitados e ilimitados.

$2{,}34;\ 1{,}232\,323\,23...;\ -0{,}0\overset{\frown}{3};$

$5{,}412\,3;\ 2{,}\overset{\frown}{13};\ 0{,}034\,034\,034...$

76 Relaciona el resultado de cada una de las siguientes operaciones con la fracción generatriz correspondiente.

1) $2{,}\overset{\frown}{3}+0{,}5+1{,}0\overset{\frown}{3}$ a) $\frac{69}{20}$

2) $4{,}8\overset{\frown}{6}-1{,}3\overset{\frown}{4}$ b) $\frac{58}{15}$

3) $1{,}\overset{\frown}{6}\cdot 2{,}\overset{\frown}{1}$ c) $\frac{317}{90}$

4) $7{,}\overset{\frown}{6}:2{,}\overset{\frown}{2}$ d) $\frac{95}{27}$

77 Completa esta tabla en una cartulina.

Fracción irreducible	Expresión decimal	Clasificación del número decimal
$\frac{1}{3}$		Decimal ilimitado periódico puro
	$2{,}8\overset{\frown}{3}$	
	$4{,}4$	
$\frac{38}{15}$		

78 Escribe tres fracciones con denominador 3 y numerador no nulo. Busca la expresión decimal de cada una. ¿Qué observas?

— ¿Y si escribes tres fracciones cuyos denominadores sean múltiplos de 2 y 5 únicamente?

79 Calcula las siguientes operaciones de números decimales.

a) $(0{,}524\,1+0{,}239)$ c) $3{,}75\cdot 8{,}246$

b) $4{,}023-2{,}671$ d) $4{,}56\div 2{,}1$

80 Calcula la fracción generatriz del número $25{,}\overset{\frown}{3}$.

— Es un número decimal ilimitado periódico puro. Llamamos x al número decimal.

$$x = 25{,}333...$$

— Multiplicamos la expresión anterior por 10 para que la coma quede situada después del primer período.

$$10x = 253{,}333...$$

— Restamos las dos expresiones anteriores.

$$\begin{array}{rl} 10x = & 253{,}333... \\ -\quad x = & 25{,}333... \\ \hline 9x = & 228 \end{array}$$

— Despejamos x y simplificamos la fracción.

$$x = \frac{228}{9} = \frac{76}{3}$$

81 Halla la fracción generatriz de cada uno de estos números decimales.

$-1{,}\overset{\frown}{3};\ 8{,}\overset{\frown}{34};\ 2{,}1\overset{\frown}{16};\ 0{,}\overset{\frown}{007};\ 12{,}3\overset{\frown}{45}$

Aproximación, redondeo y error

82 Redondea los siguientes números hasta las décimas y calcula mentalmente en cada caso el error que has cometido.

a) 12,456 b) 0,32 c) 9,56 d) 17,054

83 Efectúa una estimación del resultado de estas operaciones y determina el error cometido en cada caso.

a) $4{,}7+8{,}173+0{,}851\cdot 12{,}431$

b) $153{,}672+67{,}043-53{,}38\cdot 1{,}19$

c) $0{,}842\cdot 0{,}493+1{,}131+7{,}79$

Estadística: conceptos generales

84 Señala en cuáles de los siguientes estudios estadísticos sería necesario tomar una muestra. Justifica tu respuesta.

a) Color del pelo de los alumnos de una clase.

b) Medio de transporte del alumnado de un colegio.

c) Nivel cultural de los habitantes de un país.

d) Lugar preferido por los ecuatorianos para pasar las vacaciones.

85 Identifica la población de cada uno de los siguientes estudios estadísticos y también indica si es necesario seleccionar una muestra.

a) Opinión de los alumnos de Bachillerato de un centro escolar sobre el equipamiento informático del centro.

b) Número de horas semanales que dedican los alumnos/as de EGB de una determinada provincia a practicar algún deporte.

c) Opinión de los ecuatorianos/as sobre un determinado partido político.

d) Peso de los jugadores de un equipo de fútbol.

86 Identifica si estas afirmaciones son ciertas o falsas.

a) Una variable estadística puede ser cualitativa continua.

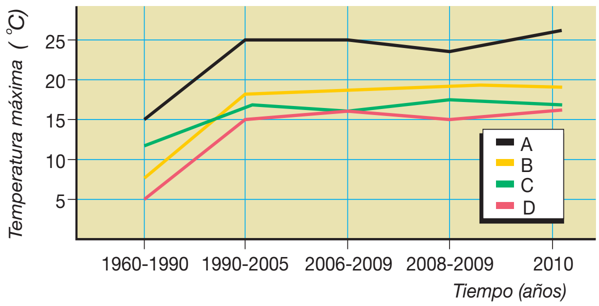
b) El peso y la altura son variables estadísticas cuantitativas discretas.

c) Se quiere hacer un estudio sobre la profesión de los habitantes de una ciudad. Se trata de una variable cualitativa.

d) El tiempo que tardan los alumnos del centro en ir a clase es una variable cuantitativa continua.

Presentación de datos

87 Observa el gráfico comparativo de la siguiente figura, indica cuántas variables estadísticas están representadas y compáralas.



88 Indica un tipo de representación adecuada a cada una de las siguientes variables.

a) Idioma hablado por diferentes personas.

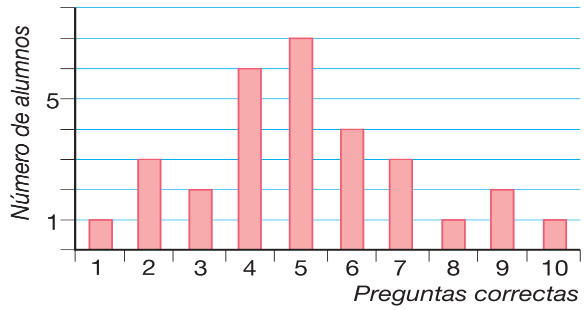
b) Resultado de unas elecciones.

c) Procedencia de los turistas extranjeros.

d) Variación de la inflación a lo largo del tiempo.

89 Observa en el diagrama de barras los resultados obtenidos por los alumnos de una clase en una prueba de Matemática y responde:

a) ¿Cuántos alumnos hay en esa clase?



b) ¿Cuál ha sido la nota obtenida por un mayor número de alumnos/as? ¿Qué porcentaje de alumnos ha obtenido esa nota?

c) ¿Qué porcentaje ha respondido correctamente más de cinco preguntas?

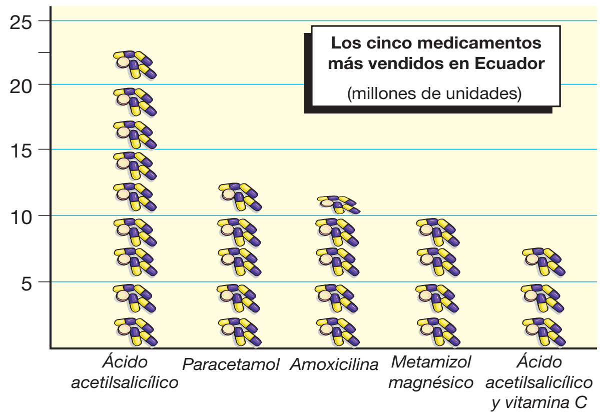
90 Hemos preguntado a 10 personas el número de películas que han visto durante la última semana y hemos obtenido los siguientes datos:

1 2 2 1 4 3 2 1 0 1

a) Construye la tabla de distribución de frecuencias.

b) Representa estos datos en un diagrama de barras acumuladas.

91 Observa este pictograma y di cuáles son la población y la variable estadística estudiadas.



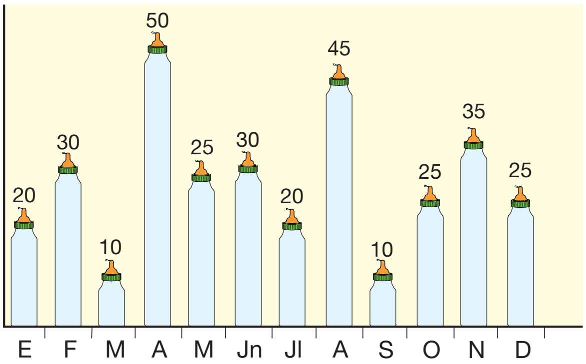
— Justifica si son correctas estas conclusiones.

- Los ecuatorianos son propensos a las jaquecas, ya que, a excepción de la amoxicilina –un antibiótico–, los demás son calmantes.
- El ácido acetilsalicílico es el medicamento más consumido en el Ecuador.
- Los ecuatorianos/as utilizan principalmente la amoxicilina para aliviar sus dolores de cabeza.

— Realiza una encuesta en tu familia para averiguar los medicamentos que más consumen.

Parámetros estadísticos

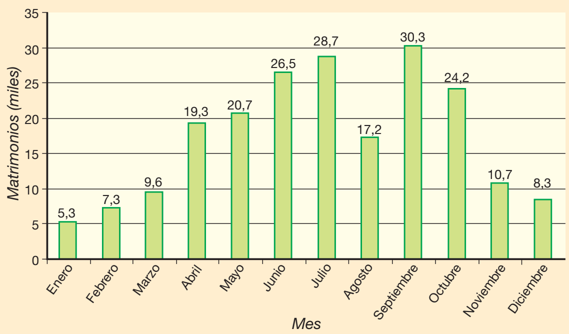
92 Este pictograma refleja el mes de nacimiento de los alumnos de EGB de un colegio.



— Construye la tabla de distribución de frecuencias correspondiente.

— Indica cuál es el valor de la moda y calcula la media mensual de nacimientos.

93 *El siguiente diagrama muestra los matrimonios celebrados durante 2005 en el Ecuador.*



a) ¿En qué trimestre se produjeron más enlaces?

b) ¿Cuál es la media mensual de matrimonios?

a) $x_{1\ tr} = 5{,}3 + 7{,}3 + 9{,}3 = 22{,}2$

$x_{2\ tr} = 19{,}3 + 20{,}7 + 26{,}5 = 66{,}5$

$x_{3\ tr} = 28{,}7 + 17{,}2 + 30{,}3 = 76{,}2$

$x_{4\ tr} = 24{,}2 + 10{,}7 + 8{,}3 = 43{,}2$

En el tercer trimestre del año.

b) $$\bar{x} = \frac{5{,}3+7{,}3+9{,}6+19{,}3+20{,}7+26{,}5+28{,}7+ +17{,}2+30{,}3+24{,}2+10{,}7+8{,}3}{12} = 17{,}3$$

94 Ordena mediante una tabla de distribución de frecuencias los datos de la siguiente serie estadística:

4, 3, 8, 12, 6, 2, 7, 9, 11, 5, 3, 9, 12, 10, 9, 4, 4, 8, 11, 10, 2, 6, 10, 12, 3, 5, 9, 7, 11, 6, 11, 5, 4, 2, 9, 12, 10, 3, 2, 5, 9, 4, 3, 5, 4, 9, 11, 8, 4 y 6.

— Dibuja los diagramas de barras y de sectores correspondientes.

— Calcula la media aritmética, la moda, la mediana y rango.

95 En un concurso musical se presentan 2 chicos por cada 3 chicas. La media aritmética de la edad de los chicos es 22 y la de la edad de las chicas es 21. ¿Cuál es la media aritmética de la edad de los concursantes?

96 Un estudio sobre el número de horas que tus compañeros y compañeras dedican a la lectura los fines de semana.

— Construye la tabla de distribución de frecuencias correspondiente.

— Calcula las frecuencias relativas en porcentajes y dibuja el diagrama de sectores correspondiente.

— Calcula el tiempo medio dedicado a la lectura durante los fines de semana.

Computador y calculadora en estadística

97 La tabla muestra el resultado de una encuesta entre 176 estudiantes para averiguar el medio de transporte que utilizan habitualmente para acudir a su centro de enseñanza.

Medio de transporte	Frecuencia absoluta
Autobús	45
A pie	52
Bicicleta	23
Moto	5
Automóvil	37
Trolebús	14

Con la ayuda de un programa informático confecciona el diagrama de barras, el polígono de frecuencias, el pictograma y el diagrama de sectores correspondientes.

98 Los habitantes de una pequeña localidad ecuatoriana tienen las siguientes edades: 58, 91, 84, 33, 46, 82, 24, 29, 59, 99, 53, 59, 12, 65, 7, 1, 28, 41, 59, 29, 1, 39, 19, 67, 62, 59, 95, 29, 4, 2, 89, 57, 52, 7, 4 y 5. Con una hoja de cálculo determina la edad media, la moda, la mediana y rango.

99 Durante los cuatro días de un festival se ha registrado la siguiente asistencia de espectadores: 1.^{er} día: 92 341 espectadores; 2.º día: 81 429 espectadores; 3.^{er} día: 85 031 espectadores; 4.º día: 83 927 espectadores. Ordena los datos en una tabla y, con una calculadora o un computador, calcula la media diaria de espectadores del festival.

Aplicación en la práctica

100 Inti tiene ahorrados \$ 24, que representa $\frac{1}{11}$ más del dinero que tenía la semana pasada. ¿Cuánto dinero tenía hace siete días?

101 En un almacén de ropa rebajan determinadas prendas en una sexta parte de su precio.

a) ¿Cuánto pagaremos por unos pantalones cuyo precio antes de la rebaja era \$ 48,12?

b) ¿Cuál era el precio de una camisa que después de la rebaja nos ha costado \$ 30,20?

102 En una caja hay bolas de tres colores: una tercera parte son bolas rojas, dos novenas partes son bolas amarillas y el resto son de color verde. Al sacar de la caja las rojas, han quedado 60 bolas. ¿Cuántas bolas hay de cada color?

103 La relación entre las longitudes de dos varillas es $\frac{3}{4}$ y la suma de sus longitudes es 10,92 cm. ¿Cuánto mide cada una de las varillas?

104 Para ir de una ciudad a un pueblo hemos caminado $\frac{47}{50}$ partes del trayecto en tren y $\frac{5}{6}$ partes que queda en bicicleta y aún nos quedan por recorrer 2 km. ¿Qué distancia separa la ciudad del pueblo?

105 Un electricista ha finalizado tres reparaciones. En la primera ha utilizado la mitad del cable eléctrico del que dispone, en la segunda la sexta parte y en la tercera la novena parte, y aún le quedan 20 m de cable menos de los que ha necesitado para la primera reparación.

a) ¿De cuántos metros de cable dispone?

b) ¿Cuántos metros de cable ha utilizado en las reparaciones?

106 Elisa quiere amoblar su casa. Destinará $\frac{4}{7}$ del presupuesto al comedor, $\frac{1}{8}$ a la cocina y el resto, a partes iguales, a los tres dormitorios. ¿A qué dependencia da la casa dedicará una cantidad mayor del presupuesto y a cuál una cantidad más pequeña?

107 Unos amigos quieren celebrar una fiesta con \$ 30. Las bebidas gaseosas cuestan \$ 6,35; los bocadi – tos \$ 15,50 y los postres \$ 7,45. Redondea estos valores hasta las unidades y estima el precio total de la comida. ¿Tendrán suficiente dinero para pagar la comida con la cantidad de la que disponen?

108 @ Representa sobre la recta las siguientes fracciones.

$$\frac{2}{5};\ \frac{6}{7};\ \frac{4}{9}$$

A continuación, entra en la página web: http://descartes.cnice.mecd.es/4b_eso/Representacion_en_la_recta/Numeros2.htm y compara tus representaciones gráficas con las correspondientes escenas.

109 @ Entra en la página Web http://www.geocities.com/millers_math/fr_calc/fr_calc.html y resuelve ejercicios con la calculadora de fracciones.

110 Los datos de la siguiente serie estadística están ordenados: 2, 3, 4, *a,* 7, *b,* 8. Halla los valores de *a* y de *b* sabiendo que la mediana es 5 y que la moda es 7.

111 Pregunta a cada uno de tus compañeros y compañeras de clase el deporte que prefiere. Calcula las frecuencias absolutas y las relativas, y expresa los resultados obtenidos en una tabla de frecuencias.

— Construye el diagrama de barras correspondiente. ¿Crees que sería adecuada en este caso la confección de un cartograma?

112 Dada la siguiente serie de datos: 3, 5, 2, 4, 6, 8, 7:

a) Calcula la media aritmética.

b) Suma dos unidades a cada uno de los datos. ¿Cuál es la media aritmética? ¿Qué observas?

c) Multiplica por 3 cada uno de los datos de la serie inicial. Calcula la media aritmética. ¿Qué observas?

113 En una carrera en la que han participado 25 corredores, la media aritmética del tiempo empleado por los 20 primeros es 1 h 15 min y la de todos los corredores es 1 h 18 min. Halla la media aritmética de los últimos cinco corredores.

Más a fondo

114 Si a los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{4}{5}$ de una fracción le sumamos $\frac{-5}{8}$, obtenemos $\frac{-17}{45}$. ¿De qué fracción se trata?

115 Con la tercera parte del contenido de una botella de refresco de 0,5 l y la sexta parte del de una botella de 2,5 l, llenamos la sexta parte de una jarra. ¿Qué capacidad tiene dicho jarrón?

116 Un grifo llena un depósito en 7 h y otro en 5 h. ¿Qué fracción de depósito llena cada grifo en una hora? ¿Y si están abiertos ambos a la vez?

Llena y vacía recipientes

Se dispone de un recipiente de 7,5 l de capacidad completamente lleno de agua y de dos recipientes de 2 l y 5,5 l completamente vacíos. Ninguno de ellos tiene marcas divisorias.

¿Qué pasos hay que seguir para obtener un volumen de agua exactamente igual a 6 l?

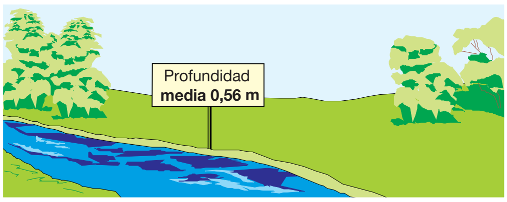
Nota: Se puede traspasar agua de un recipiente a otro; pero está prohibido echar agua fuera de los recipientes.

Hay que saber leer las estadísticas

Es curiosa la frase del estadounidense Samuel Langhorne Clemens (1835-1910), más conocido por su seudónimo literario Mark Twain: «Hay tres clases de mentiras: las mentiras, las malditas mentiras y las estadísticas».

- Un reciente estudio psicopedagógico dice que los niños con pies grandes saben leer mejor que los que tienen los pies pequeños. ¿Permitirá el tamaño del pie medir la capacidad de lectura de los niños?

- Las estadísticas dicen que casi todos los accidentes de auto ocurren cerca de casa. ¿Significa esto que viajar por carretera, lejos de nuestra ciudad, es menos peligroso que hacerlo por nuestro barrio?
- Un político promete que si sale elegido subirá los sueldos, de forma que nadie cobre por debajo de la media nacional. ¿Lo podrá cumplir?
- Observa la señal que aparece en el margen de un río.



¿Crees que podrás cruzar el río sin tener ninguna dificultad?

Buen Vivir

Biodiversidad y ambiente sano

El Sistema Nacional de Áreas Protegidas (SNAP), administrado por el Ministerio de Ambiente, busca garantizar la existencia y perpetuidad de los ecosistemas; conservar la diversidad genética y específica de la vida silvestre; recrear los ambientes naturales y fomentar la participación de las comunidades en la conservación de la naturaleza. Estáconstituido por 33 áreas protegidas, que representan aproximadamente el 18 % de la superficie del país.

El país tiene 9 parques nacionales, 1 parque binacional, 10 reservas ecológicas, 1 reserva biológica marina, 1 reserva biológica terrestre, 3 reservas de producción faunística, 1 reserva geobotánica, 5 refugios de vida silvestre y 2 áreas nacionales de recreación.

www.ambiente.gob.ec.

Actividades

1. Ubiquen, en un mapa, los parques nacionales que se extienden en más de una provincia.
2. Busquen en Internet cuántas reservas naturales tiene el Ecuador en la actualidad.
3. Investiguen sobre la Declaratoria con la que UNESCO declaró Patrimonio Natural de la Humanidad a las islas Galápagos.
4. Reflexionen: ¿Forman las áreas protegidas parte de la identidad de un país? ¿Por qué?
5. Plantea acciones sencillas que puedan realizar individualmente y en grupo para promover la conservación y el respeto por las áreas protegidas. Comprométete a cumplirlas para poner en práctica los derechos de la naturaleza.

Autoevaluación | Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

Autoevaluación

1. Halla las fracciones irreducibles equivalentes a estas fracciones.

a) $\dfrac{-36}{72}$ b) $\dfrac{342}{285}$ c) $-\dfrac{187}{143}$

— Representa estas fracciones sobre la recta y escríbelas ordenadas de menor a mayor.

— Halla la expresión decimal de estas fracciones.

2. Calcula:

a) $\dfrac{-3}{15} - \dfrac{-4}{10} + \dfrac{5}{4} - \dfrac{2}{5} + \dfrac{7}{8} + \dfrac{-1}{12}$

b) $\dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{-6}{4} + \dfrac{3}{2} \div \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{-4}{9} \right)$

3. Calcula:

a) $\sqrt{\dfrac{1}{3^{-2}}}$ b) $\left[\left(\dfrac{1}{3} \right)^{-1} \cdot (-3)^2 \right]^{-2}$

Coevaluación

1. Hallen la fracción generatriz de los siguientes números decimales: $5{,}076$; $0{,}\overset{\frown}{17}$; $28{,}7\overset{\frown}{11}$

2. Ordenen de menor a mayor estos números.

$0{,}4;\ \dfrac{5}{3};\ \dfrac{-6}{4};\ -3{,}\overset{\frown}{4};\ -3{,}45;\ -3{,}444;\ -\dfrac{1}{2}$

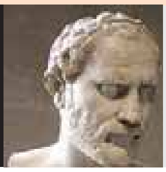
3. En un país de América, el 8% de las empresas pertenece al sector de la industria, el 14% a la construcción, el 26 % al comercio y el 52% al resto de servicios. Dibujen el diagrama de sectores correspondiente.

4. La siguiente tabla muestra las edades de los participantes en un campeonato de ajedrez. Sabiendo que la media de edad es 12,4 años, calculen:

a) El valor de *a*.

b) La moda y la mediana.

Edad	Frecuencia absoluta
11	3
12	2
13	3
a	2

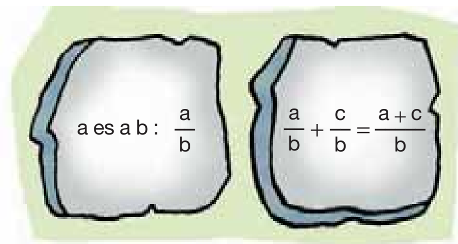


Historia

Sección de historia

Los griegos consideraron las fracciones como razones de números enteros (siglo V a. C.), pero en el siglo III a. C. ya operaban con ellas como números.

siglo V a. C. | siglo III a. C.

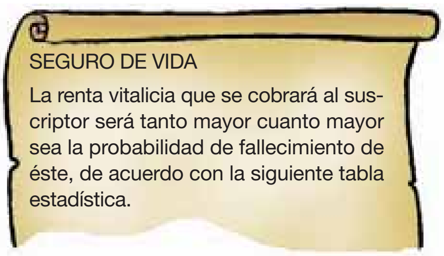


La notación actual de las fracciones se debe a los hindúes y a los árabes.

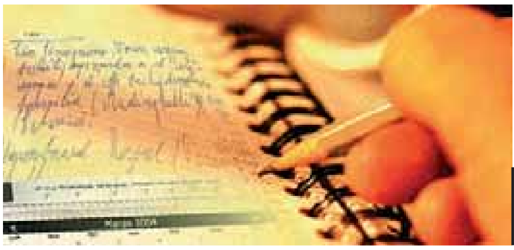
No fue hasta el siglo XIX, tras la aceptación de los números enteros negativos, que fueron admitidas, también, las fracciones negativas.

En el siglo XIV, se inicia el registro de las actas del estado civil de la población.

A lo largo del siglo XVIII, se desarrolla una relación cada vez más intensa entre la estadística y la probabilidad.



Actualmente, la estadística se aplica en campos tan diversos como la medicina, los negocios, las ciencias sociales…



Crónica matemática

Bioestadística

Los primeros trabajos bioestadísticos los realizó, a mediados del siglo XIX, la enfermera inglesa Florence Nightingale.

Durante la guerra de Crimea, Florence observó que eran mucho más numerosas las bajas producidas en el hospital que en el frente.

Recopiló información y dedujo que la causa de la elevada tasa de mortalidad se debía a la precariedad higiénica existente. Así, gracias a sus análisis estadísticos, se comenzó a tomar conciencia de la importancia y la necesidad de unas buenas condiciones higiénicas en los hospitales.

Escalas de temperatura

La temperatura no se mide igual en los distintos países o ámbitos. En ciencia y tecnología se usa la escala Kelvin o absoluta. En la mayoría de países se utiliza la escala Celsius o centígrada, pero en Estados Unidos y Gran Bretaña se emplea la escala Farenheit. Los valores de temperatura absoluta T(K), temperatura en grados Celsius t(°C) y temperatura en grados Farenheit t(°F) se relacionan según:

$$T(K) = t(°C) + 273{,}15$$

$$t(°C) = (t(°F) - 32) \cdot \frac{5}{9}$$

La temperatura de congelación del agua en condiciones normales corresponde a 0 °C y a 32 °F, mientras que su temperatura de ebullición corresponde a 100 °C y a 212 °F. Fíjate en que entre estos valores hay un rango de 100 °C y de 180 °F. Así, una diferencia de un grado Farenheit corresponde a $\frac{100}{180} = \frac{5}{9}$ grados Celsius.

Censos

La palabra *censo* procede de la época romana, cuando se realizaron los primeros recuentos de población distribuida en clases.

El rey de Roma Servio Tulio (s. IV a. C.) construyó altares en cada aldea y ordenó la celebración de fiestas. A estas fiestas cada ciudadano debía llevar una moneda, el *censo,* distinta según fuese varón, hembra o infante impúber.

Así, los *censores,* encargados de contar las monedas, podían conocer el total de la población distribuida en clases.

¿Colinas o montañas?

En la película *El inglés que subió a una colina pero bajó una montaña* se narra la historia ficticia de unos aldeanos de Gales que aumentan la altura de la colina próxima a su pueblo. Para ello, transportan cargas de tierra a la cumbre y consiguen que su altura supere los 1 000 pies. De esta forma, la colina queda «elevada» a la categoría de montaña.

El pie es una unidad de medida de longitud del sistema anglosajón que equivale a 0,304 8 m y se representa por el símbolo ft. Equivale a un tercio de la yarda o a 12 pulgadas.

Al igual que el pie, la mayoría de las unidades anglosajonas equivalen en el Sistema Internacional a cantidades no enteras.

Módulo 2

Bloques: Numérico. Geométrico

Buen Vivir: Derechos del consumidor

Una familia está en el supermercado y desea saber el valor total de los siete productos que ha comprado antes de pasar por caja. Cada uno de sus miembros tiene un método para obtener este valor de forma aproximada y sencilla.

— El hijo se fija sólo en las cifras enteras de los precios y hace la suma: $1 + 2 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 = 6$

— La hija también se queda con las cifras enteras y las suma, pero además suma al total el número de artículos comprados: $1 + 2 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 + 7 = 13$

— El padre suma las cifras enteras de los precios, a las que añade la mitad del número de artículos comprados: $1 + 2 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 + 3{,}5 = 9{,}5$

— La madre también suma las cifras enteras, pero redondeando. Es decir, si el primer decimal es menor o igual que 4, se queda con la parte entera; si es mayor o igual que 5, aumenta en uno la parte entera: $2 + 2 + 0 + 0 + 1 + 3 + 1 = 9$

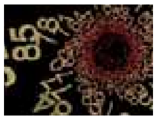
¿Cuál de ellos crees que obtendrá un valor más cercano al precio real?

Artículos comprados

Artículo	Cantidad	Precio
Crema	1	1,62
Jugo de naranja	1	2,02
Agua	2	0,34
Leche	1	0,62
Café soluble	1	2,85
Azúcar	1	1,11

http://1001cosas.files.wordpress.com

Números irracionales
Perímetros y áreas de polígonos



Ahora estudiarás los números irracionales, *efectuarás* aproximaciones y *utilizarás* tus conocimientos en la resolución de triángulos rectángulos. Además, *ampliarás* lo que sabes sobre los perímetros y las áreas de polígonos.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Leer y escribir números irracionales de acuerdo con su definición.
- Representar gráficamente números irracionales con el uso del teorema de Pitágoras.
- Ordenar, comparar y ubicar en la recta numérica números irracionales con el uso de la escala adecuada.
- Resolver operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división exacta con números irracionales.
- Deducir las fórmulas para el cálculo de áreas de polígonos regulares por la descomposición en triángulos.
- Aplicar las fórmulas de áreas de polígonos regulares en la resolución de problemas.
- Utilizar el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos.

Prerrequisitos

Recuerda

- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ esta formado por números que son el cociente de dos enteros exceptuando el divisor cero.
- El valor absoluto de un número es el número que se obtiene al prescindir de su signo.

$$|4{,}7| = 4{,}7$$
$$|-65| = 65$$
$$|74{,}2 - 83{,}7| = 9{,}5$$

- Una aproximación decimal de un número es un número decimal sencillo próximo a su valor exacto.
- El metro (m) y el metro cuadrado (m^2) son las unidades de longitud y superficie, respectivamente, en el Sistema Internacional.
- Para estimar medidas de longitud tomamos como referencia medidas conocidas de alrededor.
- Un polígono es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.

Evaluación diagnóstica

- Enlista los distintos conjuntos numéricos que conoces.
- ¿Puedes expresar cualquier número racional como un número decimal? ¿Y cualquier número decimal como uno racional? Justifica tus respuestas.
- Expresa en forma decimal estos números.

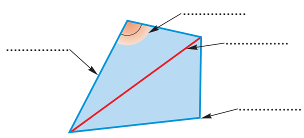
$$\frac{5}{24},\ 1+\frac{3}{4},\ \sqrt{2},\ 3\sqrt{5},\ \pi$$

- Efectúa, en tu cuaderno, las siguientes transformaciones, utilizando factores de conversión.

  a) 32 dam = ... m　　c) 15,5 dm = ... hm

  b) 542,3 hm^2 = ... km^2　　d) 0,021 m^2 = ... cm^2

- Nombra los elementos de este polígono.



- Estima estas longitudes.
  a) La longitud y la anchura de una hoja de papel.
  b) La longitud y la altura de la pared de tu clase.

Buen Vivir

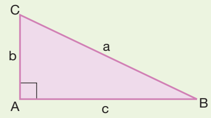
Derechos del consumidor

Art. 53.- Las empresas, instituciones y organismos que presten servicios públicos deberán incorporar sistemas de medición de satisfacción de las personas usuarias y consumidoras, y poner en práctica sistemas de atención y reparación.

Constitución de la República del Ecuador, 2008.

FÍJATE

Un triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90°.



Los lados de este triángulo reciben nombres especiales.

- El lado opuesto al ángulo recto, *a,* se denomina **hipotenusa.**
- Los lados *b* y *c* que forman el ángulo recto se llaman **catetos.**

Además, en todo triángulo rectángulo se cumple que:

- La hipotenusa es mayor que cada uno de los catetos.
- Los ángulos agudos son complementarios, ya que:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ $\quad \hat{B} + \hat{C} = 90°$

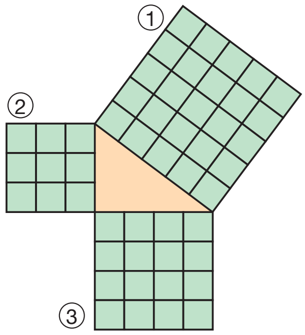
$\hat{A} = 90°$

MUCHO OJO

Dos ángulos son **complementarios** si suman 90°.

1 Teorema de Pitágoras

Observa esta figura.



Está formada por un triángulo rectángulo y tres cuadrados. Se tiene:

Número de cuadros del cuadrado ①: 25	Número de cuadros del cuadrado ②: 9	Número de cuadros del cuadrado ③: 16

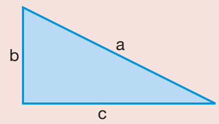
El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa coincide con la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos:

$$25 = 9 + 16, \text{ es decir, } 5^2 = 3^2 + 4^2$$

Esta propiedad que acabamos de comprobar se cumple para todos los triángulos rectángulos, y se conoce como **teorema de Pitágoras.**

En un triángulo rectángulo, el **cuadrado** de la **hipotenusa** es igual a la **suma** de los **cuadrados** de los **catetos.**

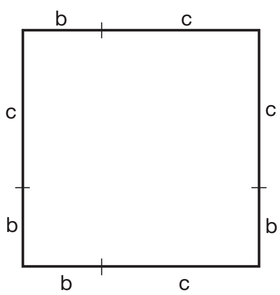
$$a^2 = b^2 + c^2$$



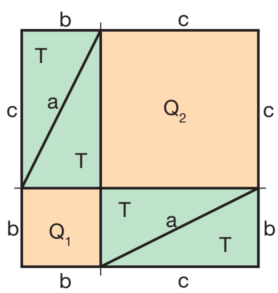
Puedes comprobar experimentalmente el teorema de Pitágoras:

Material concreto

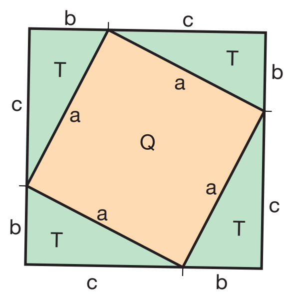
Construye dos cuadrados como el de la figura.



Recorta uno de ellos en cuatro triángulos y dos cuadrados.



Coloca los triángulos recortados sobre el otro cuadrado construido inicialmente.



El área del cuadrado que queda en el interior, *Q*, debe coincidir con la suma de las áreas de los otros dos cuadrados recortados, $Q_1 + Q_2$.

Concluimos, pues, que $a^2 = b^2 + c^2$.

2 El conjunto de los números irracionales

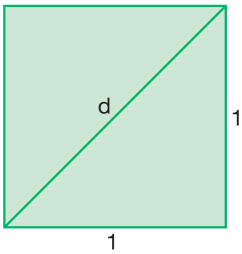
Anteriormente, estudiamos que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales coincide con el de los números decimales periódicos.

Pero, ¿todos los números decimales son periódicos? En este tema comprobaremos que no es así. Existen magnitudes cuyo valor viene dado por un número decimal cuyas infinitas cifras no forman período en ningún momento.

2.1. Concepto de número irracional

Observa cómo calculamos la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a la unidad.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:



$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$d^2 = 2$$

$$d = \sqrt{2}$$

Ahora, utilizamos la calculadora para hallar el valor de $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,37$$

Por limitaciones de carácter físico, la calculadora nos ofrece sólo un número limitado de cifras decimales; pero, en realidad, detrás de la última cifra hay un número ilimitado de cifras que en ningún momento forman período.

De hecho, si calculamos con un computador el valor de $\sqrt{2}$, obtenemos:

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\,209\,698\,07...$$

Vemos, pues, que las cifras decimales no parecen acabar nunca ni tampoco se observa en ellas regularidad alguna; es decir, parece que $\sqrt{2}$ no es un número decimal periódico y, por tanto, no puede ser un número racional. Estos números se llaman *irracionales.*

Un número es **irracional** si su expresión decimal es ilimitada y no periódica.

Son números irracionales, entre otros:

— Cualquier raíz cuadrada de un número natural que no sea entera.

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{10}\ ...$$

— El resultado de sumar, restar, multiplicar o dividir un número irracional con números racionales.

$$3-\sqrt{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{\sqrt{5}}{3},\ 2\sqrt{8}\ ...$$

— El número $\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793...$, cuya irracionalidad no pudo demostrarse hasta el siglo XVIII.

El número de oro

Un número irracional muy conocido es el **número de oro:**

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\,0339...$$

Este número es la razón entre longitudes que forman parte de objetos y lugares tan diversos como los templos griegos, el *hombre ideal* de Leonardo da Vinci o la concha del *Nautilus.*

http://lh6.ggpht.com

@

Indica dos longitudes en la concha del *Nautilus* cuya razón sea igual al número de oro. Ayúdate de las explicaciones que se exponen en la página http://rt000z8y.eresmas.net/El numero de oro.htm.

El carácter irracional de $\sqrt{2}$

Nos hemos basado en un cálculo del computador para afirmar que $\sqrt{2}$ tiene infinitas cifras decimales que no se repiten de forma periódica; pero el no poder obtenerlas todas da lugar a que nos quede la duda de que en un momento dado éstas empiecen a repetirse.

Los antiguos griegos no disponían de calculadoras ni de computadores y, sin embargo, demostraron que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Sepamos cómo lo hicieron.

Demostración de que $\sqrt{2}$ no es un número racional

- Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Como sabes, todo número racional tiene un representante que es una fracción irreducible. Así:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \text{(con } a \text{ y } b \text{ números primos entre sí)}$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$$

¿Qué tiene de extraño este resultado?

- Observamos que si $\frac{a}{b}$ es irreducible, también lo es $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b}$, puesto que no podemos simplificar ningún factor. Luego es imposible que $\frac{a^2}{b^2} = 2$ y por tanto, es falso que:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

En consecuencia, $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Esta clase de demostración es frecuente en matemática y se conoce con el nombre de **método de reducción al absurdo.** El método consiste, básicamente, en suponer que se cumple lo contrario de lo que se quiere demostrar y llegar a una contradicción.

Actividades

1 Explica por qué la raíz cuadrada de un número natural que sea cuadrado perfecto no es irracional.

2 Un cartabón es un instrumento de dibujo lineal, con forma de triángulo rectángulo escaleno. Si dos de sus lados que forman ángulo recto miden 20 y 35 cm, ¿cuanto mide el tercer lado?

3 Utiliza el método de reducción al absurdo para demostrar que $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ son números irracionales.

4 Si el radio de una circunferencia mide 3 cm, ¿cuál será la longitud de ésta?

— ¿Es un número racional o irracional? ¿Por qué?

5 Averigua cuáles de los números siguientes son irracionales: $\sqrt{4}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{100}$.

— A continuación, escribe cinco números irracionales diferentes a los anteriores.

2.2. Representación gráfica de números irracionales

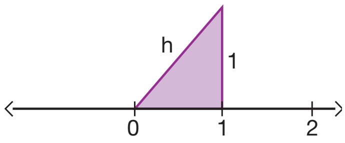
Sabemos que todo número racional puede representarse sobre la recta; pero, ¿todos los puntos de la recta corresponden a números racionales?

Podemos comprobar que no es así. Los números irracionales también tienen su lugar en la recta. Vamos a ver cómo los representamos.

Representación de $\sqrt{2}$

— Trazamos una recta y marcamos en ella los puntos 0, 1 y 2. De esta manera, tenemos el origen y los dos números enteros entre los que se sitúa $\sqrt{2}$.

$$1 < 1,4... < 2$$



— Levantamos sobre el punto 1 un segmento perpendicular de una unidad de longitud.

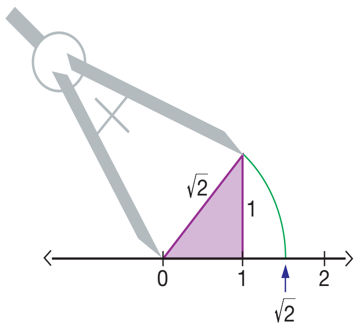
— Unimos el extremo superior de este segmento con el origen.

Así, formamos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden una unidad cada uno y cuya hipotenusa mide:

$$h^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow h = \sqrt{2}$$

— Trasladamos el segmento *h* sobre la recta con un compás.

Hemos representado exactamente sobre la recta el número $\sqrt{2}$.



Los números irracionales de la forma $\sqrt{a}$, siendo *a* un número natural, pueden representarse sobre la recta descomponiendo previamente el número *a* en una suma de cuadrados. Observa algunos ejemplos.

Representación de $\sqrt{3}$

— Descomponemos 3 en suma de cuadrados.

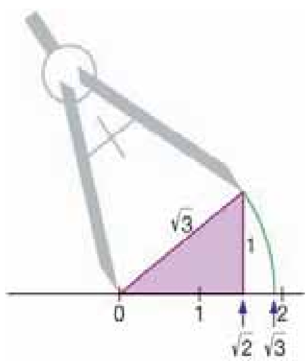
$$3 = 1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$$

— Representamos el punto $\sqrt{2}$ como hemos visto anteriormente.

— Levantamos sobre el punto $\sqrt{2}$ un segmento perpendicular de una unidad de longitud.

— Unimos el extremo superior de este segmento con el origen formando un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $\sqrt{3}$.

— Trasladamos dicho segmento sobre la recta con un compás.



Representación de $\sqrt{7}$

— Descomponemos 7 en suma de cuadrados.

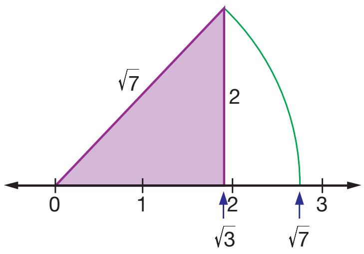
$$7 = 2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$$

— Representamos el punto $\sqrt{3}$ como hemos visto anteriormente.

— Levantamos sobre el punto $\sqrt{3}$ un segmento perpendicular de longitud 2 unidades.

— Unimos el extremo superior de este segmento con el origen formando un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $\sqrt{7}$.

— Trasladamos dicho segmento sobre la recta con un compás.



Otros números irracionales como π no pueden obtenerse por un método geométrico; en estos casos sólo podemos representarlos de forma aproximada en la recta numérica.

Representación de π

$$\pi = 3{,}1415\ldots$$

— Marcamos sobre la recta los dos números enteros entre los que se sitúa π, los puntos 3 y 4.

— Dividimos este intervalo en diez partes y marcamos la que contiene a π.

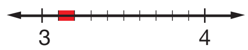
π está entre los puntos 3,1 y 3,2.

— Si quisiéramos afinar más, deberíamos volver a dividir este intervalo en diez partes y marcar la que contiene a π.

π está entre los puntos 3,14 y 3,15.

Y así sucesivamente, hasta obtener la aproximación deseada.

$3 < \pi < 4$



$3{,}1 < \pi < 3{,}2$

$3{,}14 < \pi < 3{,}15$

@

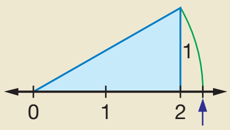
Busca qué posición ocupa tu número de teléfono entre los decimales de π. Para ello, conéctate a la página http://www.angio.net/pi/piquery.
La página está escrita en inglés, por lo que, si necesitas ayuda, pídesela a tu profesor/a de inglés.

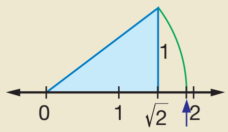
Actividades

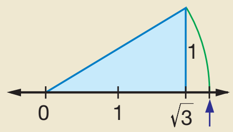
6 Representa sobre la recta los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{8}$.

7 Propón un procedimiento para representar sobre la recta $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
—¿Cómo representarías el número $5 + \sqrt{2}$?

8 Elige, de entre las siguientes, la representación correcta del número $\sqrt{5}$.

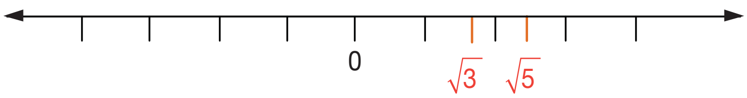






2.3. Números irracionales. Orden y comparación

Al representar números racionales sobre la recta numérica, los podemos ordenar al igual que los números naturales y enteros. El número que quede situado más a la derecha es el mayor.



Debemos considerar que el conjunto de los números irracionales no es un conjunto numerable; es decir, no podemos ordenar los números irracionales y asociar a cada uno con un número natural, ya que entre cada número irracional es posible encontrar otro.

Por tal motivo, el orden que definimos entre dos elementos, solo es para éstos ya que pueden haber más números intermedios.

$\sqrt{3} < a < \ldots < b < \sqrt{5}$, Donde a y b son números irracionales.

También es posible comparar dos números irracionales sin necesidad de representarlos sobre una recta ordenada, observa:

Si los dos números irracionales son positivos y están representados por una misma raíz par de un número racional, es mayor el número irracional que tenga en su expresión un mayor número racional.

ejemplo 1

Ordena estos números irracionales: $\sqrt{7}$ *y* $\sqrt{10}$.

a) Definamos arbitrariamente un orden entre los dos números irracionales.

$$\sqrt{10} > \sqrt{7}$$

b) Como los dos números comparados son positivos, podemos elevarlos al cuadrado.

$$\left(\sqrt{10}\right)^2 > \left(\sqrt{7}\right)^2$$

$$10 > 7$$

c) Como $10 > 7$ implica que el orden correcto entre los números irracionales es:

$$\sqrt{10} > \sqrt{7}$$

Si los números irracionales no están representados por raíces de números racionales, para compararlos, podemos encontrar una representación aproximada y restarlas. Si la resta es positiva, el minuendo es el número mayor, mientras que si la resta es negativa el sustraendo es el número mayor. Las aproximaciones deben tener el mismo número de cifras para poder restarlos.

ejemplo 2

Entre los números $\sqrt{10}$ y π *establece un orden de cantidad.*

a) Primero, encontramos la expresión decimal de cada número:

$$\sqrt{10} \approx 3{,}162277660$$
$$\pi \approx 3{,}141592654$$

b) Luego, restamos las expresiones aproximadas de los números:

$$\sqrt{10} - \pi = 0{,}02068500658$$

c) Finalmente, como la resta es positiva, tenemos que: $\sqrt{10} > \pi$.

2.4. Operaciones con números irracionales. Adición y sustracción

Cuando sumamos o restamos un número irracional con un número racional, el resultado es siempre un número irracional.

Para sumar y restar números irracionales, podemos utilizar algunos axiomas que cumplen los elementos del conjunto de números irracionales:

Axioma conmutativo de la adición	Axioma asociativo de la adición
Si **a** y **b** son números irracionales: $a + b = b + a$	Si **a**, **b** y **c** son números irracionales: $a + (b + c) = (a + b) + c$
Axioma del elemento neutro de la adición	**Axioma del inverso aditivo**
Si **a** es un número irracional, existe un número **0** llamado neutro aditivo, para el cual: $a + 0 = a$	Para todo número irracional **a**, existe un número irracional **–a**, tal que: $a + (-a) = 0$

Para entender con facilidad los axiomas descritos, debemos considerar a un número irracional como una longitud poco determinada.

ejemplo 3

Opera la siguiente expresión: $\left(\sqrt{7}+2\right)-\left(\sqrt{7}-2\right)$ *e indica si el resultado es el número irracional.*

a) Escribimos la expresión: $\left(\sqrt{7}+2\right)-\left(\sqrt{7}-2\right)$

b) Luego, eliminamos los paréntesis: $\sqrt{7}+2-\sqrt{7}+2$

c) Agrupamos los términos similares y operamos: $\left(\sqrt{7}-\sqrt{7}\right)+\left(2+2\right)=4$

d) El resultado es un número racional positivo.

Actividades

9 Simplifica las siguientes operaciones.

a) $\left(\sqrt{10}+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{10}$

b) $\left\{\left(\pi+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\right\}-\pi$

c) $-\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)-\left(-\pi-\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{11}$

d) $\sqrt{7}+\pi+\left(\pi-\sqrt{7}\right)+\sqrt{10}$

e) $\sqrt{7-14+25-8+5}-\sqrt{116-101}$

10 Encuentra la relación entre el perímetro y el diámetro de un círculo.

11 Calcula la diferencia entre el perímetro de un círculo de radio 4 y el área un círculo de radio 2.

Con los números irracionales también podemos realizar operaciones de potenciación y radicación. En la siguiente tabla,v puedes comprobar que las operaciones de base irracional y exponente entero, cumplen con las mismas leyes que las operaciones con base racional y exponente entero.

Siendo *a, b* números irracionales y *x, y* números enteros, se cumple que:

Multiplicación entre potencias con igual base	Potencia de una potencia
$(a)^x \cdot (a)^y = a^{x+y}$	$\{(a)^x\}^y = a^{x \cdot y}$
División entre potencias con igual base	**Potencia cero de un número irracional**
$\dfrac{(a)^x}{(a)^y} = a^{x-y}$; con $a \neq 0$	$(a)^0 = 1$; $a \neq 0$
Potencia de un producto de números	**Primera potencia uno de un número irracional**
$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$	$(a)^1 = a$

Cuando realizamos alguna operación con números irracionales, debemos utilizar una representación no decimal de los números hasta llegar a la mínima simplificación; solo ahí, podemos encontrar una aproximación decimal del resultado.

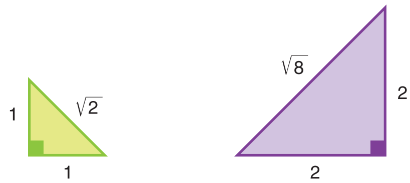
FÍJATE

Es posible cambiar la representación de la raíz de un número irracional por la de potencia.

$$\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}$$

ejemplo 4

Encuentra la longitud resultante de sumar las hipotenusas de los siguientes triángulos rectángulos:



a) Primero, escribimos la suma de los valores irracionales: $\sqrt{2} + \sqrt{8}$

b) Luego, descomponemos los números racionales dentro de cada raíz:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2\,(2^2)} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,\sqrt{(2^2)} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}\,(1 + 2) = 3\sqrt{2}$$

Actividades

12 Efectúa:

a) $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}\right)^{-2}$

b) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{14}}\right)^{2}}$

c) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{27}{9}\right)^{2}}$

d) $\left(\sqrt{\dfrac{10}{5} + 4}\right)^{0} + \sqrt{7}$

e) $\sqrt{7}\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}\right)^{-6}$

f) $\left(\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}\right)^{-4}$

g) $((\pi^{-2})^{2})^{2}$

2.5. División y multiplicación de números irracionales

La multiplicación y la división de dos números irracionales puede ser un número racional o uno irracional. Para realizar este tipo de operaciones debemos considerar la ley de los signos.

Para operar con números irracionales podemos usar algunos axiomas que se detallan a continuación:

Axioma conmutativo del producto

Si **a** y **b** son números irracionales:

$$ab = ba$$

Axioma asociativo del producto

Si **a**, **b** y **c** son números irracionales:

$$a\,(bc) = (a\,b)\,c$$

Axioma distributiva del producto respecto a la suma

Si **a**, **b** y **c** son números irracionales:

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

Axioma del elemento neutro multiplicativo

Si **a** es un número irracional, existe un número **1** llamado neutro multiplicativo, para el cual:

$$1 \cdot a = a$$

Axioma del elemento inverso multiplicativo

Para todo número irracional **a** diferente de cero, existe un número irracional llamado inverso multiplicativo o recíproco de **a**, tal que:

$$a \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)}_{\text{Recíproco de } a;\ a \neq 0} = 1$$

MUCHO OJO

Regla de los signos para la multiplicación y la división

Si se multiplican o dividen dos números irracionales, el resultado es positivo mientras los dos tengan el mismo signo. En cambio, si tienen signos diferentes entre sí, el resultado será negativo.

·	+	−
+	+	−
−	−	+
÷	+	−
+	+	−
−	−	+

Cuando realizamos operaciones de multiplicación y división entre números irracionales, debemos considerar los axiomas para estas operaciones.

Si los números irracionales están representados mediante raíces o símbolos, debemos simplificar estas expresiones utilizando las propiedades del producto, la suma y la potenciación.

ejemplo 5

Encuentra el cociente entre: $\sqrt{10} \div \sqrt{5}$

Como las raíces tienen el mismo índice, podemos ponerlas como una sola raíz y luego simplificamos.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{\frac{2}{1}} = \sqrt{2}$$

Actividades

13 Resuelve:

a) $\sqrt{7} \div \sqrt{14}$

b) $(\pi^3 + 1) \div (\pi^3)$

c) $\sqrt{\left(\sqrt[3]{27} + 2\right)} \div \sqrt{10}$

2.6. Operaciones combinadas entre números irracionales

Para realizar operaciones combinadas entre números irracionales, usamos las mismas reglas que empleamos para resolver operaciones combinadas entre números racionales.

Primero eliminamos los signos de agrupación, luego resolvemos las divisiones y las multiplicaciones, y finalmente, operamos las sumas y las restas.

ejemplo 6

Simplifica: $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}} + \frac{7}{\sqrt{7}}\right)\left(\frac{\sqrt{700}}{11}\right)} + 7\sqrt{7}$

a) Primero, resolvemos la suma al interior del primer paréntesis.

$$\frac{\sqrt{7}}{10} + \frac{7}{\sqrt{7}} = \frac{\left(\sqrt{7}\right)^2 + 10 \cdot 7}{10\sqrt{7}} = \frac{7 + 70}{10\sqrt{7}} = \frac{77}{10\sqrt{7}}$$

b) Luego, operamos las multiplicaciones y divisiones dentro de la raíz cuadrada.

$$\left(\frac{77}{10\sqrt{7}}\right)\left(\frac{\sqrt{700}}{11}\right) = \frac{77\sqrt{700}}{10\sqrt{7}\cdot 11} = \frac{77\sqrt{7\cdot 10^2}}{10\sqrt{7}\cdot 11} = \frac{\overset{7}{\cancel{77}}\cdot\cancel{10}\cdot\cancel{\sqrt{7}}}{\cancel{10\sqrt{7}}\cdot\cancel{11}} = 7$$

c) Y, finalmente, resolvemos las sumas y las restas.

$$\sqrt{7} + 7\sqrt{7} = \sqrt{7}\,(1 + 7) = 8\sqrt{7}$$

Actividades

14 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{5}}{\sqrt{10}} - \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

b) $\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

c) $4 \cdot \left(\pi^2 - \frac{\pi}{4}\right) - (2\pi)^2 + 2\pi$

15 En la siguiente expresión ubica los paréntesis en el lugar necesario para que al operarla, el resultado sea: $\frac{2}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{28}} + \sqrt{\frac{4}{7}} \cdot \frac{14}{5} \cdot \sqrt{\frac{4}{14}}$$

16 Los griegos aproximaron el valor de π, usando la relación entre el perímetro y el diámetro de un polígono de múltiples lados. Calcula el área y el perímetro de varios polígonos y encuentra un valor aproximado para π.

17 Utiliza un círculo para realizar la misma comparación que en la actividad 16, ¿obtienes un valor aproximado o el exacto de π, ¿por qué?.

Además de los números irracionales expresados por una raíz de un número racional como $\sqrt{2}$, o por un símbolo, al igual que π, tenemos números que son expresados por varios términos, por ejemplo el número áureo.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Este tipo de números aparecen en relaciones de simetría en la naturaleza y algunos artistas los utilizan para realizar sus obras de arte. Por esto, no es aconsejable modificar o agrupar este tipo de números irracionales, en su lugar debemos expresar la respuesta como múltiplos o términos con estos números.

Es aconsejable emplear los conocimientos de algebra para reemplazar a los números irracionales por una letra.

FÍJATE

Leonardo da Vinci utilizaba el número áureo en sus creaciones artísticas.

ejemplo 7

Resuelve:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{6} + \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{2+\sqrt{20}}{8}$$

a) Revisamos si en la expresión aparece uno o varios números irracionales conocidos: A los números conocidos los representamos por un símbolo

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

b) Modificamos a la expresión para tener múltiplos y factores del número irracional que encontramos:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 1 + 2\sqrt{5}}{2}$$

c) Reemplazamos el símbolo del número irracional en la expresión anterior:

$$\frac{1}{3} \cdot \Phi + \frac{1}{2} \cdot \Phi - \frac{2}{4} \cdot \Phi = \Phi \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{4}\right) = \frac{\Phi}{3}$$

d) Finalmente, reemplazamos el valor de la representación del número irracional:

$$\frac{\Phi}{3} = \frac{1+\sqrt{5}}{6}$$

Actividades

18 Investiga y realiza un resumen de 3 expresiones de la naturaleza, en los cuales esté involucrado el número áureo.

19 Consulta el nombre de tres obras en las que sus artistas han utilizado el número áureo.

20 Simplifica las siguiente expresiones, utilizando los números irracionales indicados:

a) $\frac{1+\sqrt{2}}{4} - 1 + \sqrt{2} + \frac{3+\sqrt{18}}{4}$, usando: $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}$, usando: $\sqrt{2}$

3 Perímetro y área de cuadriláteros y triángulos

Ya sabes qué es un polígono y conoces sus elementos y sus propiedades. En esta unidad veremos cómo se calculan su *perímetro* y su *área.*

> El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.
>
> El **área** de un polígono es la medida de la extensión que ocupa.

3.1. Perímetro y área de paralelogramos

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero de lados paralelos dos a dos.

Se llama **base** de un paralelogramo a uno cualquiera de sus lados y **altura** a la distancia entre la base y el lado paralelo a ella (fig. 1). Utilizaremos la letra *b* para indicar la longitud de la base y la letra *h* para indicar la altura.

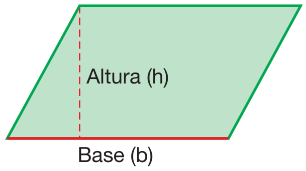
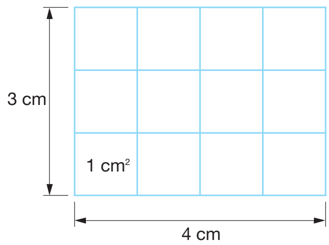


Fig. 1

Veamos cómo se calculan el perímetro y el área de los paralelogramos: *rectángulo*, *cuadrado*, *romboide* y *rombo.*

Rectángulo

Un **rectángulo** es un paralelogramo que tiene cuatro ángulos rectos. En este caso la base y la altura coinciden con los lados del polígono.



Observa el rectángulo de la figura. Se cumple:

—El perímetro del rectángulo es $4 + 3 + 4 + 3 = 14$ cm.

—El área del rectángulo es 12 cm^2 puesto que:

- El rectángulo está dividido en 12 cuadros.
- Cada cuadro mide 1 cm^2.

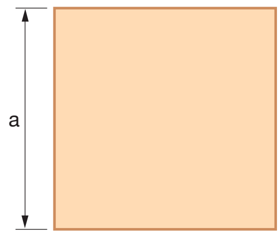
El área del rectángulo coincide con el producto de la longitud de su base por su altura:

$$4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = (4 \cdot 3)\ (\text{cm} \cdot \text{cm}) = 12 \text{ cm}^2$$

> El **perímetro** y el **área** de un **rectángulo** de base *b* y altura *h* son:
>
> $\boldsymbol{P = 2b + 2h} \qquad \boldsymbol{A = b \cdot h}$

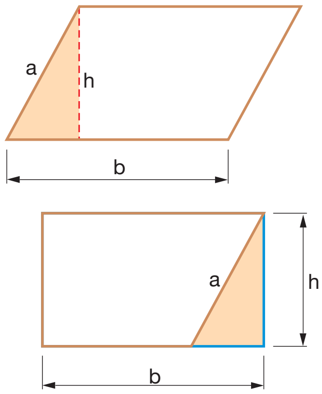
Cuadrado

Un **cuadrado** es un rectángulo particular en el que los cuatro lados son iguales. Así, las longitudes de la base y la altura coinciden con la del lado.



> El **perímetro** y el **área** de un **cuadrado** de lado *a* son:
>
> $\boldsymbol{P = 4a} \qquad \boldsymbol{A = a \cdot a = a^2}$

Romboide



Un **romboide** es un paralelogramo cuyos ángulos no son rectos.

— El perímetro del romboide es $P = 2a + 2b$.

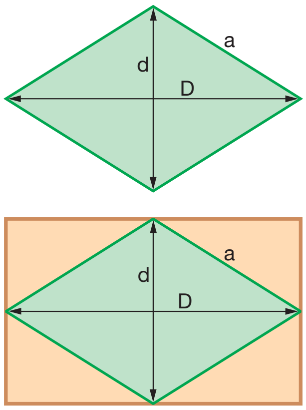
— Transformamos un romboide en un rectángulo para calcular su área. Se cumple que:

- El área del romboide es igual a la del rectángulo.
- El romboide y el rectángulo tienen la misma longitud de la base, *b*, y de la altura, *h*.

Por tanto:

El **perímetro** de un **romboide** de lados *a* y *b* es: $\boldsymbol{P = 2a + 2b}$
El **área** de un **romboide** de base *b* y altura *h* es: $\boldsymbol{A = b \cdot h}$

Rombo



Un **rombo** es un romboide particular en el que los cuatro lados son iguales. Así:

—El perímetro del rombo es $P = 4a$.

— Para hallar el área de un rombo del cual conocemos la longitud de sus diagonales dibujamos un rectángulo. Observa que se cumple:

- El área del rombo es la mitad del área del rectángulo.
- La longitud de la base del rectángulo coincide con la de una diagonal, *D*, y su altura con la longitud de la otra diagonal, *d*.

Por tanto:

$$A_{rombo} = \frac{A_{rectángulo}}{2} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$$

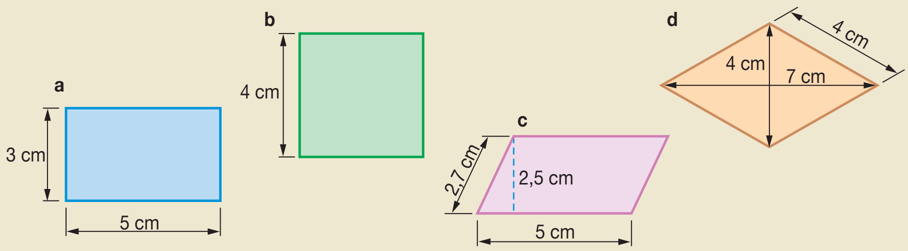
El **perímetro** de un **rombo** de lado *a* es: $\boldsymbol{P = 4a}$
El **área** de un **rombo** de diagonales *D* y *d* es: $\boldsymbol{A = \frac{D \cdot d}{2}}$

FÍJATE

Todos los elementos del polígono que participan en el cálculo de perímetros y áreas deben estar expresados en la misma unidad.

Actividades

21 Identifica estos paralelogramos. Calcula sus perímetros y sus áreas.



3.2. Perímetro y área de triángulos

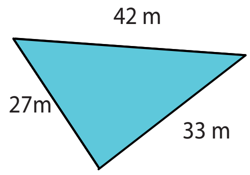
Don Pedro quiere poner en venta un terreno de forma triangular, para ello, necesita conocer la medida del área y con esto determinar el costo de su propiedad. Conoce las medidas de los lados, estos son 27 m, 33 m y 42 m. Recuerda que la fórmula para calcular el área de un triángulo es $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{h}$, donde ***b*** es la longitud de uno de sus lados y ***h*** la medida de la altura trazada hacia ese lado.

¿Tiene el terreno forma de un **triángulo rectángulo?**

Eso facilitaría el cálculo, puesto que sus catetos son perpendiculares y el área sería igual a la mitad de su producto. Para responder a esta inquietud, Don Pedro decide usar el **teorema de Pitágoras** $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$, reemplazando las medidas de los lados del terreno obtiene $\boldsymbol{42^2 \neq 33^2 + 27^2}$.

Esto indica con claridad que el triángulo no es rectángulo.

¿Es entonces necesaria la longitud de la altura?, pero ¿cómo calcular la longitud de la altura?, ¿cómo trazarla sin tener a mano los materiales adecuados? La fórmula anterior en este caso no es útil. Afortunadamente, llegó de visita Daniel un sobrino que ya estudió noveno año de EGB, quien al enterarse del dilema de su tío, le propuso usar una fórmula que hacía poco aprendió para el cálculo del área de un triángulo, ésta solo requiere conocer la longitud de los lados del terreno.



¡La **fórmula de Herón**!

$$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

Donde **s** es el valor del semiperímetro (mitad del perímetro), es decir $s = \frac{p}{2}$; $s = \frac{a+b+c}{2}$ y ***a, b, c*** son las dimensiones del terreno.

$$s = \frac{27 + 33 + 42}{2} = 51m$$

Ahora reemplazamos los datos en la fórmula de Herón:

$$A = \sqrt{51\,(51-27)\,(51-33)\,(51-42)}\ m^2$$

Operando en los paréntesis nos queda

$$A = \sqrt{51 \cdot (24) \cdot (18) \cdot (9)}\ m^2$$

$$A = \sqrt{198\,288}\ m^2$$

$$A = 445,\ 295\,407\,566\ldots\ m^2$$

Aproximando la respuesta a los décimos, el área del terreno es:

$$A = 445,\ 3\ m^2$$

Lo que sigue es multiplicar este valor por el costo del metro cuadrado de la propiedad. Si cada metro cuadrado (m^2) en el sector donde está ubicado el terreno cuesta 15 dólares, averigua cuál es el precio que tiene la propiedad de Don Pedro.

Actividades

22 Determina el área de diferentes triángulos, sobre todo triángulos rectángulos usando las dos fórmulas que ahora conoces para su cálculo y comprueba que los resultados sean iguales.

23 Dibuja un trapecio rectángulo cuyas bases sean 6 cm y 3 cm, su altura 4 cm y su cuarto lado 5 cm. Calcula su perímetro y su área.

4 Perímetro y área de otros polígonos

4.1. Polígonos regulares

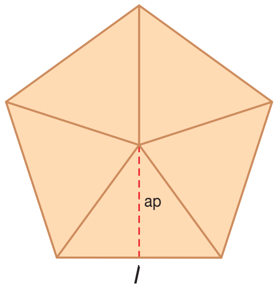
Un polígono es **regular** si tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales.

— Para calcular el perímetro de un polígono regular multiplicamos el número de lados, n, por la longitud del lado, l.

$$P = n \cdot l$$

— Para calcular su área, descomponemos el polígono regular en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono.

Observa la figura de la izquierda. Corresponde a un pentágono regular que hemos dividido en 5 triángulos iguales.



- El área del pentágono es cinco veces el área de uno de los triángulos.
- La longitud de la base de un triángulo y la del lado del pentágono son la misma, l.
- La altura de un triángulo es igual a la longitud de la apotema del pentágono, ap.

Por tanto, el área del pentágono es:

$$A = 5 \cdot \frac{l \cdot ap}{2} = \frac{5\,l \cdot ap}{2}$$

Por otro lado, $5l$ es el perímetro, P, del pentágono, por lo que:

$$A = \frac{P \cdot ap}{2}$$

Este razonamiento que permite calcular el área de un pentágono regular puede generalizarse para calcular el área de cualquier polígono regular.

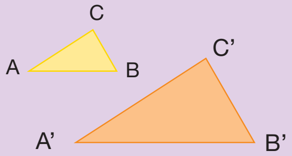
El **perímetro** de un **polígono regular** de n lados de longitud l es: $\boldsymbol{P = n \cdot l}$

El **área** de un **polígono regular** de perímetro P y apotema ap es:

$$\boldsymbol{A = \frac{P \cdot ap}{2}}$$

Polígonos semejantes

Observa esta imagen.



Se cumple:

$$\widehat{A} = \widehat{A}' \,;\; \widehat{B} = \widehat{B}' \,;\; \widehat{C} = \widehat{C}'$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} =$$

Los ángulos del primer triángulo son iguales a los del segundo y sus lados proporcionales. Decimos que son **polígonos semejantes**.

— ¿Cuál será la razón entre sus perímetros?

— ¿Y la razón entre sus áreas?

Relación perímetro-área

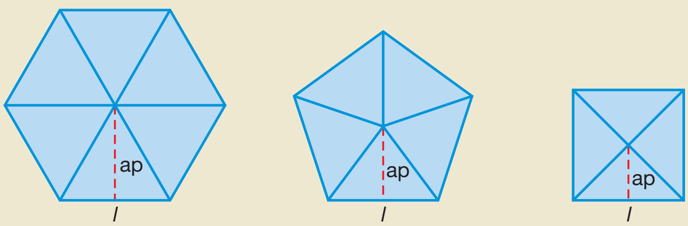
El cociente $\frac{P}{A}$ permite comparar el área o perímetro de polígonos.

Así, si un polígono tiene un cociente mayor, significa que presenta un mayor perímetro para la misma área.

Actividades

24 Calcula el área del polígono regular de 11,5 cm de lado, 10 cm de apotema y cuyo ángulo central mide 60°.

25 Toma las medidas que creas necesarias de los siguientes polígonos regulares y calcula sus perímetros y sus áreas.



— Ordena los polígonos de mayor a menor relación perímetro-área.

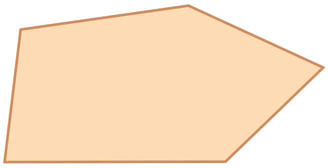
4.2. Polígonos irregulares

Para calcular el área de un polígono irregular, podemos descomponerlo en el menor número posible de figuras cuyas áreas sepamos calcular.

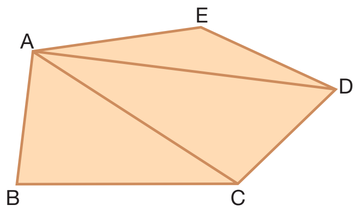
A menudo, lo más fácil es descomponerlo en triángulos.

ejemplo 8

Calcula el área de la siguiente figura.



— Descomponemos el polígono regular en triángulos.



— Medimos con una regla la base y la altura de los tres triángulos y calculamos sus áreas.

$$\text{Área}_{ABC} = \frac{3\text{ cm} \cdot 1{,}8\text{ cm}}{2} = 2{,}7\text{ cm}^2$$

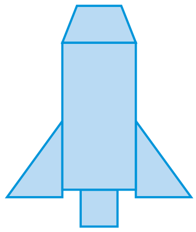
$$\text{Área}_{ACD} = \frac{3{,}3\text{ cm} \cdot 1{,}8\text{ cm}}{2} = 2{,}97\text{ cm}^2$$

$$\text{Área}_{ADE} = \frac{4{,}1\text{ cm} \cdot 0{,}6\text{ cm}}{2} = 1{,}23\text{ cm}^2$$

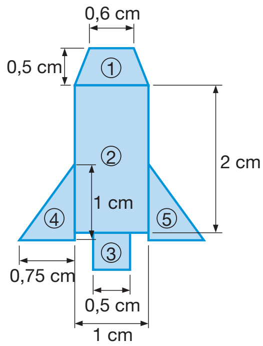
— $A_{\text{figura}} = 2{,}7\text{ cm}^2 + 2{,}97\text{ cm}^2 + 1{,}23\text{ cm}^2 = 6{,}90\text{ cm}^2$

ejemplo 9

Calcula el área de la siguiente figura.



— Descomponemos la figura en el menor número posible de figuras y medimos con la regla las longitudes necesarias.



— Obtenemos las áreas de las figuras ①, ②, ③, ④ y ⑤.

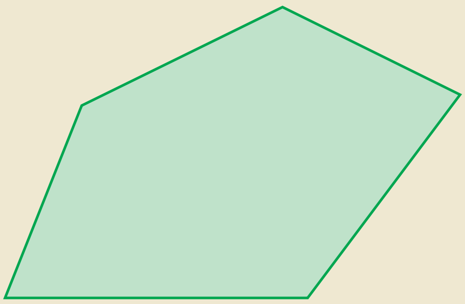
$$A_1 = \frac{(1 + 0{,}6) \cdot 0{,}5}{2} = 0{,}4\text{ cm}^2;\quad A_2 = 1 \cdot 2 = 2\text{ cm}^2;$$

$$A_3 = 0{,}5^2 = 0{,}25\text{ cm}^2;\quad A_4 = A_5 = \frac{0{,}75 \cdot 1}{2} = 0{,}375\text{ cm}^2$$

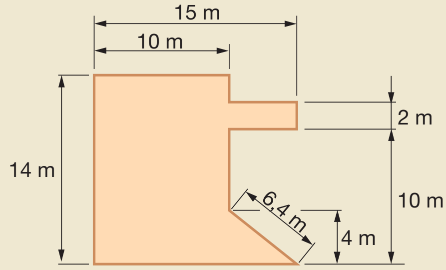
— $A_{\text{figura}} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 3{,}4\text{ cm}^2$

Actividades

26 Calcula el perímetro y el área de este polígono irregular tomando las medidas pertinentes.



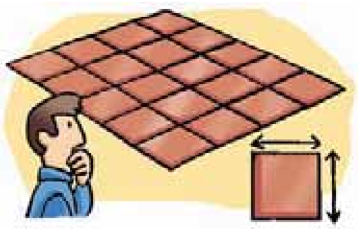
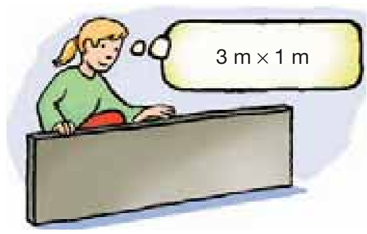
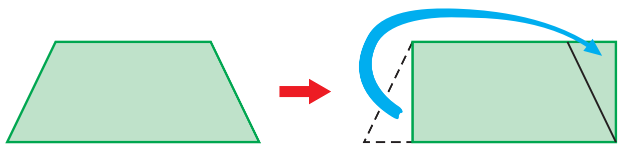
27 Calcula el perímetro y el área de este polígono irregular.



5 Estimación de áreas

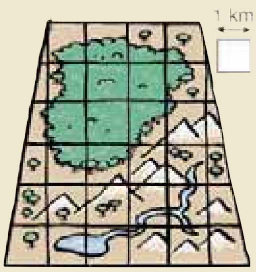
Como ocurre con las medidas de longitud, masa o capacidad, a veces es necesario hacer una estimación de la medida de una superficie.

La estimación de medidas de superficie, como toda estimación, requiere práctica. A continuación, te presentamos una serie de estrategias que pueden resultarte útiles.

Estrategia	Descripción	Ejemplo
Adición repetida	Recubrimos mentalmente la superficie que vamos a medir con la unidad de medida escogida y contamos el número de veces que está contenida.	Para medir la superficie del suelo de una habitación, estimamos el área de una baldosa y contamos el número de baldosas.  A_{suelo}: .... m^2
Estimación de longitudes y aplicación de fórmulas	Usamos estrategias de estimación de longitudes para estimar las dimensiones de una región poligonal y aplicamos fórmulas para obtener el área.	Para obtener el área de un recinto rectangular, estimamos sus dimensiones y multiplicamos ambos valores.  A_{tabla}: .... m^2
Reestructuración	Separamos una parte del objeto y la unimos en otro lugar para obtener otra superficie más fácil de medir.	Transformamos un trapecio isósceles en un rectángulo para hallar su área.  $A_{trapecio}$: .... m^2

Actividades

28 Indica qué tipo de estimación se está realizando en cada una de las siguientes situaciones.



29 Cita tres objetos que midan aproximadamente 1 dm^2.

30 Formen grupos de cuatro alumnos. Observen un mapa de Ecuador y ordenen las provincias según su área.

— Averiguen el área de su provincia y, a partir de ésta, estimen la extensión de otras.

— Busquen las áreas reales y compárenlas con sus estimaciones.

5.1. Aplicaciones del teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras tiene múltiples aplicaciones, tanto en geometría como en la resolución de problemas de la vida cotidiana. Ahora aplicarás tus conocimientos sobre números irracionales. Veamos algunos ejemplos.

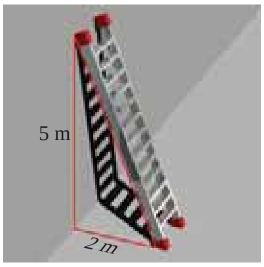
ejemplo 10

¿Qué longitud deberá tener una escalera para que al situar su base a 2 m de la pared alcance una altura de 5 m?

Al hacer un esquema obtenemos un triángulo rectángulo del que conocemos los catetos.

Para hallar la longitud de la escalera aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29 \Rightarrow \quad a = \sqrt{29} = 5,4 \text{ cm}$$



La escalera deberá tener una longitud de 5,4 m.

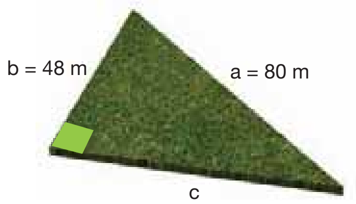
ejemplo 11

Un terreno tiene forma de triángulo rectángulo. Si uno de los catetos mide 48 m y la hipotenusa 80 m, calcula el perímetro y el área del terreno.

Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el cateto que falta.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 80^2 - 48^2 = 4\,096 \text{ m}^2 \Rightarrow c = \sqrt{4\,096} = 64 \text{ m}$$

Conocemos los tres lados del triángulo rectángulo. La base y la altura coinciden con los dos catetos. Así, el perímetro y el área serán:



$$P = a + b + c = 80 + 48 + 64 = 192 \text{ m}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{64 \cdot 48}{2} = 1\,536 \text{ m}^2$$

El perímetro mide 192 m y el área 1 536 m^2.

LAS TIC Y LA MATEMÁTICA

Para calcular la raíz cuadrada de un número que no sea cuadrado perfecto podemos emplear la calculadora.

Así:

√ 2 9 → 5.38516

Y dar una aproximación por redondeo hasta las décimas o centésimas.

$\sqrt{29} = 5,4$

CONTRAEJEMPLO

El triángulo de lados:

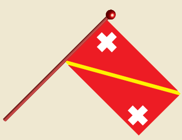
a = 105 mm
b = 85 mm
c = 5 mm

no es triángulo rectángulo, porque no cumple con el teorema de Pitágoras:

$105^2 \neq 85^2 + 5^2$

Actividades

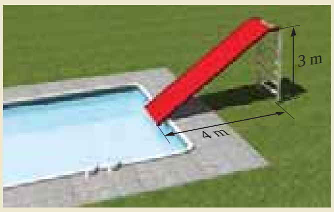
31 Una bandera cuyas dimensiones son 15 dm y 10 dm tiene una línea que la atraviesa diagonalmente. Halla la longitud de dicha línea.



32 En una finca que ocupa una superficie rectangular se ha construido un camino que la cruza en diagonal.

La longitud del camino es de 193 m y la de uno de los lados de la finca, 95 m. ¿Cuál es el área de la finca?

33 En una piscina se ha construido una resbaladera con una escalera de 3 m de altura y de manera que la distancia del pie de la escalera al punto más bajo del resbaladera es 4 m. ¿Cuánto mide la resbaladera?



Cómo resolver problemas

Estrategia: Descomposición del problema

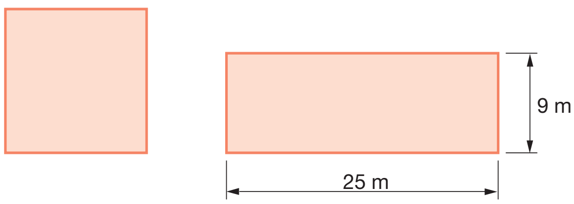
Esta estrategia consiste en dividir el problema en subproblemas relacionados entre sí, resolver cada uno de los subproblemas y hallar finalmente la solución al problema inicial.

Encuentra la longitud del lado de un cuadrado cuya área es igual a la de un rectángulo de base 25 m y altura 9 m.

Comprensión del enunciado

— Leemos de nuevo el enunciado.

— Elaboramos un esquema de las figuras geométricas que aparecen en el problema y anotamos en ellas los datos conocidos.



Planificación de la resolución

Para hallar la longitud del lado del cuadrado debemos calcular primero su área. Podemos, pues, descomponer el problema en dos subproblemas:

1. Hallar el área de un rectángulo conocida la longitud de su base y su altura.
2. Hallar la longitud del lado de un cuadrado conocida su área.

Ejecución del plan de resolución

1. $A_{\text{rectángulo}} = \text{base} \cdot \text{altura}$

   $A_{\text{rectángulo}} = 25 \text{ m} \cdot 9 \text{ m} = 225 \text{ m}^2$

2. $A_{\text{rectángulo}} = A_{\text{cuadrado}}$

   $A_{\text{cuadrado}} = l^2 \Rightarrow \quad c = \sqrt{A}$

   $c = \sqrt{225} = 15$

El lado del cuadrado tiene una longitud de 15 m.

Revisión del resultado y del proceso seguido

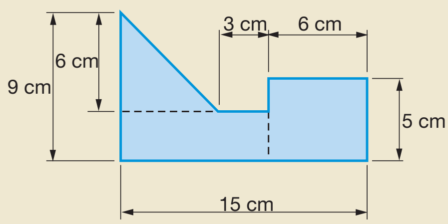
Calculamos el área del cuadrado y comprobamos que coincide con la del rectángulo.

$$A_{\text{cuadrado}} = (15 \text{ m})^2 = 225 \text{ m}^2 = A_{\text{rectángulo}}$$

Actividades

Utiliza la estrategia anterior para resolver los siguientes problemas.

34 Halla el área del recinto de esta figura.



35 El perímetro de un heptágono regular es 52,5 cm. Halla el área de un rectángulo cuya base es el doble de su altura e igual al lado del heptágono.

36 Halla la base y la altura de un rectángulo cuya área es igual al área de un cuadrado de lado 4 m. La base del rectángulo es el doble de su altura.

37 Encuentra el perímetro de un cuadrado cuya área es igual a la de un rombo cuyas diagonales son 7 cm y 4 cm.

En resumen

- El conjunto de los números **racionales** coincide con el de los números decimales limitados o ilimitados y periódicos.
- Un número es **irracional** si su expresión decimal es ilimitada y no periódica.
- El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.

  El **área** de un polígono es la medida de la extensión que ocupa.
-

Polígono	Perímetro	Área
Rectángulo (base b; altura h)	$P = 2b + 2h$	$A = b \cdot h$
Cuadrado (lado a)	$P = 4a$	$A = a^2$
Romboide (lados a y b; base b; altura h)	$P = 2a + 2b$	$A = b \cdot h$
Rombo (lado a; diagonales D y d)	$P = 4a$	$A = \dfrac{D \cdot d}{2}$

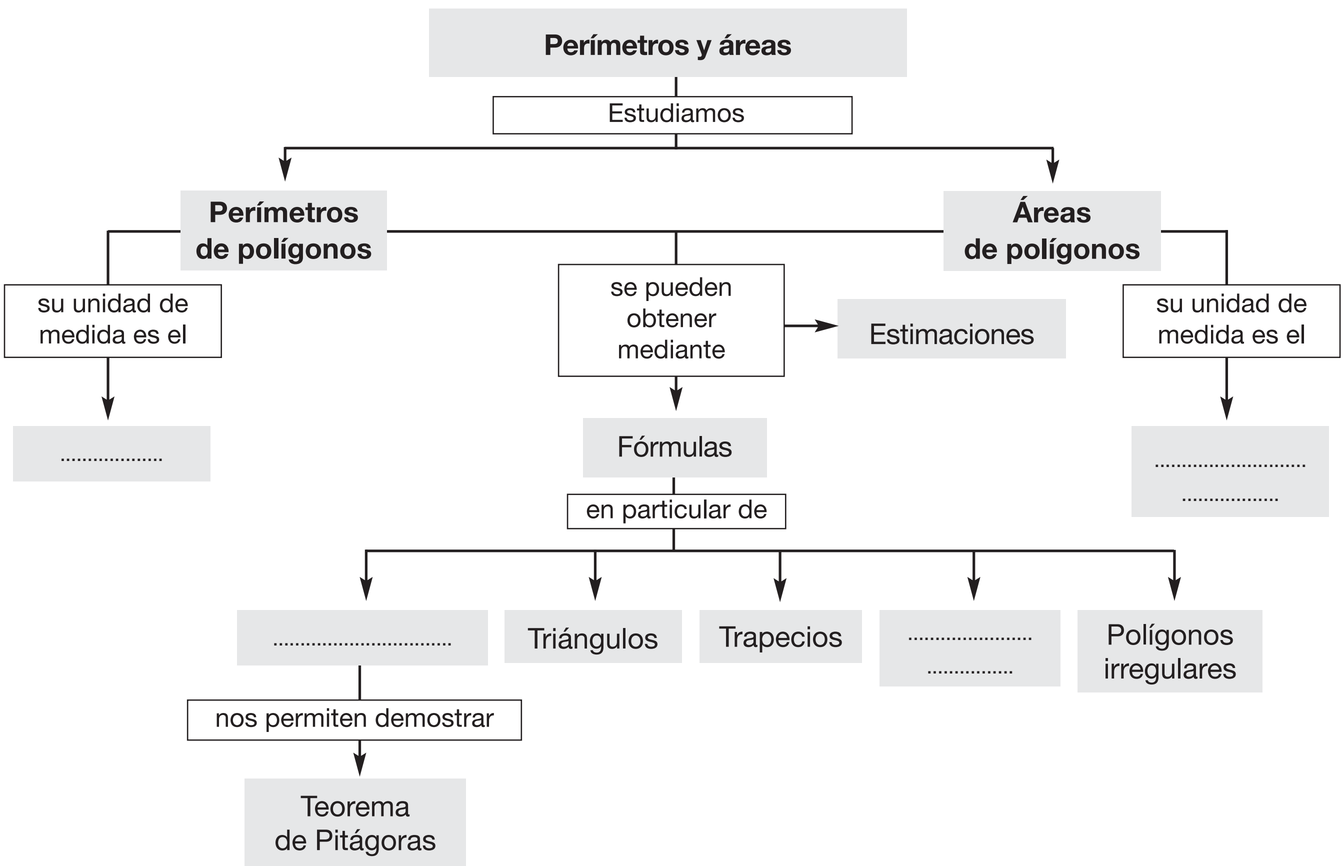
Polígono	Perímetro	Área
Triángulo (lados a, b y c; base b; altura h)	$P = a + b + c$	$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$
Trapecio (lados a, b, a' y B; bases B y b; altura h)	$P = a + b + a' + B$	$A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$
Polígono regular (n.º lados n; lado l; apotema ap)	$P = n \cdot l$	$A = \dfrac{P \cdot ap}{2}$

- **Teorema de Pitágoras**

  En un triángulo rectángulo el **cuadrado** de la **hipotenusa** es igual a la **suma** de los **cuadrados** de los **catetos.**

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Repasa los contenidos de este tema y completa mentalmente lo que hace falta:



Ejercicios y problemas integradores

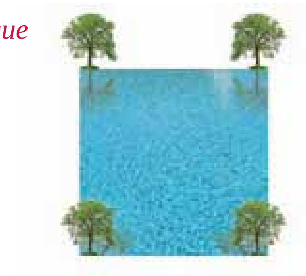
¡Duplica el estanque!

- Ante el altar de Apolo, Pitágoras decía: ¿De qué manera puedo agradecértelo?

Y recibió del Dios el siguiente oráculo: ¡Me sentiré contento si duplicas el estanque!

Con un grupo de estudiantes, Pitágoras fue a inspeccionar el estanque. Este tenía forma de un cuadrado, de cien pasos de lado. Cuatro fuertes robles, uno en cada esquina, escoltaban el estanque.

Antiguo estanque



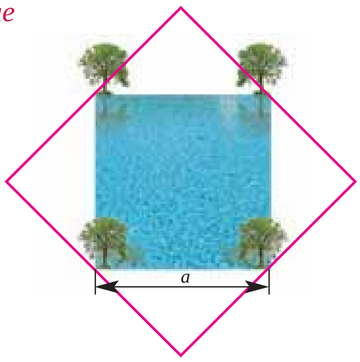
Apolo pide que el nuevo estanque delimite veinte mil pasos cuadrados de superficie; tenemos que lograrlo sin tocar los robles. ¿De qué modo ensanchar el estanque?

Los discípulos se pusieron a pensar, pero no se les ocurrió ninguna idea. Luego de un tiempo, el maestro trazó con el bastón el siguiente dibujo:

¡Así debemos construir el nuevo estanque! exclamó. Delimita exactamente veinte mil pasos cuadrados, pues es el doble del estanque anterior. ¡Y ni una sola hoja de los robles será tocada!

El nuevo estanque se construyó en seguida.

Nuevo estanque



En una clase, un discípulo llamado Cidón dijo:

El bordillo del antiguo estanque medía cien pasos; hay algo que deseo saber, Pitágoras: ¿cuántos pasos mide el bordillo del nuevo estanque?

Fueron hasta el lugar e intentaron medir el lado del nuevo estanque pero lo único que concluyeron fue que medía más de ciento cuarenta y un pasos pero menos de ciento cuarenta y dos. Muchas pruebas realizaron.

$$141\frac{1}{2},\ 141\frac{2}{5},\ 141\frac{9}{20},\ 141\frac{43}{200},\ \text{etc..}$$

Pero al hacer el cálculo del área su valor no coincidía con 20 000 pasos cuadrados Entonces, ¿cuánto mide el bordillo?

¡Estoy asombrado igual que ustedes! dijo Pitágoras. Según puedo ver, el bordillo de este estanque... ¡no es ningún número! ¡E incluso creo que lo puedo demostrar!

¿Me ayudas?

Supón que en el antiguo estanque cabían ***a*** pasos (***a*** de antiguo), y que en el nuevo estanque caben ***n*** pasos (***n*** de nuevo). Por ejemplo, ***a*** podría valer 100 mónadas y ***n***, 150. Entonces, la razón entre los dos bordillos sería $\frac{150}{100} = \frac{3}{2}$. Los números 150 y 100 tienen divisores comunes (2, 5, 10, 25, 50), pero los números 3 y 2 no tienen ningún divisor común. ¡Entonces, supongamos que desde el principio los números **a** y **n** no tienen divisores comunes! Es decir, **son primos relativos**.

El estanque tenía una superficie de a^2, y la del nuevo es de ¡n^2! ¿En qué relación están los dos números? Como el estanque antiguo delimitaba diez mil pasos cuadrados, y el segundo veinte mil, ¡n^2 debe ser exactamente el doble de a^2! Anótalo: $n^2 = 2a^2$

Esto indica que n^2 puede ser dividida en dos partes iguales. Luego, n^2 es un número par y esto es posible solo si ***n***, es par.

Ahora llamemos m a cada mitad, es decir: $n = 2m$

Reemplazando esta igualdad en la anterior. Obtendrás que

$$(2m)^2 = 2a^2,$$

$$\text{que es lo mismo que } 4m^2 = 2a^2.$$

Y si estos dos números son iguales, ¡sus mitades también lo son! Escríbelo: $2m^2 = a^2$.

La igualdad te indica que la superficie del antiguo estanque, a^2, puede ser dividida en dos partes idénticas, cada una de m^2 pasos. Es decir a^2 es un número par. Esto solo es posible por supuesto si el número ***a***, es par. Si llamamos ***b*** a la mitad del número de monadas que compone cada una de sus mitades: ***a = 2b.***

Haz un alto. ¿Qué has logrado averiguar? ¡Que los números ***a*** y ***n***, ambos, son pares! En efecto, así lo afirman las igualdades encontradas:

$$n = 2m, \qquad a = 2b.$$

¡Entonces, el número dos es un divisor común de ellos! Pero esto es imposible, pues, como recordarás, escogiste los números ***a*** y ***n*** de tal modo que fueran **primos relativos**. Has arribado a una **contradicción**. ¡Medita sobre su significado por unos instantes!

Pitágoras llamó a estas magnitudes *inconmensurables*, por no tener ninguna *mesura* o *medida* común.

De esta manera, Pitágoras demostró que $\sqrt{2}$ no es un número racional, así que posteriormente se lo llamó irracional.

FÍJATE

A lo largo de la historia de la humanidad se descubrieron algunos métodos para extraer raíces cuadradas; el más sencillo se le ocurrió a Carl Weierstrass, matemático alemán que vivió en los años 1815-1897. Se llama el método de intervalos encajados.

Practica

- Investiga en qué consiste el método de intervalos encajados.

Ejercicios y problemas

Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

En tu cuaderno

El conjunto de los números irracionales

38 Justifica si un número irracional puede expresarse en forma decimal y en forma fraccionaria.

39 ¿Por qué el número $\dfrac{0,\overset{\frown}{45} + 2,00\overset{\frown}{83}}{15,0\overset{\frown}{3}}$ no puede ser irracional?

40 Calcula la diagonal de un cuadrado de lado igual a 2 cm. ¿Qué clase de número has obtenido?

41 Escribe tres raíces cuadradas de números naturales que sean números racionales y otras tres que sean números irracionales.

42 Clasifica en racionales e irracionales los siguientes números decimales.

$$4{,}487\,252;\ 8{,}454\,545;\ 0{,}\overset{\frown}{253};\ 54{,}235\,412...;\ 32{,}2\overset{\frown}{9};$$

$$7{,}5\overset{\frown}{6211};\ 0{,}478\,512\,5...$$

43 Di si estas raíces cuadradas dan como resultado un número racional o irracional.

a) $\sqrt{49}$ d) $\sqrt{62}$

b) $\sqrt{900}$ e) $\sqrt{0{,}04}$

c) $\sqrt{1{,}44}$ f) $\sqrt{0{,}05}$

44 Demuestra que $\sqrt{7}$ es un número irracional. Utiliza el método de reducción al absurdo.

— ¿Puedes demostrar que $\sqrt{7}$ es un número irracional calculando muchas cifras decimales? Razona tu respuesta.

45 Representa sobre la recta real los siguientes números.

a) $+\sqrt{5}$ b) $+\sqrt{4}$ c) π

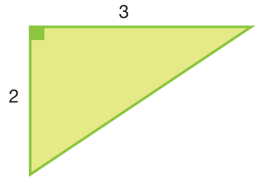
— Explica en cada caso el procedimiento que has utilizado.

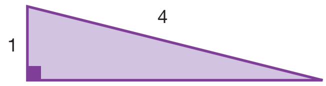
46 Representa sobre la recta real estos números. Previamente descompón el radicando en suma de cuadrados. Por ejemplo: $10 = 1^2 + 3^2$.

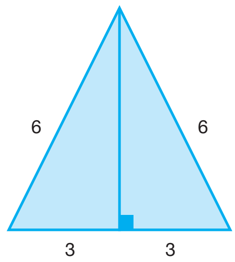
a) $+\sqrt{10}$ b) $+\sqrt{13}$ c) $-\sqrt{20}$

47 Representa sobre la recta real los siguientes números irracionales: $+\sqrt{2}\,; -\sqrt{8}\,; -\sqrt{12}$.

48 Ordena de menor a mayor las longitudes de lados en cada triángulo.

a) 

b) 

c) 

49 Ordena sobre la recta los siguientes números.

a) $\sqrt{9}\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ \sqrt{6}$

b) $\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{12}\ ;\ \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{5}\ ;\ \sqrt{\pi}$

d) $\sqrt{8}\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ \sqrt{18}$

50 Usando la resta de las aproximaciones decimales, encuentra el orden de los siguientes números.

a) $\pi\ ;\ \sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}\ ;\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ ;\ \sqrt{7}$

51 Resuelve.

a) $\sqrt{\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4}} + \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

b) $\pi + \dfrac{3}{4}\pi + \sqrt{\dfrac{2}{7}} - \dfrac{7}{3}\pi$

c) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right) + \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right) + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)$

52 Simplifica.

a) $\left(\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}\right)^{-2}$ c) $\sqrt[6]{\left\{\left(\sqrt{2}\right)^{3}\right\}^{2}}$

b) $\left(\sqrt{\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^{1}}\right)^{2}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{\left(\sqrt{\dfrac{7}{25}}\right)^{6}}}$

53 Resuelve las siguientes operaciones.

a) $\left(\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}\right)$ c) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3}\cdot(4)^{4}}{4\cdot\sqrt{2}}$

b) $\left(\sqrt{\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^{1}}\right)^{2}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{27}}{6}\cdot\sqrt{8}$

54 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{\dfrac{5}{36}}$

b) $\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6}\right)+\sqrt{\dfrac{5}{36}}-5\sqrt{3}$

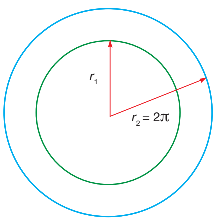
c) $\left(\sqrt{\dfrac{5}{6}}\cdot\sqrt{6}\right)-\left(\dfrac{\sqrt{12}}{5}\cdot\sqrt{5}\right)$

d) $\dfrac{\sqrt{2}\,\{(\pi)^{2}-(\pi+2)\}-\sqrt{2}\,\pi^{2}}{\pi+2}$

55 Ubica los paréntesis en el lugar necesario para que al simplificar la expresión, el resultado sea: $\dfrac{\sqrt{5}}{5}-\dfrac{3}{5}$

$$\frac{\sqrt{3}}{5}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{5}-2\,\frac{\sqrt{3}}{5}$$

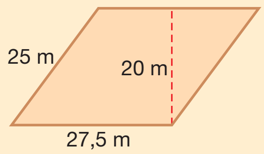
56 Encuentra la diferencia de longitudes de los radios de las siguientes circunferencias, para que la diferencia de sus perímetros sea 3π.



Perímetros y áreas de polígonos

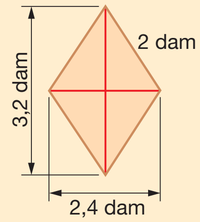
57 Halla los perímetros y las áreas de estos polígonos.

a)



$P = 2a + 2b$
$= 2 \cdot 25 + 2 \cdot 27{,}5 =$
$= 50 + 55 = 105$ m
$A = b \cdot h$
$= 27{,}5 \cdot 20 = 550$ m^2

b)



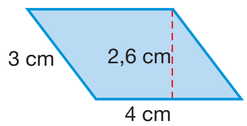
$P = 4\,a$
$= 4 \cdot 2 = 8$ dam

$A = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{3{,}2 \cdot 2{,}4}{2} =$

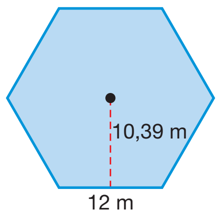
$= 3{,}84$ dam^2

58 Encuentra los perímetros y las áreas de los polígonos.

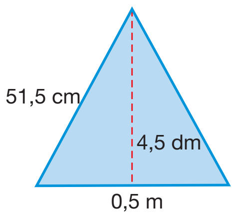
a)



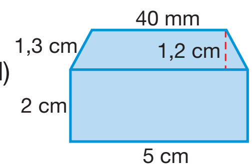
c)



b)



d)



59 Calcula el área de un romboide de 7 cm de base y 15 cm de altura. Expresa el resultado en metros cuadrados.

60 Calcula la cantidad de papel que necesitamos para construir una cometa en forma de rombo cuyas diagonales midan 20 cm y 15 cm.

61 Expresa en metros cuadrados las áreas de dos triángulos cuyas bases y alturas miden:

a) 2,6 dam y 8 m

b) 80 cm y 23 dm

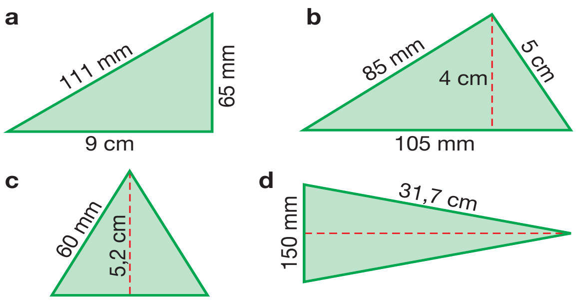
62 Calcula en cada caso el área del trapecio cuyas bases y altura son:

a) 14 m, 128 dm y 825 cm

b) 1,25 hm, 15,2 dam y 86 m

— Expresa el resultado en metros cuadrados.

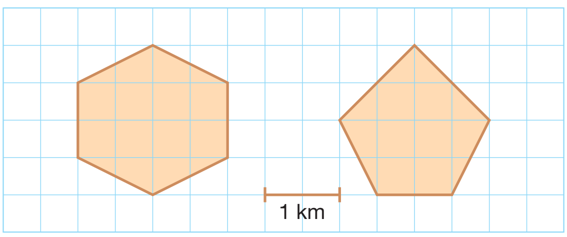
63 Calcula el área de cada uno de estos triángulos.



64 Calcula el perímetro y el área de un pentágono regular de 4 m de lado y 2,75 m de apotema.

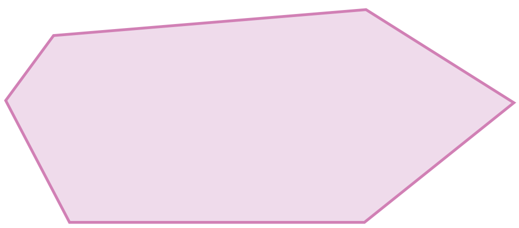
— Expresa el área en centímetros cuadrados.

65 En la reserva ecológica de El Ángel se proyecta repoblar las dos regiones poligonales de la figura con árboles de pumamaqui. ¿De qué polígonos se trata? ¿Son polígonos regulares?

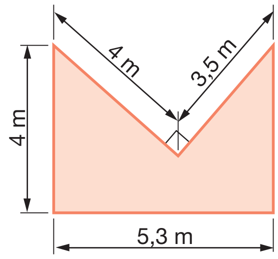


— Calcula sus perímetros y sus áreas.

66 Calcula el perímetro y el área del siguiente polígono irregular a partir de la toma de las medidas necesarias.



67 Calcula el perímetro y el área de la figura.



68 Un pentágono regular A mide 10,9 cm de lado y 7,5 cm de apotema. Otro pentágono regular B mide 5 cm de lado y es semejante al primero.

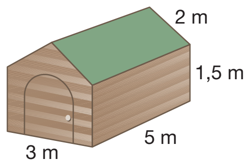
— Calcula el perímetro y el área de cada uno.

— ¿Cuál es la razón entre los dos perímetros? ¿Y entre las dos áreas?

— ¿Qué conclusiones obtienes?

69 Jorge tiene un mapa de Zamora Chinchipe sobre el que ha trazado el itinerario para una excursión. Sobre el mapa ha medido una longitud total del recorrido de 68 cm. Si el mapa está realizado a escala 1: 25 000, ¿qué distancia espera recorrer?

70 Un carpintero recibe el encargo de construir la casa dibujada en la figura.



— Dibuja el desarrollo plano del poliedro.

— Calcula la superficie de madera necesaria. Ten en cuenta que el área del poliedro es la suma de las áreas de todas sus caras.

Estimación de perímetros y áreas

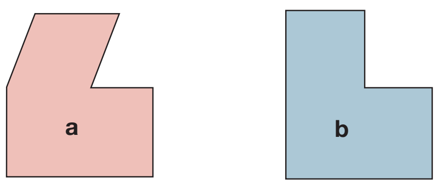
71 Cita tres objetos cuya área estimada, en cada caso:

a) Sea inferior a $\frac{1}{2}$ dm^2.

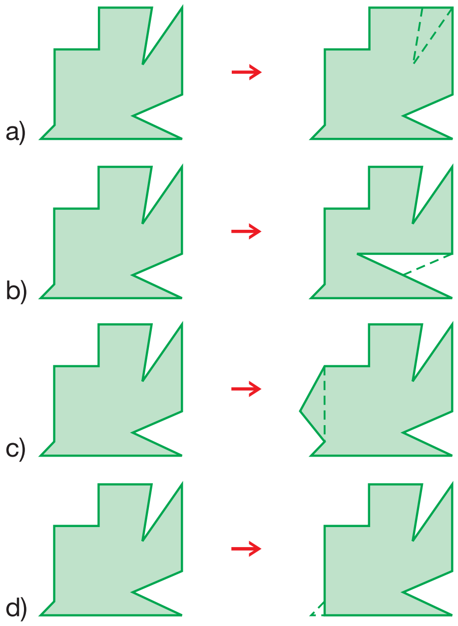
b) Esté comprendida entre $\frac{1}{2}$ dm^2 y 1 dm^2.

c) Sea mayor que 1 dm^2.

72 Compara el perímetro y el área de estas figuras sin necesidad de recurrir a su medición.



73 Indica si el perímetro y el área aumentan o disminuyen en cada una de las siguientes transformaciones.

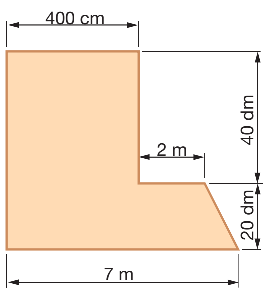


Teorema de Pitágoras

74 Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de lados 9 cm y 14 cm.

75 La rampa de acceso a un edificio empieza a 120 cm de su fachada y alcanza una altura de 50 cm. Calcula la longitud de la rampa.

76 Calcula el perímetro y el área de la figura de la derecha.



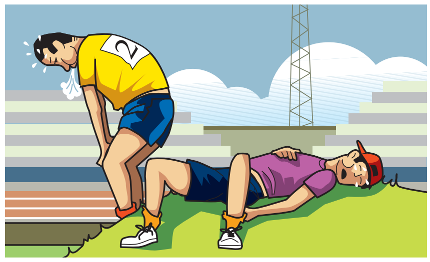
Aplicación en la práctica

77 Una ventana cuadrada tiene un área igual a 0,6 m^2. Calcula la longitud del lado. ¿Obtienes un número racional o irracional?

78 Un triángulo equilátero mide 2 cm de lado. Calcula su altura. ¿Qué clase de número has obtenido?

— Expresa el resultado con tres cifras decimales. ¿Qué clase de número tienes ahora?

79 Dos corredores de larga distancia se entrenan en un circuito de planta cuadrada de 1 hm de lado.



Uno de ellos da vueltas al perímetro del circuito, mientras que el otro recorre un pasadizo en diagonal que va de un vértice al otro del circuito.

Si salen al mismo tiempo de uno de los vértices y ambos van a igual velocidad, determina si, teóricamente, se encontrarán en algún momento.

80 *Para pavimentar una acera que mide 10 000 m^2 se han necesitado 20 000 baldosas. Calcula el área de una baldosa. Expresa el resultado en centímetros cuadrados.*

10 000 m^2 ÷ 20 000 baldosas = 0,5 m^2/baldosa

0,5 m^2 = 5 000 cm^2

El área de cada baldosa es de 5 000 cm^2.

81 En una pared de un cuarto de baño caben 500 baldosas de 1 dm^2 de área. Di si una pared cuadrada de 2,5 m de lado tiene el mismo área que la anterior. ¿Cuántas baldosas de 1 dm^2 caben en la segunda pared?

82 *La extensión de una urbanización es 5,38 ha. ¿En cuántas parcelas de 600 m^2 cada una se podrá dividir la urbanización si se reservan 4 000 m^2 para formar las calles?*

5,38 ha = 5,38 hm^2 = 53 800 m^2

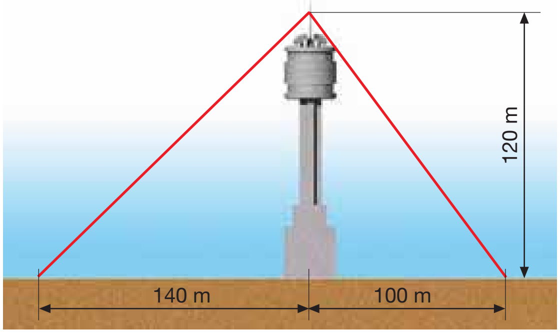
53 800 m^2 − 4 000 m^2 = 49 800 m^2

49 800 m^2 ÷ 600 m^2 = 83 parcelas

83 Una urbanización tiene 60 parcelas de 500 m^2 cada una, 65 de 375 m^2, una zona deportiva de 0,6 ha y una zona de equipamientos de 2,5 a. Para las calles se han reservado 20 dam^2. ¿Cuál es el área total de la urbanización?

Expresa el resultado en m^2 y en ha.

84 Esta figura muestra la torre de vigilancia de un guarda forestal.



— Obtén la longitud del cable señalado en rojo a partir de los datos que se indican.

85 La vela de un barco de juguete es un triángulo rectángulo con unos catetos que miden 20 cm y 15 cm. Calcula el perímetro y el área de la vela.

— Si este juguete es una maqueta construida a escala 1: 25, ¿cuáles son el perímetro y el área de la vela del barco real?

86 Un tablero cuadrado de 80 cm de perímetro se divide en dos rectángulos iguales. Calcula el perímetro de cada mitad.

87 @ Analiza los ejemplos de la página http://www.redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/lugares/mate1q/mate1q.htm y calcula el perímetro de una cadena de 50 pentágonos de 5 cm de lado.

88 @ Visita la página http://www.ugr.es/~sevimeco/documentos/edu_multimedia/areas/5.htm y dibuja dos figuras que cumplan:

a) Tienen igual perímetro y distinta área.

b) La de mayor perímetro tiene menor área.

Más a fondo

89 Di si es posible que ocurra lo siguiente:

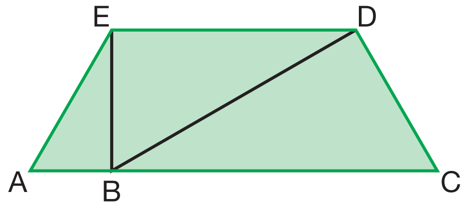
a) Que la suma o la resta de dos números irracionales sea un número racional.

b) Que el producto o el cociente de dos números irracionales sea un número racional.

c) Que el cuadrado o la raíz cuadrada de un número irracional sea un número racional.

90 Observa esta figura. Hemos descompuesto un trapecio en tres triángulos.

Estos triángulos cumplen:



a) La longitud de la base y la altura de *ABE* son 3 cm y 4 cm, respectivamente.

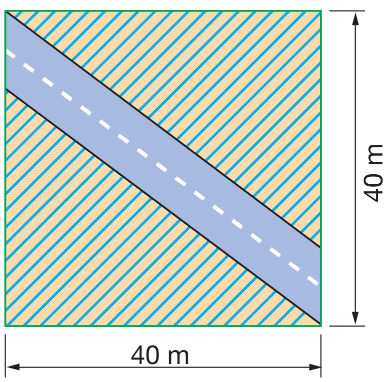
b) El área de *BDE* es tres veces la de *ABE*.

c) El área de *BCD* es cuatro veces la de *ABE*.

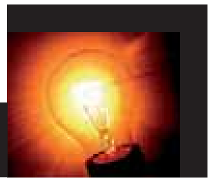
A partir de estos datos, halla las dimensiones del trapecio.

91 Un proyecto de infraestructura urbana pretende reformar una parcela cuadrada de 40 m de lado. Una cuarta parte de la parcela se destinará a construir un paseo donde se instalará un farol cada 6,25 m en cada una de las dos aceras. El resto se destinará a jardines.

¿Cuántos postes se utilizarán en la construcción del paseo si colocamos la primera en una esquina?



Observa en la figura un esquema del proyecto en el que las zonas rayadas corresponden a zonas verdes.



Material concreto: geoplano

Un **geoplano** es un instrumento que consiste en una tabla cuadrada en la que se colocan varias hileras de clavos situados a la misma distancia (en este caso tomamos 1 cm) formando una retícula. En los clavos pueden engancharse unas gomas elásticas de manera que se reproduzca una figura.

Construye un geoplano de 9 clavos.

a) Encuentra todos los cuadrados y los rectángulos diferentes que puedes formar con una goma elástica. Calcula sus perímetros y sus áreas.

b) Encuentra todos los triángulos diferentes. Calcula sus perímetros y sus áreas.

Localiza el menor triángulo rectángulo que puedes formar. Calcula su área. Expresa las áreas de los otros triángulos en función de ésta. A continuación, expresa las áreas de los cuadriláteros del apartado *a)* en función de área del triángulo más pequeño.

Buen Vivir

Derechos del consumidor

La economía doméstica tiene como objetivo distribuir adecuadamente los ingresos y satisfacer las necesidades básicas de un hogar.

Para lograrlo, se recomienda tomar en cuenta:

Gastos fijos. Son aquellos constantes en un período, como el alquiler, la alimentación, la luz, el agua, el teléfono, el gas, etc.

Gastos variables. Se refieren a los que no son constantes y que pueden programarse, como la ropa, el calzado, las reparaciones del hogar, entre otros.

Gastos extraordinarios. Son pagos no programados, como tratamiento médico, accidentes o enfermedad.

Para aliviar los gastos de la economía doméstica, se pueden aplicar estos consejos:

a) Ahorro de luz: apagar las luces en las habitaciones donde no haya alguien; encender los electrodomésticos necesarios y utilizar focos ahorradores.

b) Ahorro de agua: cerrar bien los grifos, dar mantenimiento a las tuberías y no malgastar el agua mientras te bañas.

Actividades

1. Relacionen el consumo de luz eléctrica durante la temporada de navidad y cualquier otro mes. Indiquen cuál es la diferencia en el consumo y si se justifica.
2. Identifiquen los servicios comunitarios que son pagados mensualmente por todos a través del pago de impuestos en la planilla de luz eléctrica.
3. Comenten acerca de la forma como se consigue el agua en sus hogares: por tubería pública, por cisterna, por tanquero. Reflexionen cómo lo hacen otras familias. ¿Por qué existen diferencias, pueden superarse?
4. Respondan. ¿El acceso a servicios básicos es un derecho de las personas? ¿Por qué?
5. Planteen alternativas para ahorrar la luz eléctrica, el agua y otros servicios de manera que beneficien la economía de sus familias y a la naturaleza.
6. Promuevan sus ideas, mediante afiches o carteleras, en su colegio para motivar a los demás a que las practiquen.

Autoevaluación | Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

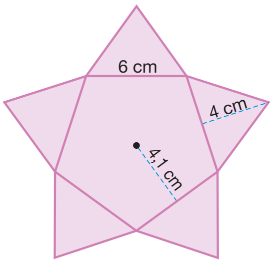
Autoevaluación

1. Calcula los perímetros de estos polígonos.

a) Un cuadrado de lado 12 cm.

b) Un romboide de lados 1,1 dm y 0,7 dm.

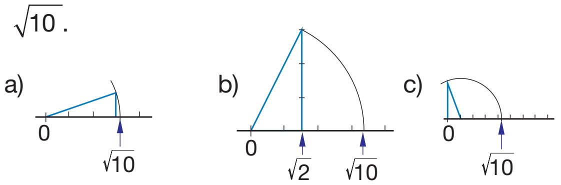
2. Calcula el perímetro y el área de esta estrella.



3. Señala todos los números irracionales de esta serie.

$$1{,}24;\ 3{,}212786...;\ 12{,}\overset{\frown}{45};\ 9{,}0\overset{\frown}{75};\ \sqrt{3};\ \sqrt{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{7}$$

4. Elige la representación correcta del número irracional $\sqrt{10}$.



Coevaluación

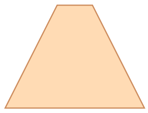
1. Calculen las áreas de los siguientes polígonos.

a) Un rectángulo de base 14 cm y altura 5,6 cm.

b) Un rombo de diagonales 1,3 dam y 8,4 m.

c) Un trapecio de bases 10 dm y 0,8 m y altura 0,5 m.

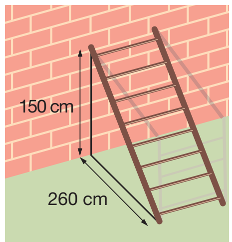
2. Calculen el perímetro y el área del trapecio isósceles de la derecha. Para ello, efectúen las medidas necesarias.



3. Ordenen de mayor a menor estos números.

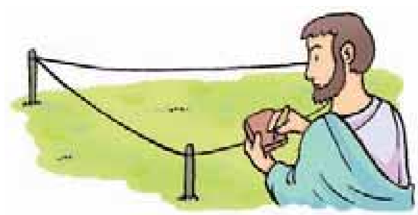
$$\frac{\pi}{2};\ 1{,}57;\ \sqrt{3};\ \frac{\sqrt{5}}{2};\ \frac{8}{5}$$

4. Calculen la longitud de la escalera de la figura. Aproximen por redondeo hasta las unidades.

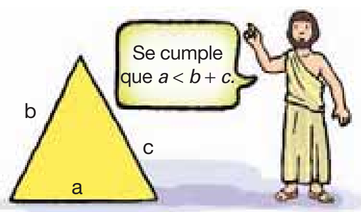


Sección de historia

Babilonios, egipcios e hindúes calcularon áreas de figuras planas sencillas para resolver problemas de la vida diaria.



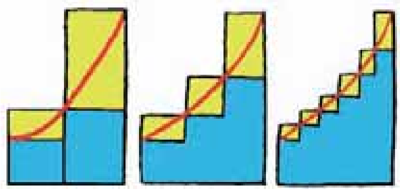
En la Grecia clásica, los griegos demostraron multitud de resultados teóricos sobre áreas y volúmenes que Euclides recogió en su obra *Elementos.*



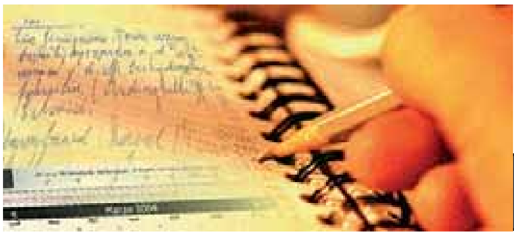
En la Grecia del período alejandrino se utilizaban los resultados teóricos para resolver problemas prácticos.

Cavalieri, en el siglo XVII, desarrolla la *teoría de los indivisibles,* y la aplica al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes.

En los siglos XVII y XVIII se calculan áreas delimitadas por curvas gracias a una nueva herramienta: el *cálculo infinitesimal.*



En el siglo XX se extienden la noción de área y la de volumen a objetos no geométricos: conjuntos.



Crónica matemática

La medida de superficies es una actividad cotidiana. Los pintores calculan el área que deben pintar; los jardineros, el área de la zona que deben cubrir de césped...

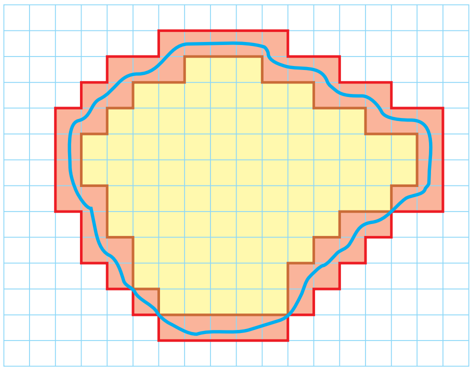
Área de una superficie cualquiera

Para delimitar el área de una superficie cualquiera podemos proceder del siguiente modo:

— Recubrimos la superficie con una cuadrícula.

— Contamos el número de cuadros contenidos totalmente por la figura y el número de cuadros contenidos parcialmente.

El área de la figura será mayor que la de los cuadros contenidos totalmente y menor que la del total de cuadros contenidos total o parcialmente.

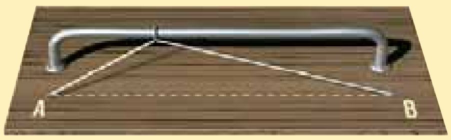


Un problema de mínimos

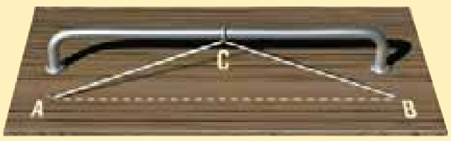
Imagina que construimos el siguiente artilugio.

— Clavamos los dos extremos de una goma elástica en dos puntos *A* y *B* de un tablero después de haberla pasado por una pequeña argolla.

— Dejamos la argolla de modo que la podamos mover por una barra paralela a *AB,* clavada a la vez en el tablero.



Al mover la argolla obtenemos diferentes triángulos. Estos triángulos tienen la misma área, ya que todos tienen la misma base *(AB)* y la misma altura (coincide con la distancia entre la argolla y el tablero).



Al dejar ir la argolla, por la tensión de la goma, ésta quedará fijada en un punto *C*. Observamos que la longitud total de la goma es la **menor posible,** es decir, se ha formado un triángulo isósceles.

La leyenda de la fundación de Cartago

La princesa Dido era hija de Muto, rey de Tiro, y hermana de Pigmalión, quien sucedió en el trono a su padre. Pigmalión mandó asesinar al esposo de Dido para apoderarse de sus riquezas, por lo que Dido huyó a África con sus seguidores. Allí hizo un pacto con el rey de Numidia según el cual le compraría tanta tierra como pudiera delimitar una piel de toro.

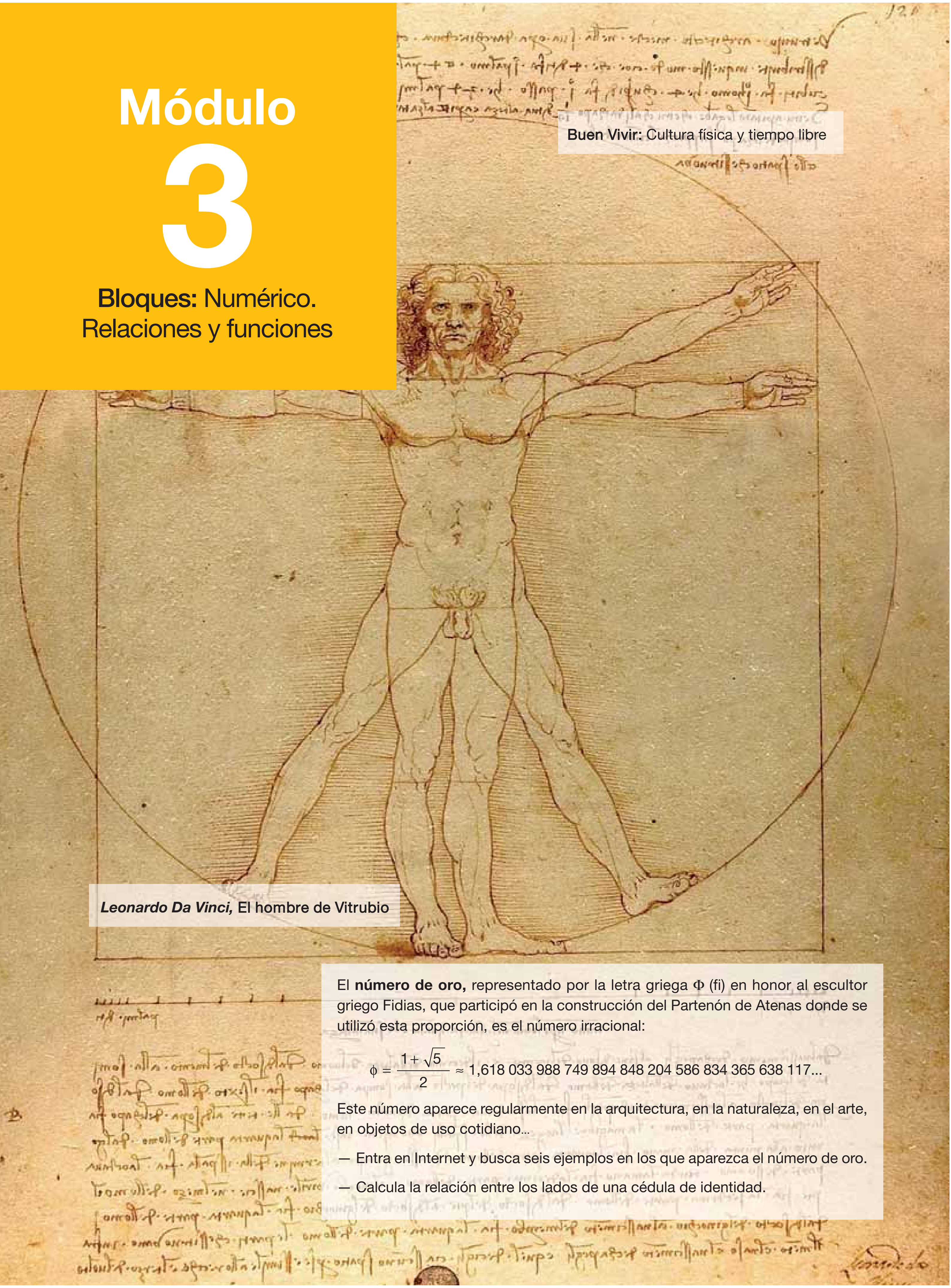
Cerrado el trato, Dido cortó la piel en tiras muy estrechas y, gracias a esta argucia, abarcó un territorio suficiente para construir una fortaleza que luego sería Cartago.

La muerte de Dido *de Claude Augustin Cayot. Museo del Louvre (París).*

Módulo 3

Bloques: Numérico. Relaciones y funciones

Buen Vivir: Cultura física y tiempo libre



Leonardo Da Vinci, El hombre de Vitrubio

El **número de oro,** representado por la letra griega Φ (fi) en honor al escultor griego Fidias, que participó en la construcción del Partenón de Atenas donde se utilizó esta proporción, es el número irracional:

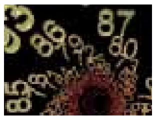
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848\ 204\ 586\ 834\ 365\ 638\ 117...$$

Este número aparece regularmente en la arquitectura, en la naturaleza, en el arte, en objetos de uso cotidiano...

— Entra en Internet y busca seis ejemplos en los que aparezca el número de oro.

— Calcula la relación entre los lados de una cédula de identidad.

Números reales
Polinomios



En este módulo aprenderás a relacionar los números racionales y los números irracionales con los reales, a *operar* y aproximar con los números reales y a determinar el error cometido. También *efectuarás* operaciones con polinomios.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Simplificar expresiones de números reales con la aplicación de las operaciones básicas.
- Resolver las cuatro operaciones básicas con números reales.
- Interpretar y utilizar los números reales en diferentes contextos, eligiendo la notación y la aproximación adecuadas en cada caso.
- Utilizar las TIC para realizar operaciones con cualquier tipo de expresión numérica.
- Desarrollar estrategias de cálculo mental y de estimación de cálculos con números reales.
- Calcular el error cometido en operaciones con aproximaciones de números reales.
- Simplificar polinomios con la aplicación de las operaciones y de sus propiedades.
- Representar polinomios de hasta segundo grado con material concreto.
- Factorizar polinomios y desarrollar productos notables.

Prerrequisitos

Recuerda

- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es la unión del conjunto de los decimales limitados y el de los decimales ilimitados periódicos.
- Un número es irracional si su expresión decimal es ilimitada y no periódica.
- Una aproximación decimal de un número es un número decimal sencillo próximo a su valor exacto. Las aproximaciones pueden efectuarse por defecto o por exceso.
- Una **expresión algebraica** es una serie de números y letras relacionados por los signos de las operaciones aritméticas.

$$a+b \qquad 2ab \qquad p^2+3q$$

- Propiedades de las potencias

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad a^1 = a$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

Evaluación diagnóstica

- Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales.

$$-\sqrt{11}\,;\ \frac{-2}{5};\ \frac{\pi}{3};\ -1{,}25;$$

$$1-\sqrt{2}\,;\ 6{,}34;\ -1{,}202\,002...$$

- Elige una cinta métrica que mida hasta los centímetros y razona: ¿Podrás medir exactamente 2,7 cm? ¿Y 2,73 cm? Justifica tus respuestas.
- Expresa los siguientes números en forma decimal.

$$\sqrt{2}\,;\ \frac{3}{26};\ \pi;\ 1+\frac{4}{5};\ 3\sqrt{10}$$

  — Clasifícalos en decimales limitados, ilimitados periódicos puros, ilimitados periódicos mixtos o ilimitados no periódicos.
- Calcula el doble de 4, el triple de 25 y la cuarta parte de 64.

  — ¿Cómo representarías el doble de un número cualquiera *a*? ¿Y el triple? ¿Y su cuarta parte?
- Calcula el valor que se obtiene al sustituir a por -1 y b por $\frac{1}{2}$ en la expresión $5a^2+3ab$.
- Indica la parte numérica y la parte literal de cada uno de los términos de la siguiente expresión algebraica.

$$4a+6ab-2ab^2$$

- Reduce los términos semejantes de cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

  a) $5a+2b-2a+4b^2-4b$

  b) $5xy+2x-2xy+4x$

Buen Vivir

Cultura física y tiempo libre

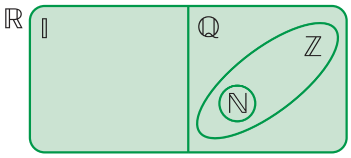
Art. 381.- El Estado protegerá, promoverá y coordinará la cultura física que comprende el deporte, la educación física y la recreación, como actividades que contribuyen a la salud, formación y desarrollo integral de las personas.

Constitución de la República del Ecuador, 2008.

1 El conjunto de los números reales

La necesidad de resolver numerosos problemas aritméticos y geométricos nos ha llevado a ir ampliando los conjuntos numéricos.

El conjunto formado por los números racionales y los irracionales recibe el nombre de **conjunto de los números reales** y se representa por $\mathbb{R}$.



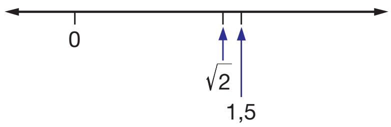
- Reales ($\mathbb{R}$)
  - Racionales ($\mathbb{Q}$)
    - Enteros ($\mathbb{Z}$)
      - Naturales ($\mathbb{N}$)
      - Enteros negativos
    - Fraccionarios
  - Irracionales ($\mathbb{I}$) = $\mathbb{Q}'$

Una vez representados los números racionales y los irracionales sobre una recta, ya no quedan puntos vacíos en ella. Los números reales la llenan por completo; de ahí el nombre de recta **real.**

1.1. Ordenación de los números reales

Puesto que los números reales pueden representarse sobre una recta, es posible ordenar el conjunto de los números reales siguiendo el mismo criterio que el establecido en el conjunto de los números racionales.

Observa la representación sobre una recta de los números reales $\sqrt{2}$ y 1,5.



Como 1,5 queda situado a la derecha de $\sqrt{2}$, concluimos que:

$$\sqrt{2} < 1{,}5$$

Dados dos números reales *a* y *b,* diremos que ***b* es mayor que *a*** si al efectuar su representación gráfica sobre la recta real, *b* queda situado a la derecha de *a*.

Actividades

1 Ordena los números reales de cada uno de estos pares.

a) $-\sqrt{2}$ y $-\dfrac{3}{2}$ b) π y $3{,}1\overset{\frown}{3}$ c) π y $\sqrt{10}$

2 Representa sobre la recta real y ordena de menor a mayor los números: $\sqrt{3}$; $\dfrac{-2}{3}$; 1; 3,1514; $-\sqrt{2}$; π.

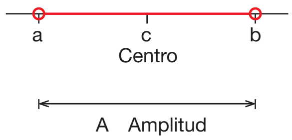
1.2. Intervalos de números reales

La ordenación de los números reales permite hablar del conjunto de estos números comprendidos entre dos de ellos, *a* y *b.*

Este conjunto se denomina **intervalo** de **extremos** *a* y *b.* Según si incluyen o no los extremos, los intervalos se clasifican en:

Intervalo cerrado	Intervalo abierto	Intervalo semiabierto	
			
[*a*, *b*] Conjunto de números reales comprendidos entre *a* y *b,* incluidos los extremos.	(*a*, *b*) Conjunto de números reales comprendidos entre *a* y *b,* sin incluir los extremos.	[*a*, *b*) Conjunto de números reales comprendidos entre *a* y *b,* incluido sólo el extremo *a.*	(*a*, *b*] Conjunto de números reales comprendidos entre *a* y *b,* incluido sólo el extremo *b.*

Observa que si el extremo está incluido en el intervalo, lo representamos mediante un pequeño círculo (●); si no está incluido, lo representamos mediante una pequeña circunferencia (○).



El punto que equidista de los dos extremos de un intervalo recibe el nombre de **centro del intervalo** y se calcula como la media aritmética de los valores de los extremos.

$$c = \frac{a + b}{2}$$

La distancia entre los dos extremos del intervalo se llama **amplitud del intervalo.** Se calcula como el valor absoluto de la diferencia entre los extremos.

$$A = d\,(a,b) = |\,a - b\,|$$

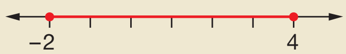
MUCHO OJO

Los intervalos son muy útiles para representar gráficamente los números irracionales.

$3{,}14 < \pi < 3{,}15$

Actividades

3 Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Representación	Intervalo
	[−2, 4]
	....
	....
	(−3, −1]
	[0, 4)

4 Explica qué tipos de intervalos existen según incluyan o no los extremos.

5 Escribe un intervalo abierto de centro −2 y amplitud igual a 8.

6 Representa los intervalos [−2, −1], (−2, −1), [−2, −1) y (−2, −1].

7 Representa los intervalos [−1, 3] y (2, 5). Colorea el trozo de recta común a ambos intervalos.

— ¿Qué intervalo representa el trozo de recta coloreado?

FÍJATE

Una **aproximación** de un número real es un número decimal próximo al valor exacto. Pueden efectuarse por exceso o por defecto.

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}41$$
$$\pi \simeq 3{,}1416$$

1.3. Aproximaciones y errores

Acabamos de ver que las expresiones decimales de los números irracionales constan de una parte entera y una parte decimal ilimitada no periódica.

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 562\,37\ldots$$
$$\pi = 3{,}141\,592\,653\ 5\ldots$$

A la hora de operar con estos números o dar el resultado de un ejercicio no podemos utilizar una cantidad infinita de cifras decimales, por lo que debemos tomar una **aproximación,** esto es, un número decimal próximo al valor exacto.

Por ejemplo, podemos efectuar las siguientes aproximaciones de los números reales $\sqrt{2}$ y π.

- $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ En este caso, se trata de una aproximación **por defecto,** pues hemos tomado un valor menor que el valor exacto.
- $\pi \simeq 3{,}14\,16$ En este caso, se trata de una aproximación **por exceso,** pues hemos tomado un valor mayor que el valor exacto.

LAS TIC Y LA MATEMÁTICA

La calculadora ofrece un resultado aproximado debido a que trabaja con un número limitado de decimales. Observa estos cálculos.

- 53 /45

Teclea:

5 3 ÷ 4 5 =

En la pantalla aparece:

1.177777778

Sin embargo, éste es un resultado aproximado. El valor exacto de $\frac{53}{45}$ es $1{,}1\hat{7}$, como puedes comprobar hallando la fracción generatriz de este número decimal.

- $\left(2\sqrt{2}\right)^2$

Teclea:

√ 2 = x 2 = x² =

En la pantalla aparece:

7.999999996

Sin embargo, el valor exacto, obtenido de forma analítica, es:

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2^2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

1.4. Truncamiento y redondeo

Conozcamos dos formas de tomar aproximaciones de números reales, el *truncamiento* y el *redondeo.*

Para aproximar un número real por **truncamiento,** suprimimos las cifras decimales, sin más, a partir de un orden de aproximación dado.

Ejemplos:

Número real	Orden de aproximación	Primera cifra suprimida	Aproximación por truncamiento
2,241 53...	Décimas	4	2,2
11,648 231…	Centésimas	8	11,64
0,003 74	Milésimas	7	0,003

Para aproximar un número real por **redondeo,** debemos tener en cuenta la siguiente regla:

Observamos la primera cifra que debe suprimirse de acuerdo con el orden de aproximación deseado.

- Si es menor que 5, la cifra inmediatamente anterior se deja igual.
- Si es mayor o igual que 5, añadimos una unidad a la cifra inmediatamente anterior.

Ejemplos:

Número real	Orden de aproximación	Primera cifra suprimida	Aproximación por redondeo
2,241 53...	Décimas	4	2,2
11,648 231…	Centésimas	8	11,65
0,003 74	Milésimas	7	0,004

1.5. Errores

Siempre que efectuamos una aproximación estamos cometiendo un error. Así, al aproximar $\sqrt{2}$ por 1,41 cometemos un error de:

$$|1{,}414\,213\,562\,37\ldots - 1{,}41| = 0{,}004\,213\,562\,37\ldots$$

En el cálculo del error hay que distinguir entre el *error absoluto* y el *error relativo.*

Error absoluto	Error relativo
Es el valor absoluto de la diferencia entre el valor aproximado y el valor exacto. $\text{Error absoluto} = \lvert \text{Valor aproximado} - \text{Valor exacto} \rvert$	Es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto. $\text{Error relativo} = \dfrac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor exacto}}$

Al aproximar $\sqrt{2}$ por 1,41 no es posible cuantificar exactamente el error absoluto, pero sí podemos afirmar que éste es menor que 0,005. Decimos que 0,005 es una **cota del error absoluto.**

Se acostumbra a expresar una aproximación mediante el valor aproximado seguido de una cota del error absoluto, de esta manera:

$$\sqrt{2} = 1{,}41 \pm 0{,}005$$

Esta expresión indica que el valor exacto de $\sqrt{2}$ se encuentra en el intervalo cuyos extremos son 1,41 – 0,005 y 1,41 + 0,005.

Al llevar a cabo **medidas** de cualquier magnitud física también cometemos un error. Generalmente, se admite como cota del error absoluto la resolución del instrumento de medida. Así, si medimos una longitud de 15,7 cm con una regla cuya resolución es de 1 mm, daremos como resultado de la medida (15,7 ± 0,1) cm.

Cifras significativas

Cuando se trabaja con números aproximados se distingue 12,5 de 12,50.

En el primero de ellos no conocemos la cifra de las centésimas. Decimos que tiene tres **cifras significativas** (1, 2 y 5).

En cambio, en el segundo, sabemos que la cifra de las centésimas es 0. En este caso tenemos cuatro cifras significativas (1, 2, 5 y 0).

ejemplo 1

Aproxima hasta las centésimas, por redondeo, el número decimal 5,298 175.

Determina el error absoluto y el error relativo que cometemos en la aproximación.

La primera cifra que debemos suprimir, la de las milésimas, es 8. Al ser mayor que 5, añadimos una unidad a la cifra inmediatamente anterior, el 9.

Así, $5{,}298\,175 \simeq 5{,}30$

El error absoluto es: $|5{,}30 - 5{,}298\,175| = 0{,}001\,825$

El error relativo es:

$$\frac{0{,}001825}{5{,}298175} = 0{,}000\,34$$

Actividades

8 El valor del número irracional $\sqrt{5}$ es 2,236 0679…
Escribe dos aproximaciones hasta las centésimas, una por truncamiento y otra por redondeo, indicando en ambos casos una cota del error absoluto.

9 Se han medido las longitudes de una mesa y de un puente, con estos resultados:

mesa: 75,5 ± 0,1 cm puente: 1 558 ± 0,5 m

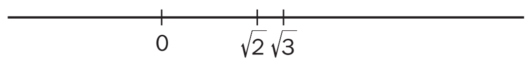
Compara el error absoluto y el error relativo de ambas medidas. ¿Cuál de las dos medidas es mejor? Razónalo.

2 Operaciones con números reales

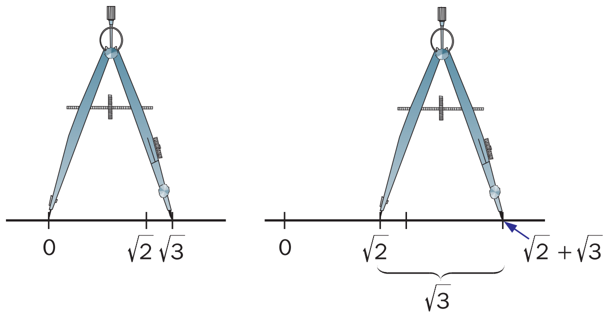
En caso de que los números reales sean racionales, ya sabes efectuar operaciones con ellos. Veamos ahora cómo operar con números reales cuando al menos uno de ellos es irracional.
Vamos a calcular $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Gráficamente es muy sencillo. Hemos de seguir estos pasos:

— Representamos gráficamente $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.



— Llevamos con el compás el segmento que representa a uno de ellos a continuación del otro.



Pero, ¿podemos obtener numéricamente el valor de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$?

Dado que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ tienen infinitas cifras decimales y es imposible manejarlas todas, nos vemos obligados a **tomar aproximaciones** de estos números, con lo cual las operaciones con números irracionales se reducen a operaciones con números racionales.

El resultado será también una aproximación decimal de un número irracional.

No debemos olvidar que un número no es igual a su aproximación y, por lo tanto, cada vez que utilizamos una aproximación cometemos un error.

Así pues, todas las aproximaciones y el trabajo con ellas deben efectuarse con mucho cuidado.

Actividades

10 Calcula gráficamente $\sqrt{2} + \sqrt{13}$.

11 Redondea $\sqrt{15}$ y $\sqrt{27}$ hasta las diezmilésimas. Calcula su suma y su producto.

12 Si tomamos $\pi \simeq 3,14$ y $\sqrt{8} \simeq 2,83$, calcula $\pi + \sqrt{8}$ y $\pi \cdot \sqrt{8}$.

Cuando realizamos operaciones con números reales, debemos aplicar los conocimientos sobre los números racionales e irracionales.

Adición y sustracción	Ejemplos
Para sumar o restar números reales, estos deben tener el mismo denominador. Si no es así, se reducen previamente a mínimo común denominador.	• $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 - 5\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ $\boxed{\textbf{m.c.m.} \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}}$ • $5 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $\boxed{\textbf{m.c.m.} \left(1, \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}}$
Multiplicación	**Ejemplos**
El producto de dos o más números reales, puede dar lugar a una fracción, si uno de estos es racional. • El numerador es el producto de los numeradores de cada uno de los términos. • El denominador es el producto de los denominadores de cada término.	• $5 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}}$ • $\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{6}}$
División	**Ejemplos**
La división de dos números reales, puede resultar en un número fraccionario, donde: • El numerador es el producto del numerador del primer número por el denominador del segundo número. • El denominador se obtiene multiplicando el denominador del primer número por el numerador del segundo.	• $\frac{-2}{\sqrt{2}} \div \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2 \cdot \sqrt{3}}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ • $\frac{7}{2} \div \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{7 \cdot \overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}}$

Actividades

13 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\frac{-2}{\pi} + \frac{3}{2\pi}$

c) $2\pi - \frac{2}{3}\pi$

d) $\frac{\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}}$

e) $\frac{\sqrt{5}}{\pi} \div \frac{\sqrt{15}}{\pi}$

f) $3\sqrt{3\pi} \div 9\sqrt{27\pi}$

FÍJATE

Notación de la división de números fraccionarios

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} =$$

$$= \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

3 Álgebra

Observa cómo expresamos en lenguaje algebraico cada una de las siguientes magnitudes:

El volumen de un cubo de arista *x:*	x^3
El área de un círculo de radio *x:*	πx^2
La longitud de una circunferencia de radio *x:*	$2\pi x$

Cada una de las expresiones algebraicas obtenidas consta de un único término cuya parte literal tiene una sola variable, *x,* elevada a un número natural. Estas expresiones son *monomios en una variable.*

Un **monomio** en una variable x es una expresión algebraica de la forma ax^n, en la que a es un número real y n un número natural o 0.

Dado el monomio ax^n, la parte numérica ***a*** es el **coeficiente** del monomio y el exponente ***n*** de la variable x es el **grado** del monomio en esa variable.

Grado $n \geqslant 0$

Coeficiente ← $\boxed{a}\,\boxed{x}^{\boxed{n}}$

Variable

Observa que $3x^0 = 3$, puesto que cualquier potencia de exponente 0 vale 1. Por lo tanto, los monomios de **grado 0** sólo constan de coeficiente.

Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal; por ejemplo, los monomios $\sqrt{2}\,x^5$ y $-4x^5$.

FÍJATE

El grado de un monomio con más de una variable, como por ejemplo $3x^2y^3$, se obtiene sumando todos los exponentes de las variables.

Así, diremos que el monomio $3x^2y^3$ es de grado 5, de grado 2 respecto de x y de grado 3 respecto de y.

De manera análoga a como hemos visto con los monomios en una variable, para que dos monomios con varias variables sean semejantes deben tener la misma parte literal; por ejemplo $-4zy^2x$ y $7xzy^2$.

Actividades

14 Escribe la variable, el coeficiente y el grado de los siguientes monomios.

$$45x^3 \qquad 18b^9 \qquad -25 \qquad \frac{3}{4}x^7$$

15 Clasifica en monomios semejantes:

$$12x^3,\ 6y^2,\ -3y^2,\ -25,\ \frac{3}{4}x^3,\ \sqrt{7}$$

16 Escribe tres monomios que tengan el mismo coeficiente y el mismo grado pero que no sean semejantes.

17 Razona si son ciertas las siguientes afirmaciones.

a) Dos monomios semejantes de grado 0 son siempre iguales.

b) Dos monomios con el mismo grado y el mismo coeficiente son semejantes o son iguales.

18 Expresa mediante un monomio:

a) El perímetro de un cuadrado de lado *a.*

b) El volumen de una esfera de radio *r.*

c) El área de un triángulo de base *b* y altura el doble de la base.

3.1. Operaciones con monomios

De la misma manera que podíamos sumar o restar los términos semejantes de las expresiones algebraicas, sumaremos o restaremos los monomios semejantes. Además, es posible multiplicarlos, dividirlos o elevarlos a una potencia.

A continuación, aprenderemos cómo efectuar estas operaciones con monomios.

Adición de monomios semejantes

Sumar $4x^2$ con $7x^2$

$$4x^2 + 7x^2 = (4 + 7)\,x^2 = 11\,x^2$$

Para sumar dos monomios semejantes, sumamos los coeficientes y dejamos la misma parte literal.

El resultado es un monomio semejante a los primeros.

$$a\,x^n + b\,x^n = (a + b)\,x^n$$

Sustracción de monomios semejantes

De $5x^2$ restar $8x^2$

$$5x^2 - 8x^2 = (5 - 8)\,x^2 = -3x^2$$

Para restar dos monomios semejantes, restamos los coeficientes y dejamos la misma parte literal.

El resultado es un monomio semejante a los primeros.

$$a\,x^n - b\,x^n = (a - b)\,x^n$$

Multiplicación de monomios

Multiplicar $-3x^5$ por $4x^2$

$$-3x^5 \cdot 4x^2 = (-3 \cdot 4) \cdot (x^5 \cdot x^2) =$$

$$= -12 \cdot x^{5+2} = -12\,x^7$$

Para multiplicar dos monomios, multiplicamos por un lado los coeficientes y por el otro las partes literales.

El resultado es un monomio cuyo grado es la suma de los grados de los dos primeros.

$$a\,x^m \cdot b\,x^n = (a \cdot b)\,x^{m+n}$$

División de monomios

Dividir $-3x^5$ entre $4x^2$

$$-3x^5 \div 4x^2 = \frac{-3}{4}x^{5-2} = \frac{-3}{4}x^3$$

Para dividir dos monomios, dividimos por un lado los coeficientes y por el otro las partes literales.

El resultado es un monomio cuyo grado es la diferencia de los grados de los dos primeros.

$$a\,x^m \div b\,x^n = \frac{a}{b}\,x^{m-n},\quad b \neq 0,\ m \geqslant n$$

Potencia de un monomio

Calcular una potencia de un monomio equivale a calcular el producto de un monomio por sí mismo tantas veces como indica el exponente de la potencia.

$$(3x^2)^4 = 3x^2 \cdot 3x^2 \cdot 3x^2 \cdot 3x^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = 3^4 \cdot (x^2)^4 = 81\,x^8$$

Para elevar un monomio a una potencia, elevamos el coeficiente y la parte literal a dicha potencia.

El resultado es un monomio cuyo coeficiente es igual a la potencia del coeficiente del monomio inicial y cuyo grado es igual al producto del grado del monomio inicial por el exponente de la potencia.

$$(a\,x^m)^n = a^n x^{m \cdot n}$$

Actividades

19 Calcula:

a) $\frac{-1}{3}x^5 + \frac{2}{3}x^5$

b) $4z^5 + (-3z^5)$

20 Efectúa las siguientes operaciones reduciendo términos semejantes.

a) $2x^3 - 4x^5 + 5x^3$

b) $x^2 - 4x^3 + 2x^2 + 5x^3$

21 Calcula:

a) $2y^5 + \frac{2}{3}y^5 - \frac{1}{9}y^5 + 5y^5$

b) $16a^3 - 4a^3 + 7a^3 - 5a^3$

c) $-x^2 - 2x^2 - 5x^2 + 7x^2$

d) $-7x^4 \cdot 3x^2$

e) $12a^3 \cdot 9a^2$

f) $25x^5 \div 5x^2$

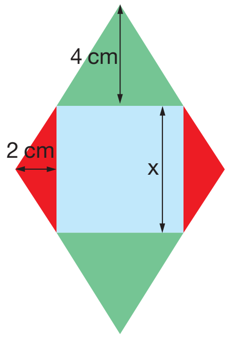
g) $12y^4 \div 3y$

h) $(2x^4)^3$

3.2. Polinomios

Observa el rombo de la derecha.

Podemos descomponerlo en un cuadrado y cuatro triángulos, iguales dos a dos.



El área del cuadrado es x^2, la de cada triángulo verde $\dfrac{x \cdot 4}{2} = 2x$, y la de cada triángulo rojo $\dfrac{x \cdot 2}{2} = x$.

Por lo tanto, el área del rombo será:

$$x^2 + 2 \cdot 2x + 2 \cdot x = x^2 + 6x$$

La expresión algebraica que hemos obtenido, $x^2 + 6x$, es una suma de monomios de igual variable. Esta expresión recibe el nombre de *polinomio* en una variable.

CONTRAEJEMPLO

La siguiente expresión no es un polinomio:

$$2x^{\frac{1}{2}} + x - 1$$

porque en $x^{\frac{1}{2}}$ el exponente no es un número natural.

Un **polinomio** en una variable x es una expresión algebraica que puede reducirse a la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, en la que $a_n, a_{n-1}, ... a_1, a_0$ son números reales y n es un número natural.

En general, un polinomio se designa por una letra mayúscula y, entre paréntesis, la variable correspondiente. Por ejemplo: $P(x)$, que se lee *p de x; Q (y)*, que se lee *q de y...*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

FÍJATE

Un **monomio** es un polinomio formado por un solo término.

Un **binomio** es un polinomio formado por dos términos.

Un **trinomio** es un polinomio formado por tres términos.

Cada uno de los sumandos o monomios que forman un polinomio son **términos** de dicho polinomio.

El término de grado cero, a_0, se denomina **término independiente.**

3.3. Valor numérico de un polinomio

El valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$ es el número que se obtiene al sustituir la variable x por el número a. Se representa por $\boldsymbol{P(a)}$.

Si consideramos el polinomio $P(x) = 7x^3 + 2x^2 - x + 4$, su valor numérico para $x = 2$ es:

$$P(2) = 7 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 + 4 = 66$$

@

Utiliza el *applet* (aplicación) de la página http://mathforum.org/te/exchange/hosted/palu/polynomialroots/EducationApplets.html para encontrar las raíces del polinomio $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

El número real que hace que el valor numérico del polinomio sea 0 se denomina **cero** o **raíz** del polinomio.

En el polinomio que estamos considerando, –1 es un cero del polinomio ya que:

$$P(-1) = 7 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - (-1) + 4 = -7 + 2 + 1 + 4 = 0$$

Actividades

22 Indica si las siguientes expresiones son polinomios en una variable.

a) $5x^{-2} + 3x^3$

b) $\dfrac{1}{x} + 2x^4$

c) $5y^2 + 3x^2 - 3x^3$

d) $5a^2 + \sqrt{3}\, a^{23}$

23 Dado el polinomio $P(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5x + 1$, calcula su valor numérico para $x = 2$.

24 Señala si los valores propuestos son raíces del polinomio $Q(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$.

a) $x = 2$ b) $x = -3$ c) $x = 0$

3.4. Grado de un polinomio

Fijémonos en el polinomio $P(x) = 2x^5 - \sqrt{6}\,x^3 - 2x^2 + 8$.

Vemos que está formado por cuatro términos cuyos grados son respectivamente 5, 3, 2 y 0.

El **grado de un polinomio** es el **mayor de los grados** de sus términos.

Por lo tanto, el grado del polinomio $2x^5 - \sqrt{6}\,x^3 - 2x^2 + 8$ es 5.

3.5. Polinomios ordenados y reducidos

Dado un polinomio, podemos ordenar sus monomios según su grado y, si existen monomios semejantes, deben reducirse.

Observa cómo ordenamos y simplificamos el siguiente polinomio:

$$P(x) = 2x^2 - x^3 + 4x - 5x^3 + 3x^2 - 12$$
$$P(x) = -x^3 - 5x^3 + 2x^2 + 3x^2 + 4x - 12$$
$$P(x) = -6x^3 + 5x^2 + 4x - 12$$

El polinomio que hemos obtenido $P(x) = -6x^3 + 5x^2 + 4x - 12$ es un polinomio en **forma reducida** y **ordenado** en orden decreciente. De esta manera, el grado del polinomio coincide con el grado del primer monomio.

MUCHO OJO

Al trabajar con expresiones algebraicas es frecuente efectuar los siguientes **productos notables:**

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Los estudiarás en el siguiente apartado.

3.6. Polinomios completos e incompletos

Considera los siguientes dos polinomios de grado 3:

$$P(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x - 7 \quad \text{y} \quad Q(x) = -2x^3 + \sqrt{2}\,x + 4$$

Observa que el polinomio $P(x)$ tiene términos de cada uno de los grados menores que 3, mientras que al polinomio $Q(x)$ le falta el término de segundo grado. Diremos que el polinomio $P(x)$ es **completo** y que el polinomio $Q(x)$ es **incompleto.**

Actividades

25 Justifica si son ciertas las siguientes afirmaciones.

a) Un polinomio completo de grado 4 siempre tiene, al menos, cinco términos.

b) Un polinomio incompleto de grado 4 siempre tiene menos de cinco términos.

26 Escribe el grado y el término independiente de cada uno de estos polinomios.

a) $P(x) = -6 + 3x^2 - 3x^3$

b) $Q(y) = 5y^5 - 3y^3 - 4y^2$

c) $R(x) = 7x^6 + 2x^2 - 3x$

27 Reduce y ordena los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x^2 + 2x^3 - 4x^2 + 2$

b) $Q(x) = 3x^2 + 4x - 5 + \dfrac{7}{2}x^2 - 6x - 6x^2 + 10$

c) $R(x) = 7x - 5x^4 + 4x^2 + 5x - 2 + \dfrac{4}{7}x + 3x^2$

d) $S(x) = 4x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{3}x + 4x^3 - 2x + 7$

— A continuación, indica si son completos o incompletos.

3.7. Representación concreta de polinomios hasta grado 2

Usando material concreto podemos representar varios términos de una expresión algebraica, para luego agrupar sus términos.

ejemplo 2

Cuenta los términos en el siguiente polinomio:

a) $3x^2 - x + 2 =$

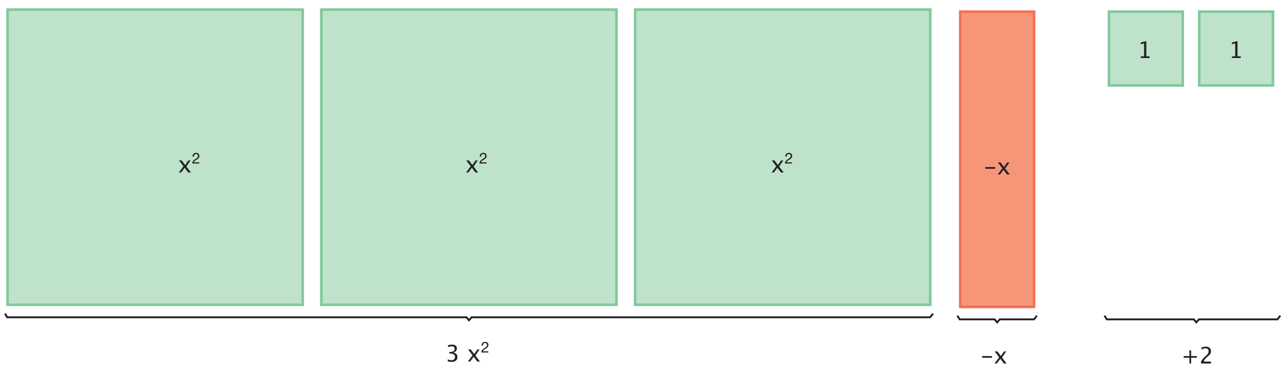
Tenemos un polinomio con tres términos o monomios: $3x^2$, $-x$ y 2

Al representar un polinomio con material concreto, debemos representar cada término de la expresión algebraica con el símbolo que lo precede.

ejemplo 3

Representa con material concreto el polinomio: $3x^2 - x + 2$.

— A los términos que tengan signo positivo los representamos con verde, mientras que a los términos con signo negativo los representamos con rojo.



Actividades

28 Representa con material concreto los siguientes polinomios:

a) $-x^2 + 2x - 6$

b) $y^2 + 2y + 2$

c) $3x + 3x^2 - 3$

d) $-6 - 2x^2 - 1$

29 Usando material concreto para dos variables, representa los siguientes polinomios:

a) $-2x^2 + 3x - 6y - y^2$

b) $-x^2 + 2y + 2x$

c) $x + 3y^2 - 3 + y$

d) $4y^2 - x^2 - 1$

e) En grupo, escriban dos polinomios y represéntenlos con material concreto.

Ahora vamos a realizar las operaciones de suma y resta entre términos de un polinomio, para lo cual debemos tener en cuenta las siguientes condiciones:

— Dos representaciones de distinto color, una positiva y una negativa, se anulan, siempre que corresponda a la misma variable.

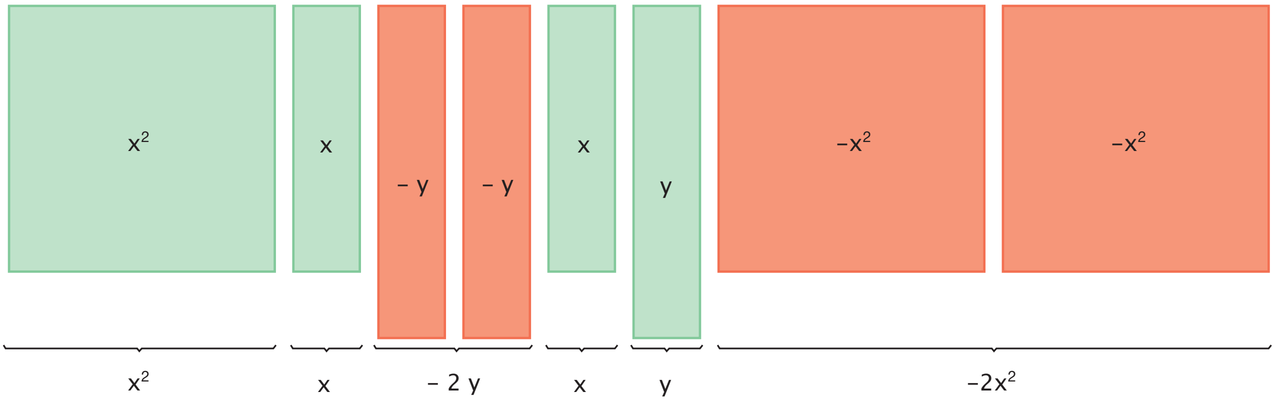
— Una unidad numérica positiva se anula con una unidad numérica negativa.

— El material concreto de una variable no tiene ninguna relación con el material concreto de otra variable.

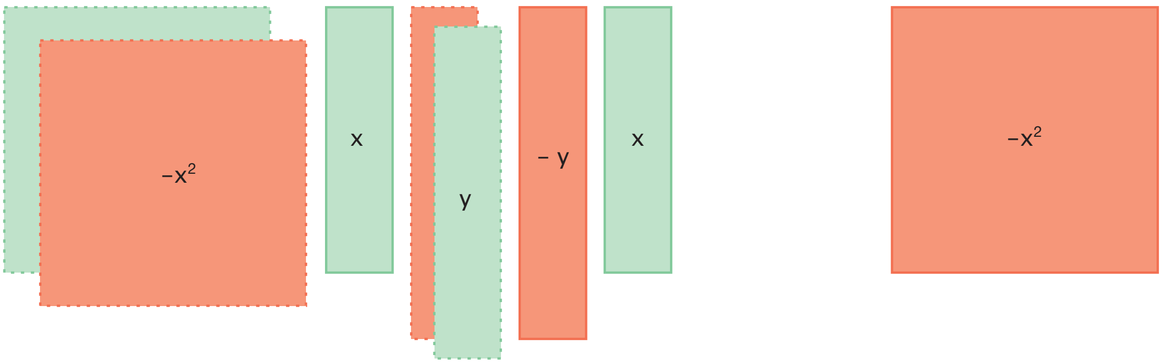
ejemplo **4**

Simplifica el siguiente polinomio $x^2 + x - 2y + x + y - 2x^2$ *:*

a) En primer lugar, representamos el polinomio con el material concreto:



b) A continuación, usando las condiciones descritas anteriormente, unimos las representaciones con distinto color que correspondan a la misma variable.



c) Finalmente, escribimos el resultado de las operaciones realizadas: $-x^2 + 2x - y$

Actividades

30 Usando material concreto, simplifica los siguientes polinomios:

a) $2x^2 + 3x - x - 3x^2$

b) $-3y^2 + 6x - 4x + 3y^2$

c) $-5y - 2y^2 + 6y - 3y^2 - y$

d) $2y^2 + 2x^2 + x^2 - 3y^2$

e) $-4 - 5x + y - x + 3$

f) $3y + 2y + 2x + 7x$

4 Operaciones con polinomios

Sepamos cómo se efectúan algunas operaciones con polinomios.

Adición de polinomios

Procedimiento

Para sumar dos polinomios, sumamos los monomios semejantes de cada uno de ellos:

— Escribimos los dos polinomios, uno debajo del otro, de modo que los monomios semejantes estén en la misma columna.

— Sumamos los monomios semejantes.

El resultado es un polinomio de grado menor o igual que el mayor de los grados de los polinomios sumandos.

Ejemplo

Suma los polinomios $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 5$ *y* $Q(x) = -3x^3 + 6x + 14$.

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & -\,7x^2 & +\,3x & +\ \ 5 \\ -3x^3 & & +\,6x & +\,14 \\ \hline -\ \ x^3 & -\,7x^2 & +\,9x & +\,19 \end{array}$$

$P(x) + Q(x) = -x^3 - 7x^2 + 9x + 19$

Sustracción de polinomios

Procedimiento

Para restar dos polinomios, restamos los monomios semejantes de cada uno de ellos:

— Escribimos los dos polinomios uno debajo del otro de modo que los monomios semejantes estén en la misma columna.

— Cambiamos el signo de todos los monomios del sustraendo y a continuación sumamos los semejantes.

El resultado es un polinomio de grado menor o igual que el mayor de los grados de los polinomios iniciales.

Ejemplo

Resta los polinomios $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 5$ *y* $Q(x) = -3x^3 + 6x + 14$.

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & -\,7x^2 & +\,3x & +\ \ 5 \\ 3x^3 & & -\,6x & -\,14 \\ \hline 5x^3 & -\,7x^2 & -\,3x & -\ \ 9 \end{array}$$

$P(x) - Q(x) = 5x^3 - 7x^2 - 3x - 9$

Actividades

31 Razona si son correctas las siguientes afirmaciones.

a) Si dos polinomios tienen igual grado, el polinomio suma de ambos tiene ese mismo grado.

b) La suma o la resta de dos polinomios de grado 3 puede ser un polinomio de grado 4.

c) Al realizar la resta de dos polinomios de grado 4 no puede obtenerse un polinomio de grado 3.

32 Recuerda el concepto de opuesto de un número. Teniendo en cuenta este concepto, completa en tu cuaderno esta afirmación: «Para .... dos polinomios se suma el primero de ellos con el .... del segundo».

Compruébalo con un ejemplo.

33 Dados los polinomios $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7$ y $Q(x) = 4x^2 + 3x - 2$, calcula:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

c) $Q(x) - P(x)$

34 Completa en tu cuaderno esta suma de polinomios.

$(2x^4 + 5x^3 - \ldots\ldots + 3) + (\ldots\ldots + \ldots\ldots + 5x - \ldots\ldots) +$
$+ (\ldots\ldots x^2 - x + 1) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 1$

35 Completa en tu cuaderno esta resta de polinomios.

$(\ldots\ldots - 5x^2 + \ldots\ldots - 3) - (-5x^3 - \ldots\ldots + \ldots\ldots) =$
$= 7x^5 + \ldots\ldots - 3x^2 + 6x - 8$

Multiplicación de un polinomio por un monomio

Procedimiento

Para multiplicar un polinomio por un monomio, multiplicamos el monomio por cada uno de los monomios del polinomio:

— Escribimos el monomio debajo del polinomio.

— Multiplicamos el monomio por cada uno de los monomios del polinomio.

El resultado es un polinomio de grado igual a la suma de los grados del polinomio y el monomio.

Ejemplo

Multiplica el polinomio $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 5$ *y el monomio* $M(x) = 3x^3$.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 3x + 5 \\ 3x^3 \\ \hline 6x^6 - 21x^5 + 9x^4 + 15x^3 \end{array}$$

$P(x) \cdot M(x) = 6x^6 - 21x^5 + 9x^4 + 15x^3$

Multiplicación de polinomios

Procedimiento

Para multiplicar dos polinomios, multiplicamos el primer polinomio por cada uno de los monomios del segundo y después sumamos los polinomios resultantes:

— Escribimos los dos polinomios uno debajo del otro.

— Debajo, y en filas diferentes, escribimos los polinomios resultantes de multiplicar el primer polinomio por cada uno de los monomios de que consta el segundo polinomio.

— Sumamos los polinomios obtenidos.

El resultado es un polinomio de grado igual a la suma de los grados de los polinomios iniciales.

Ejemplo

Multiplica los polinomios $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 5$ *y* $Q(x) = -3x^3 + 6x + 14$.

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & & 2x^3 & -\ 7x^2 & +\ 3x & +\ 5 \\ & & & -3x^3 & & +\ 6x & +\ 14 \\ \hline & & & 28x^3 & -\ 98x^2 & +\ 42x & +\ 70 \\ & & 12x^4 & -\ 42x^3 & +\ 18x^2 & +\ 30x & \\ -6x^6 & +\ 21x^5 & -\ 9x^4 & -\ 15x^3 & & & \\ \hline -6x^6 & +\ 21x^5 & +\ 3x^4 & -\ 29x^3 & -\ 80x^2 & +\ 72x & +\ 70 \end{array}$$

$P(x) \cdot Q(x) = -6x^6 + 21x^5 + 3x^4 - 29x^3 - 80x^2 + 72x + 70$

Actividades

36 Considera los polinomios $P(x) = -5x^2 + 2x - 3$, $Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7$ y $R(x) = 4x^2 + 3$. Efectúa las operaciones indicadas.

a) $4\,P(x) + 3\,Q(x)$

b) $P(x) - 2\,R(x)$

c) $P(x) \cdot R(x)$

d) $P(x) \cdot Q(x)$

— Antes de resolver las operaciones, indica el grado del polinomio resultante.

37 Efectúa estas operaciones.

a) $(x^2 + 2) \cdot (x^2 + 2)$

b) $(x + 2)^2$

c) $(3x^3 - 2) \cdot (3x^3 + 2)$

d) $(x^2 - 3)^2$

38 Completa en tu cuaderno la siguiente multiplicación de un polinomio por un monomio.

$(2x^4 - \ldots\ldots - x + 2) \cdot (\ldots\ldots) =$

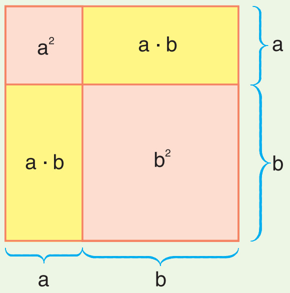
$= 4x^6 - 10x^4 - \ldots\ldots + \ldots\ldots$

39 Completa en tu cuaderno la siguiente multiplicación de polinomios.

$$\begin{array}{rrrrr} & & \ldots\ x^2 & -\ \ldots\ x & +\ \ldots \\ & & \ldots\ldots & +\ \ldots\ x & +\ \ldots \\ \hline & & \ldots\ x^2 & -\ 15x & +\ \ldots \\ & \ldots\ x^3 & -\ 30x^2 & +\ \ldots\ x & \\ \ldots\ldots - \ldots\ldots & +\ \ldots\ x^3 & & & \\ \hline \ldots\ldots - \ldots\ldots & +\ 13x^3 & -\ 24x^2 & -\ 9x & +\ 3 \end{array}$$

FÍJATE

El resultado de un producto notable también puede obtenerse a partir de un método geométrico sencillo. Veamos, por ejemplo, el cuadrado de una suma.



El área del cuadrado grande es $(a + b)^2$. Pero también es igual a la suma de las áreas de los dos cuadrados pequeños de lados *a* y *b*, y de los dos rectángulos de dimensiones *a* y *b*.

$$(a + b)^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + a\,b + a\,b =$$
$$= \mathbf{a^2 + 2\,a\,b + b^2}$$

4.1. Productos notables

Al trabajar con expresiones algebraicas es frecuente encontrarse con los siguientes productos:

$$(a + b)^2 \qquad (a - b)^2 \qquad (a + b) \cdot (a - b)$$

Por ello, resulta conveniente conocer sus resultados. Éstos pueden obtenerse aplicando la propiedad distributiva, como veremos a continuación.

- **Cuadrado de una suma**

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + a\,b + b^2 + a\,b = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

El **cuadrado** de una **suma** es igual al cuadrado del primero más el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2}$$

- **Cuadrado de una diferencia**

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - a\,b + b^2 - a\,b = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

El **cuadrado** de una **diferencia** es igual al cuadrado del primero menos el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2}$$

- **Suma por diferencia**

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - a\,b + a\,b + b^2 = a^2 - b^2$$

El **producto** de una **suma** por una **diferencia** es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$$\mathbf{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$$

Actividades

40 Efectúa:

a) $(x + 4)^2$ b) $(a - 5)^2$ c) $(a + 2) \cdot (a - 2)$ d) $(x + y) \cdot (x - y)$

41 Desarrolla los cuadrados siguientes.

a) $(2 + 3\,x)^2$ b) $(2\,a\,b + 3\,a)^2$ c) $(2\,a - b)^2$ d) $(2\,x\,y\,z - 1)^2$

42 Expresa como cuadrado de una suma o una diferencia.

a) $1 + 2\,x + x^2$ b) $9 + 6\,x + x^2$ c) $4 - 4\,x + x^2$ d) $y^2 - 6\,x\,y + 9\,x^2$

43 Escribe como diferencia de cuadrados.

a) $(x + 2\,y) \cdot (x - 2\,y)$ b) $(a\,b + 2\,c) \cdot (a\,b - 2\,c)$

44 Completa:

a) $(\ldots\ldots + x\,y) \cdot (\ldots\ldots - x\,y) = 4 - x^2 y^2$ b) $(\ldots\ldots + \ldots\ldots) \cdot (a\,b - \ldots\ldots) = a^2{}_{\ldots\ldots}{}^2 - 9$

Otros productos de polinomios que aparecen comúnmente en varios ejercicios de matemática son:

$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $\quad$ $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$(a + b)^3$ $\quad$ $(a - b)^3$

Usando las propiedades de multiplicación que conocemos, es posible conocer el resultado de estas expresiones.

1. Producto de una suma por un trinomio de la forma $a^2 - ab + b^2$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3$$

El producto de una suma por un trinomio de la forma $\boldsymbol{a^2 - ab + b^2}$ es igual al cubo de la primera variable más el cubo de la segunda.

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

2. Producto de una diferencia por un trinomio de la forma $a^2 + ab + b^2$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - b^3$$

El producto de una diferencia por un trinomio de la forma $\boldsymbol{a^2 + ab + b^2}$ es igual al cubo de la primera variable menos el cubo de la segunda.

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

3. Cubo de una suma

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2\\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

El cubo de una suma es igual al cubo de la primera variable más el triple producto del cuadrado de la primera por la segunda, más el triple producto de la primera por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

4. Cubo de una diferencia

$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= (a - b)(a - b)^2\\ &= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)\\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

El cubo de una diferencia es igual al cubo de la primera variable menos el triple producto del cuadrado de la primera por la segunda, más el triple producto de la primera por el cuadrado de la segunda, menos el cubo de la segunda.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Actividades

45 Resuelve los siguientes productos.

a) $(5 + b)(25 - 5a + a^2)$

b) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

c) $(b + 2)(b^2 - 2b + 4)$

d) $(5 + z)^3$

e) $(c + 3) \cdot (c + 3)^2$

f) $(3 - c)^3$

4.2. División de polinomios

Observa ahora la forma en que procederemos para dividir polinomios.

Procedimiento	Ejemplo
Escribimos los dos polinomios ordenados según las potencias decrecientes de x. Si el polinomio dividendo es incompleto, dejamos espacios en blanco correspondientes a los términos que faltan.	*Divide el polinomio $3x^5 + 2x^3 - x^2 - 4$ entre el polinomio $x^3 + 2x^2 + 1$.* $3x^5 \quad + 2x^3 - x^2 \quad - 4 \quad \lfloor\, x^3 + 2x^2 + 1$
Dividimos el primer monomio del dividendo (en este caso $3x^5$) entre el primer monomio del divisor. Multiplicamos el cociente obtenido por el divisor y escribimos el opuesto del resultado.	$3x^5 \quad + 2x^3 - x^2 \quad - 4 \quad \lfloor\, x^3 + 2x^2 + 1$ $-3x^5 - 6x^4 \quad - 3x^2 \qquad 3x^2$
Restamos el producto obtenido del dividendo. Ello equivale a sumar el opuesto.	$3x^5 \quad + 2x^3 - x^2 \quad - 4 \quad \lfloor\, x^3 + 2x^2 + 1$ $-3x^5 - 6x^4 \quad - 3x^2 \qquad 3x^2$ $- 6x^4 + 2x^3 - 4x^2$
Se baja el siguiente término del dividendo, en nuestro caso no hay, y se repite el mismo proceso.	$3x^5 \quad + 2x^3 - x^2 \quad - 4 \quad \lfloor\, x^3 + 2x^2 + 1$ $-3x^5 - 6x^4 \quad - 3x^2 \qquad 3x^2 - 6x$ $- 6x^4 + 2x^3 - 4x^2$ $6x^4 + 12x^3 \quad + 6x$
El proceso continúa hasta que se obtiene un resto de grado menor que el grado del divisor. En el ejemplo, el grado del divisor es 3 y hemos obtenido un resto de grado 2.	$3x^5 \quad + 2x^3 - x^2 \quad - 4 \quad \lfloor\, x^3 + 2x^2 + 1$ $-3x^5 - 6x^4 \quad - 3x^2 \qquad 3x^2 - 6x + 14$ $- 6x^4 + 2x^3 - 4x^2$ $6x^4 + 12x^3 + \quad 6x$ $14x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ $- 14x^3 - 28x^2 \quad - 14$ $- 32x^2 + 6x - 18$

Observa que el grado del cociente es igual a la diferencia entre los grados del dividendo y el divisor.

Como en toda división numérica, en la división de polinomios también se verifica la igualdad:

Dividendo = divisor · cociente + resto $\qquad P(x) \ \lfloor\, Q(x)$

$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$ $\qquad R(x) \quad C(x)$

Actividades

46 Efectúa la siguiente división de polinomios.

$(2x^4 - 5x^3 - 7x + 5) \div (x^2 - 2x + 2)$

— Comprueba que se verifica la igualdad:

Dividendo = divisor · cociente + resto

47 Efectúa estas divisiones.

a) $(x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x + 12) \div (x^2 + x - 6)$

b) $(-2x^3 + 3x - 5) \div (x^2 + x - 2)$

c) $(2x^4 + 22x^3 - 58x^2 - 2x - 40) \div (x^2 + 6x - 5)$

Regla de Ruffini

Vamos a estudiar la división de polinomios en caso de que el polinomio divisor sea de la forma $x - a$, en la que a es un número real.

Observa en el ejemplo de la derecha la división del polinomio $P(x) = 6x^3 - 4x^2 + 2$ entre el polinomio $Q(x) = x - 3$.

Este tipo de divisiones puede realizarse de una forma más simple y rápida aplicando la llamada regla de *Ruffini.*

Veamos cómo se utiliza esta regla para efectuar esta misma división.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & -4x^2 & & +2 & x-3 \\
\cline{5-5}
-6x^3 & +18x^2 & & & 6x^2+14x+42 \\
\cline{1-2}
 & 14x^2 & & & \\
 & -14x^2 & +42x & & \\
\cline{2-3}
 & & 42x & +2 & \\
 & & -42x & +126 & \\
\cline{3-4}
 & & & 128 &
\end{array}
$$

Procedimiento	Ejemplo
Escribimos los coeficientes de los términos del dividendo uno a continuación del otro. Si el polinomio dividendo es incompleto, ponemos un 0 en el lugar correspondiente a cada término que falte.	*Divide $6x^3 - 4x^2 + 2$ entre $x - 3$.* $\begin{array}{rrrr} 6 & -4 & 0 & 2 \end{array}$
Escribimos el término independiente del divisor cambiado de signo a la izquierda de estos coeficientes.	$\begin{array}{r\|rrrr} & 6 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & & & & \\ \hline \end{array}$
Bajamos el primer coeficiente, 6, que se multiplica por 3 y el resultado, 18, se suma al segundo coeficiente del dividendo.	$\begin{array}{r\|rrrr} & 6 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & & 18 & & \\ \hline & 6 & 14 & & \end{array}$
La suma obtenida, 14, se multiplica por 3 y el resultado se suma al tercer coeficiente del dividendo.	$\begin{array}{r\|rrrr} & 6 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & & 18 & 42 & \\ \hline & 6 & 14 & 42 & \end{array}$
Continuamos este proceso hasta que se acaben los coeficientes de los términos del polinomio dividendo.	$\begin{array}{r\|rrrr} & 6 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & & 18 & 42 & 126 \\ \hline & 6 & 14 & 42 & 128 \end{array}$
El último resultado obtenido, 128, es el resto de la división, los restantes (6, 14, 42) son los coeficientes del polinomio cociente. Tendremos en cuenta que el grado del cociente es inferior en una unidad al grado del dividendo, pues el divisor es de grado 1.	$R = 128$ $C(x) = 6x^2 + 14x + 42$

Puedes observar que los rectángulos resaltados en rojo encierran los mismos números en los dos métodos utilizados para efectuar la división, en este caso con un proceso sintético.

Actividades

48 Halla los cocientes y los restos de estas divisiones de polinomios por dos procedimientos diferentes.

a) $(x^3 - 4x^2 + 9x + 18) \div (x + 2)$

b) $(x^4 + x^3 - 18x^2 - 16x + 32) \div (x - 4)$

49 Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de cada una de estas divisiones.

a) $(5x^3 + 4x^2 - 2x + 7) \div (x - 2)$

b) $(-x^4 + 12x^3 - 4x^2 - 10) \div (x + 5)$

4.3. Divisibilidad de polinomios

Ya conoces los conceptos de múltiplo y de divisor en el conjunto de los números naturales. Vamos a extenderlos ahora al caso de los polinomios.

4.4. Múltiplos y divisores

Considera la siguiente igualdad en la que a, b y c son números naturales.

$$a \cdot b = c$$

A partir de esta igualdad se obtiene la siguiente división exacta:

$$c \div a = b$$

Recuerda que en este caso decimos que:

- c es múltiplo de a.
- a es divisor de c o c es divisible por a.

De manera análoga, podemos definir los conceptos de múltiplo y divisor en el conjunto de los polinomios.

Observa el producto de los polinomios $A(x) = 2x + 1$ y $B(x) = x - 2$ cuyo resultado es el polinomio $C(x) = 2x^2 - 3x - 2$.

$$\begin{array}{r} 2x + 1 \\ x - 2 \\ \hline -4x - 2 \\ 2x^2 + x \phantom{{}-2} \\ \hline 2x^2 - 3x - 2 \end{array} \qquad C(x) = A(x) \cdot B(x)$$

Hemos obtenido el polinomio $C(x)$ al multiplicar el polinomio $A(x)$ por otro polinomio $B(x)$.

Decimos que $C(x)$ es múltiplo de $A(x)$.

> Un polinomio es **múltiplo** de otro si se obtiene multiplicando este último por un polinomio.

Puesto que $A(x) \cdot B(x) = C(x)$, si efectuamos la división $C(x) \div A(x)$ nos dará exacta y su cociente ha de ser igual al polinomio $B(x)$.

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^2 & -3x & -2 & 2x+1 \\ \cline{4-4} -2x^2 & -x & & x-2 \\ \cline{1-2} & -4x & -2 & \\ & 4x & +2 & \\ \cline{2-3} & & 0 & \end{array}$$

$$C(x) \div A(x) = B(x)$$

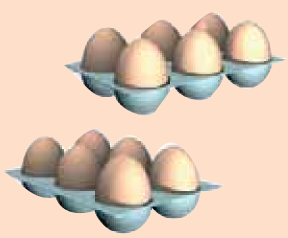
Decimos que $A(x)$ es divisor de $C(x)$ o que $C(x)$ es divisible por $A(x)$.

> Un polinomio es **divisor** de otro si, al dividir el segundo entre el primero, la división es exacta.

MUCHO OJO

Puesto que $2 \cdot 6 = 12$, podemos decir:

- 12 es múltiplo de 2.
- 12 es múltiplo de 6.
- 2 es divisor de 12.
- 6 es divisor de 12.
- 12 es divisible por 2.
- 12 es divisible por 6.



4.5. Teorema del resto

Veamos ahora un método para hallar el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre $x - a$ sin necesidad de realizarla.

Dados dos polinomios $P(x)$ y $D(x)$, se establece un proceso que nos permite encontrar polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que:

$P(x) = Q(x) \,.\, D(x) + R(x)$, con grado de $R(x)$ menor que grado de $D(x)$.

Los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ se denominan el cociente y el residuo respectivamente de la división de $P(x)$ por $D(x)$. El polinomio $P(x)$ se denomina el dividendo y el polinomio $D(x)$ se denomina el divisor.

El residuo de la división de un polinomio $P(x)$ de grado mayor o igual que 1 por el polinomio $(x\text{-}a)$ es $P(a)$, es decir: $P(x) = Q(x)\,(x\text{-}a) + P(a)$.

Observa en el margen la división del polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ entre $x - 3$. El resultado obtenido nos permite escribir:

	1	5	–2	–24
3		3	24	66
	1	8	22	42

$$P(x) = (x - 3) \cdot (x^2 + 8x + 22) + 42$$

Al sustituir en esta igualdad x por 3; es decir, al calcular el valor numérico de $P(x)$ para $x = 3$ se obtiene:

$$P(3) = (3 - 3) \cdot (3^2 + 8 \cdot 3 + 22) + 42$$

No es necesario calcular el segundo paréntesis, puesto que está multiplicado por 0.

$$P(3) = 0 \cdot (3^2 + 8 \cdot 3 + 22) + 42 = 0 + 42$$

$$P(3) = 42$$

De este modo, se demuestra que el valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = 3$ es igual al resto de la división de $P(x)$ entre $x - 3$.

El resultado obtenido es válido en general y se conoce como **teorema del resto**.

> El **resto** de la división del polinomio $P(x)$ entre $x - a$ es igual al **valor numérico** del polinomio $P(x)$ para $x = a$.

	1	5	–2	–24
–4		–4	–4	24
	1	1	–6	0

Observa que, al dividir el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ entre $x + 4$, obtenemos 0 de resto. Por lo tanto, el valor numérico del polinomio para $x = -4$ es 0.

Dicho de otro modo, como $P(x)$ es divisible por $x + 4$, podemos concluir que -4 es una raíz de $P(x)$.

> Si el polinomio $P(x)$ es divisible por $x - a$, a es una raíz del polinomio $P(x)$.

MUCHO OJO

El número real a es un **cero** o **raíz** del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$.

Actividades

50 Utiliza la regla de Ruffini para averiguar si los siguientes polinomios son divisibles por $x + 5$.

a) $x^3 + 10x^2 + 3x - 54$

b) $2x^4 + 3x^3 - 35x^2 + 9x + 45$

c) $3x^4 + 2x^3 - 49x^2 + 76x - 20$

51 Escribe un polinomio que sea simultáneamente múltiplo de $x + 4$ y de $2x^2 + 3x - 2$.

52 Halla el valor numérico de $3x^3 + 4x^2 - 17x - 6$ para los siguientes valores de la variable.

a) $x = 5$ b) $x = -3$ c) $x = -4$

53 Justifica la siguiente afirmación utilizando la regla de Ruffini: *Para que un polinomio de coeficientes enteros,* P(x), *sea divisible por* x – a, a *debe ser divisor del término independiente de* P(x).

— ¿Es divisible $x^2 + 3x - 15$ por $x - 4$?

— El polinomio $x^2 + 3x - 15$, ¿puede ser divisible por $x - 3$? Compruébalo.

— El polinomio $2x^2 - 5x - 6$, ¿puede ser divisible por $x - 3$? Compruébalo.

54 ¿Puede ser $x = 6$ raíz del polinomio $x^2 + 3x - 15$?

5 Factorización

Al igual que los números compuestos (tienen más de dos divisores diferentes), los polinomios con varios divisores pueden expresarse como producto de otros polinomios de grado menor.

Ejemplos:

Al descomponer 720 en factores primos se tiene $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

Al descomponer $2x^2 - 3x - 2$ en factores primos se tiene

$$2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1) \cdot (x - 2)$$

Ya en la práctica, siempre que sea posible, debemos descomponer los polinomios en factores (polinomios) de primer grado, en factores primos, posteriormente estos facilitan la simplificación.

MUCHO OJO

Las identidades notables que puedes utilizar en la descomposición factorial de los polinomios son:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Descomponer en factores o **factorizar** un polinomio es el proceso que permite expresarlo como la **multiplicación de otros polinomios** del menor grado posible.

Revisemos algunos de los métodos ya estudiados para factorizar un polinomio.

Sacar factor común

Ya has adquirido experiencia en obtener los factores comunes de polinomios. La propiedad distributiva (recolectiva) de los números reales, en la forma $ab + ac = a\,(b + c)$ es muy importante porque justifica todo el proceso. Dado el polinomio en x, $P(x) = 12x^2 + 30x$, si extraemos los factores comunes a todos los términos se tiene: $P(x) = 12x^2 + 30x = 6x \cdot 2x + 6x \cdot 5$, es decir, $12x^2 + 30x = 6x\,(2x + 5)$.

Aplicar algunas de las identidades notables

Consideremos el polinomio $P(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$. Si sacamos factor común, obtenemos:

$$P(x) = x \cdot (x^2 + 6x + 9)$$

El polinomio entre paréntesis, $x^2 + 6x + 9$, tiene tres términos: el primero es el cuadrado de x, el tercero es el cuadrado de 3 y el segundo es el doble de x por 3. Se trata, pues, del cuadrado de una suma.

$$P(x) = x \cdot (x^2 + 6x + 9) = x \cdot (x + 3)^2$$

Hallar los divisores de la forma *x* – *a*

Consideremos el polinomio $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$. El término independiente es 4; por lo tanto, las raíces enteras pueden ser ± 1, ± 2 y ± 4. Así pues, debemos probar si el polinomio $P(x)$ es divisible por $x - 1$, $x + 1$, $x - 2$, $x + 2$, $x - 4$ o $x + 4$.

Comprobamos que $P(x)$ es divisible por $x - 1$. Según el resultado de la división, podemos escribir:

$$P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - 4)$$

	1	–1	–4	4
1		1	0	–4
	1	0	–4	0

Puesto que $x^2 - 4$ es divisible por $x + 2$, podemos escribir la factorización de $P(x)$ de la siguiente forma:

$$P(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$$

	1	0	–4
–2		–2	4
	1	–2	0

Algunos polinomios aparecen frecuentemente en ejercicios de matemática, por esta razón, es conveniente conocer sus factores.

Para encontrar los factores de los polinomios podemos utilizar los conocimientos de productos notables, que desarrollamos en páginas anteriores.

1. Diferencia de cuadrados

Al resolver productos notables encontramos que la suma de dos cantidades por su diferencia, es igual a la diferencia de sus cuadrados. Usando esta igualdad podemos obtener los factores de la diferencia de cuadrados.

$$x^2 - y^2 = (x + y)\,(x - y)$$

Procedimiento para factorar una diferencia de cuadrados

Para factorar una diferencia de cuadrado, debemos:

a. Hallar la raíz cuadrada del primer término de la diferencia.

$$\sqrt{x^2} = x$$

b. Encontrar la raíz cuadrada del segundo término.

$$\sqrt{y^2} = y$$

c. El resultado es igual a la suma multiplicada por la diferencia de las raíces encontradas.

$$x^2 - y^2 = (x + y)\,(x - y)$$

2. Trinomio cuadrado perfecto

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)\,(x + y)$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)\,(x - y)$$

Un término es cuadrado perfecto si es producto de dos cantidades iguales. Un trinomio es cuadrado perfecto, cuando es el cuadrado de un binomio.

Procedimiento para factorar un trinomio cuadrado perfecto

Para encontrar los factores de un trinomio cuadrado perfecto, debemos:

a. Ordenar el trinomio de acuerdo a la variable.

$$2xy + x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

b. Encontrar la raíz cuadrada del primer término.

$$\sqrt{x^2} = x$$

c. Hallar la raíz cuadrada del tercer término.

$$\sqrt{y^2} = y$$

d. Comprobamos que el término de la mitad sea el doble producto de las raíces cuadradas de los términos primero y tercero.

$$2 \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = 2xy$$

e. Si el término de la mitad esta precedido del signo más, los factores serán la suma de las raíces del primer y tercer término del trinomio.

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)\,(x + y)$$

En su lugar, si el término del medio tiene signo negativo, los factores serán la diferencia de las raíces.

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)\,(x - y)$$

3. Trinomio tipo $x^2 + bx + c$

En la representación de los polinomios de la forma $x^2 + bx + c$ utilizaremos las letras b y c para representar las constantes. Para las variables, usaremos x.

Para descomponer en factores un trinomio tipo $x^2 + bx + c$ procedemos de la siguente manera, siempre que el polinomio este ordenado:

a. Encontramos la raíz cuadrada del primer término (término cuadrático).

$$\sqrt{x^2} = x$$

b. La raíz cuadrada encontrada va a ser el primer término en los dos binomios factores buscados, así

$$x^2 + bx + c = (x \quad)\ (x \quad)$$

c. El signo (operación) en el primer binomio es igual al signo de la operación entre el primero y segundo miembros del trinomio, esto $x^2 + bx + c = (x + \quad)\ (x + \quad)$

d. Luego el signo (operación) en el segundo binomio corresponde al signo del producto de multiplicar los coeficientes del segundo y tercer términos del trinomio, así $x^2 + bx + c = (x + \quad)\ (x + \quad)$

$(+\,b) \cdot (c)$

e. Si las operaciones en los binomios no son iguales, debemos encontrar dos números positivos p y q tales que el valor absoluto de su diferencia sea igual al término del medio del trinomio y su producto sea igual al tercer término del trinomio. Colocamos el mayor en el primer paréntesis y el otro en el segundo paréntesis. Obtenemos

$$x^2 + bx + c = (x + p)\ (x + q) \text{ o } x^2 - bx + c = (x - p)\ (x - q)$$

$$\text{con} \begin{cases} p + q = b \\ p \cdot q = c \\ 0 < p < q \end{cases}$$

f. Si las operaciones en los binomios no son iguales, debemos encontrar dos números positivos p y q tales que el valor absoluto de su diferencia sea igual al término del medio del trinomio y su producto sea igual al tercer término del trinomio. Colocamos el mayor en el primer paréntesis y el otro en el segundo paréntesis. Obtenemos

$$\text{con} \begin{cases} |p + q| = b \\ p \cdot q = c \\ 0 < p < q \end{cases} \qquad \begin{aligned} &x^2 + bx - c = (x + p)\ (x - q) \\ &\text{o}\, x^2 + bx - c = (x - p)\ (x + q) \end{aligned}$$

ejemplo 5

- $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)\ (x + 2)$, donde $p = 3, q = 2$ y $p + q = 5$, $p \cdot q = 6$
- $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)\ (x + 2)$, donde $p = 4, q = 2$ y $|p - q| = 2$, $p \cdot q = 8$
- $x^2 + x - 30 = (x + 6)\ (x - 5)$, donde $p = 6, q = 5$ y $|p - q| = 1$, $p \cdot q = 30$
- $x^2 - 10x + 21 = (x - 7)\ (x - 3)$, donde $p = 7, q = 3$ y $p + q = 10$, $p \cdot q = 21$

En los ejemplos ratificamos que si las operaciones en los binomios son iguales, los números buscados deben sumarse y si las operaciones en los binomios son diferentes los números buscados deben restarse.

Forma un grupo con dos compañeros e investiga cómo factorizar trinomios del tipo **$ax^2 + bx + c$**

Polinomio irreducible

Observa que el polinomio $x^2 + 4$ no puede descomponerse en factores. Diremos que es un *polinomio irreducible (polinomio primo)*.

> Un polinomio es **irreducible** si no puede descomponerse en producto de dos factores de grado mayor o igual que 1.

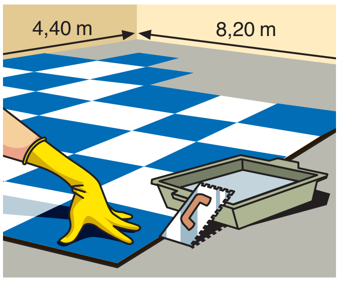
Descomponer factorialmente un polinomio consiste en expresarlo precisamente como producto de polinomios irreducibles.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Sabemos que al trabajar con divisores y múltiplos comunes de varios números enteros, el m.c.d. y el m.c.m. desempeñan un importante papel en las operaciones.

Lo mismo ocurre en el caso de los polinomios.

> El **máximo común divisor (m.c.d.)** de dos o más polinomios es todo polinomio de grado máximo que sea divisor de todos ellos.
>
> El **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** de dos o más polinomios es todo polinomio de grado mínimo que sea múltiplo de todos ellos.



Si el suelo de la habitación mide 820×440 cm y debemos cubrirlo con baldosas cuadradas lo más grandes posible, éstas tienen que medir: m.c.d. (820, 440) = 20 cm.

Para hallar el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo de dos o más polinomios procederemos del mismo modo que con los números enteros.

ejemplo 6

Halla el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ *y* $Q(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$.

— Descomponemos los polinomios en factores:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$$

$$Q(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12 = (x - 1) \cdot (x + 2)^2 \cdot (x - 3)$$

El máximo común divisor es igual al producto de los factores comunes a ambos polinomios elevados al menor exponente.

$$\text{m.c.d. } (P(x), Q(x)) = (x - 1) \cdot (x + 2) = x^2 + x - 2$$

El mínimo común múltiplo es igual al producto de los factores comunes a ambos polinomios y los no comunes, elevados al mayor exponente.

$$\text{m.c.m. } (P(x), Q(x)) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)^2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3) = x^6 + x^5 - 15x^4 - 13x^3 + 62x^2 + 36x - 72$$

Actividades

55 Factoriza las siguientes expresiones.

a) $81 - x^2$ b) $x^2 - 8x + 16$
c) $4 - 5x + x^2$ d) $-8x + 17x - 2x^2$
e) $25x - x^3$ f) $4x^2 + 19x + 21$

56 Descompón en producto de dos factores los siguientes polinomios.

a) $x^2 - 1$ c) $4x^2 + 6x^3 + 4x^4$
b) $10x^3 - 15x^2 + 5x$ d) $7x^3 - 2x^2$

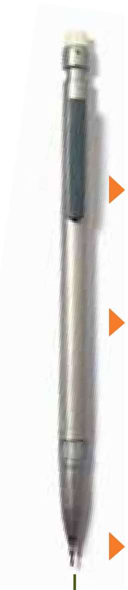
57 Factoriza el polinomio $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ si sabemos que se anula para $x = 1$, $x = 5$ y $x = 3$.

58 Resuelve la ecuación $2x^2 + 4x - 6 = 0$ y escribe, a partir del resultado obtenido, una descomposición factorial del polinomio $2x^2 + 4x - 6$.

59 Factoriza el polinomio $x^4 - 10x^2 - 20x - 16$.

60 Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ y $2x^3 - 2x^2 - 4x$.

Cómo resolver problemas



A En una división de polinomios el dividendo es $x^3 + 2x^2 + x - 5$, el cociente, $x - 2$ y el resto, 13. ¿Cuál es el divisor de esta división?

Comprensión del enunciado

Vuelve a leer atentamente el enunciado y anota los datos del problema.

Planificación de la resolución

Se trata de una división entera en la que se cumple:

$$\text{Dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{resto}$$

En esta igualdad conocemos todos los polinomios excepto el divisor.

Ejecución del plan de resolución

— Expresamos por $P(x)$ el divisor y sustituimos los datos del ejercicio en la igualdad anterior.

$$x^3 + 2x^2 + x - 5 = P(x) \cdot (x - 2) + 13$$

— Restamos 13 a cada uno de los miembros:

$$x^3 + 2x^2 + x - 5 - 13 = P(x) \cdot (x - 2) + 13 - 13$$

$$x^3 + 2x^2 + x - 18 = P(x) \cdot (x - 2)$$

— Dividimos ambos miembros por $x - 2$.

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x - 18}{x - 2} = \frac{P(x) \cdot \cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}}$$

— Efectuamos la división $(x^3 + 2x^2 + x - 18) : (x - 2)$ aplicando la regla de Ruffini.

	1	2	1	– 18
2		2	8	18
	1	4	9	0

Por lo tanto, el divisor de la división es:

$$P(x) = x^2 + 4x + 9$$

Revisión del resultado y del proceso seguido

Para comprobar el resultado obtenido efectuamos la división de $x^3 + 2x^2 + x - 5$ entre $x^2 + 4x + 9$ y verificamos que nos da $x - 2$ de cociente y 13 de resto.

B Considera el polinomio $x^3 + x^2 - 9x + k$. ¿Cuál debe ser el valor de k para que $x + 1$ sea divisor de dicho polinomio?

Comprensión del enunciado

Vuelve a leer atentamente el enunciado y anota los datos del problema.

— ¿Qué significa que $x + 1$ sea divisor del polinomio $x^3 + x^2 - 9x + k$?

Planificación de la resolución

Para que $x + 1$ sea divisor de $x^3 + x^2 - 9x + k$, debe cumplirse que el resto de la división $(x^3 + x^2 - 9x + k) \div (x + 1)$ sea 0.

Ejecución del plan de resolución

— Efectuamos la división utilizando la regla de Ruffini y dejando k indicado.

	1	1	–9	k
–1		–1	0	9
	1	0	–9	$k + 9$

— Puesto que el resto debe ser 0, debemos resolver:

$$k + 9 = 0$$

Con lo que el valor buscado de k es –9.

Revisión del resultado y del proceso seguido

Podemos comprobar que $x + 1$ es divisor del polinomio $x^3 + x^2 - 9x - 9$ si efectuamos la división correspondiente y verificamos que el resto obtenido es 0.

	1	1	–9	–9
–1		–1	0	9
	1	0	–9	0

Actividades

61 Averigua el valor del divisor $D(x)$ en la siguiente división de polinomios.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 - 10x + 8 & D(x) \\ \hline & x^2 - 6x + 8 \\ -16 & \end{array}$$

62 Determina el valor de k para que $x + 2$ sea divisor del polinomio $x^3 + 4x^2 + x + k$.

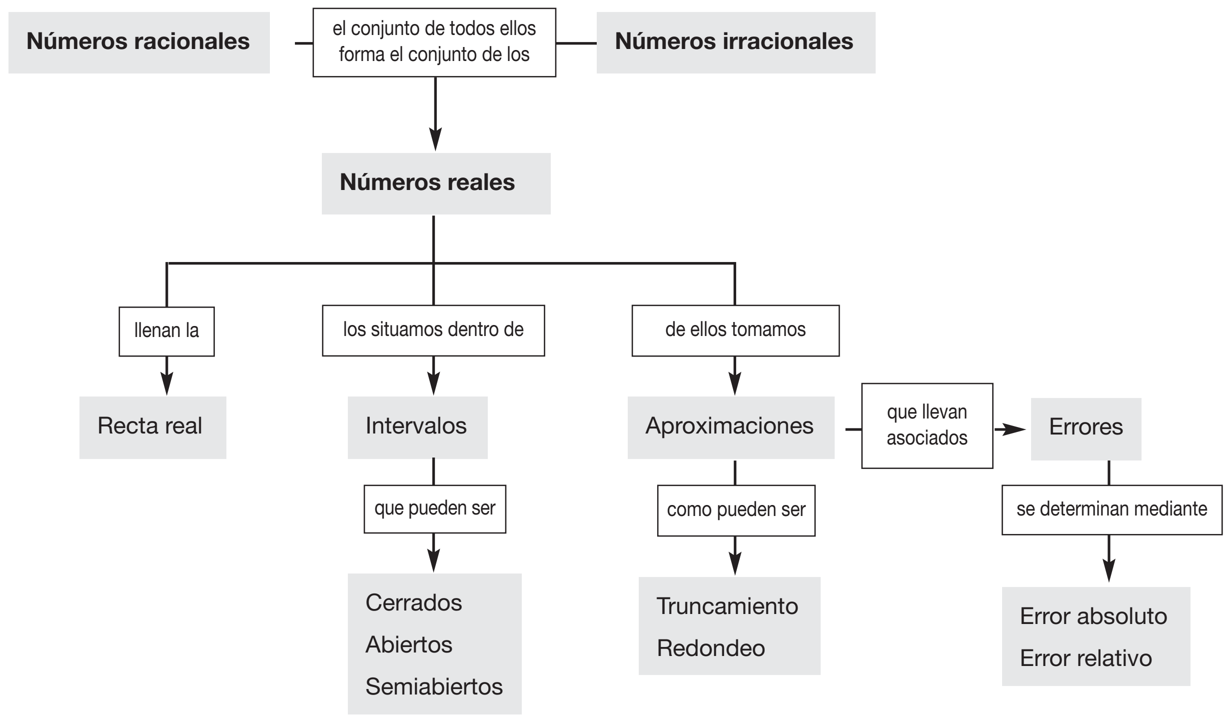
63 Determina el valor de k para que el resto de la división de $x^3 + 4x^2 + x + k$ entre $x + 2$ sea 5.

64 Dado el polinomio $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + k$, averigua el valor de k para que:

a) $x + 1$ sea divisor de $P(x)$.

b) El resto de la división $P(x) \div (x + 1)$ sea 3.

En resumen



- Un **polinomio** en una variable x es una expresión algebraica reducible a la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$, en la que $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ son números reales y n es un número natural.
- El **grado de un polinomio** es el **mayor de los grados** de sus términos.
- El **valor numérico** del polinomio $P(x)$ **para $x = a$** es el número que se obtiene al sustituir la variable x por el número a y efectuar las operaciones indicadas.
- Un **polinomio** está **ordenado** y en **forma reducida** si se reducen los monomios semejantes y se ordenan de mayor a menor grado.
- La **suma** de dos polinomios se obtiene al sumar los monomios semejantes de ambos polinomios.
  - La **resta** de dos polinomios se obtienen al restar los monomios semejantes de cada uno de ellos.
  - Para **multiplicar** dos polinomios debemos multiplicar cada uno de los términos de uno de ellos por cada uno de los términos del otro y sumar los términos semejantes.
  - **Dividir** el polinomio $P(x)$ entre el polinomio $Q(x)$ consiste en hallar los polinomios $C(x)$ y $R(x)$ de modo que se cumpla:

  $$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

  En caso de que el polinomio divisor sea de la forma $x - a$ solemos aplicar la **regla de Ruffini** para efectuar la división.
- Un **polinomio** es **múltiplo** de otro si se obtiene multiplicando este último por un polinomio.
- Un **polinomio** es **divisor** de otro si al dividir el segundo entre el primero la división es exacta.
  - El **teorema del resto** establece que el resto de la división del polinomio $P(x)$ entre $x - a$ es igual al valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$.
  - Si el polinomio $P(x)$ es divisible por $x - a$, a es una raíz del polinomio $P(x)$.
  - **Factorizar** un polinomio consiste en expresarlo como producto de otros polinomios del menor grado posible.
  - Un polinomio es **irreducible** si no puede descomponerse en producto de dos factores de grado mayor o igual que 1.
  - El **máximo común divisor** de varios polinomios es todo polinomio de grado máximo que sea divisor de todos ellos.
  - El **mínimo común múltiplo** de varios polinomios es todo polinomio de grado mínimo que sea múltiplo de todos ellos.
- Una **fracción algebraica** es el cociente en el que el numerador es un polinomio cualquiera y el denominador es un polinomio distinto de 0.
- Las fracciones algebraicas $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{R(x)}{S(x)}$ son equivalentes

  si cumplen que $P(x) \cdot S(x) = Q(x) \cdot R(x)$.
- Antes de efectuar **operaciones con fracciones algebraicas,** conviene simplificarlas y, en los casos de la suma y de la resta, reducirlas a mínimo común denominador.

- Resuelve la siguiente potencia de un binomio $(1 + x)^6$. Para ello, multiplicando sucesivamente seis veces el binomio $(1 + x)$ y al simplificar los términos semejantes, obtendrás los siguiente:

$$(1 + x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

Existe una forma más sencilla de obtener los coeficientes de la potencia anterior, investiga sobre el **triángulo de Pascal** y su uso.

- Utiliza los tres primeros términos de la serie anterior para aproximar el valor de $(1,1)^6$

Podemos hacer una aproximación del valor de $(1,1)^6$ usando la expansión del binomio $(1 + x)^6$ y dando el valor a x de 0,1, es decir:

$$(1 + x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + \ldots$$

$$(1,1)^6 \approx 1 + 6 \times 0,1 + 15 \times (0,1)^2 \approx 1,75$$

- Encuentra los errores absoluto, relativo y el porcentaje de error al hacer esta aproximación.

Para este apartado, necesitamos el valor exacto de la potencia $(1,1)^6$, para ello puedes usar una calculadora o una hoja de cálculo en un computador. El valor es $(1,1)^6 = 1,771\,561$. En este resultado, usaremos todos los decimales y lo aceptaremos como valor verdadero o valor exacto.

Calculemos:

$$\textit{Error absoluto} = \textit{valor aproximado} - \textit{valor exacto}$$

$$\textit{Error absoluto} = 1,75 - 1,771\,561 = 0,021\,561$$

$$\textit{Error relativo} = \frac{\textit{Error absoluto}}{\textit{valor exacto}}$$

$$\textit{Error relativo} = \frac{0,021\,561}{1,771\,561} \approx 0,012\,170\,622\,4$$

Vamos a redondear a las milésimas el valor del error relativo obtenido.

Usando las reglas aprendidas para ello tenemos:

$$\textit{Error relativo} \approx 0,012$$

Como recordarás, al multiplicar por 100% este último valor, obtienes el porcentaje de error cometido al hacer el cálculo, que en nuestro ejercicio es 1,2%.

- Cuando, durante un examen, se le asignó a un estudiante el polinomio:

$$4m^2 + 2m - 20$$

Para que lo factorizara, perdió algunos puntos porque dio esta respuesta: $(4m + 10)\ (m - 2)$.

Se quejó con su maestro porque el producto $(4m + 10)(m-2)$sí es igual a $4m^2 + 2m - 20$

Analiza la situación, ¿piensas que el maestro tenía razón al no darle el total de puntos?

Evidentemente el producto de los factores de la respuesta del estudiante dan como resultado $4m^2 + 2m - 20$, pero la orden del ejercicio indicaba que debía factorizar el polinomio. Es decir, escribir el polinomio dado en forma del producto de polinomios primos o irreducibles. Como se observa en el ejercicio, el primer factor de la respuesta tiene en su interior un factor común. Luego, la respuesta correcta es la factorización completa del polinomio, así:

$$4m^2 + 2m - 20 = 2(2m + 5)(m - 2)$$

- Dado el polinomio $1 - x + x\,y - y$. Una forma factorizada aceptable de la expresión algebraica es el producto $(1 - x)\ (1 - y)$.

Pero, existen otras formas de factorizar al polinomio que también son aceptables o equivalentes. Observa y analiza los siguientes productos e indica: ¿cuál de ellas no es una forma factorizada del polinomio dado?

a) $(x - 1)\ (y - 1)$ **b)** $(-x + 1)\ (-y + 1)$

c) $(1 - x)\ (y + 1)$ **d)** $(-1 + x)\ (-1 + y)$

Para comprobar si los productos presentados son o no aceptables como factorización del polinomio dado vamos a resolver cada uno de los productos mostrados, aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, así:

a) $(x - 1)\ (y - 1) = xy - x - y + 1$ **b)** $(-x + 1)\ (-y + 1) = xy - x - y + 1$

c) $(1 - x)\ (y + 1) = y + 1 - xy - x$ **d)** $(-1 + x)\ (-1 + y) = 1 - y - x + xy$

Por último y para ratificar nuestra respuesta aplicamos la propiedad conmutativa en los productos obtenidos para verificar si corresponden al polinomio dado.

a) $(x - 1)\ (y - 1) = xy - x - y + 1 = 1 - x + xy - y$

b) $(-x + 1)\ (-y + 1) = xy - x - y + 1 = 1 - x + xy - y$

c) $(1 - x)\ (y + 1) = y + 1 - xy - x = 1 - x - xy + y$

d) $(-1 + x)\ (-1 + y) = 1 - y - x + xy = 1 - x + xy - y$

De lo anterior se concluye que el producto correspondiente al literal c) no es una forma factorizada aceptable para el polinomio dado, puesto que su producto desarrollado no es igual al polinomio dado.

Practica

- Explica qué propiedades y operaciones se aplicaron para modificar a la factorización $(1 - x)\ (1 - y)$, dada inicialmente para obtener las que están en los literales a), b) y d).

Ejercicios y problemas

Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

El conjunto de los números reales

65 Una vez representados los números racionales y los irracionales sobre la recta, ¿queda ésta llena por completo o, por el contrario, aún quedan espacios vacíos en ella?

66 Razona si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

«Entre dos números reales distintos siempre existe otro número real».

67 Establece las relaciones de inclusión que existen entre los siguientes conjuntos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

68 Escribe un número natural, un número entero no natural, un número racional no entero y un número real no racional, todos ellos entre –5 y +5.

— Represent gráficamente los cuatro números y escríbelos ordenados de menor a mayor.

69 Representa sobre la recta real y ordena de menor a mayor estos números.

$$\frac{-1}{2};\ 3;\ \frac{2}{3};\ \sqrt{2};\ -1;\ \frac{-1}{6};\ -\sqrt{5};\ -1{,}50$$

70 Ordena de menor a mayor:

$$5;\ \frac{-3}{4};\ \frac{2}{7};\ 0;\ 3;\ -\sqrt{1};\ \sqrt{9};\ \sqrt{5};\ 0{,}75$$

71 Representa sobre la recta real los intervalos [5, 10], (–4, 3], [–2, 8) y (–1, 9).

72 Escribe en forma de intervalo:

a) Los números reales entre –2 y 5, ambos incluidos.

b) Los números reales mayores que –3 y menores o iguales que –1.

c) Los números reales menores que 6 y mayores que 2.

d) El trozo de recta común a los intervalos de los apartados *a)* y *b)*.

73 Escribe un intervalo cerrado cuyo extremo inferior sea –7 y cuyo punto central se encuentre a una distancia de 9 unidades de dicho punto.

74 Dados los intervalos (–6, 3), y [–2, 10], determina:

a) El centro y la amplitud de los intervalos.

b) El intervalo común a ambos intervalos.

Aproximaciones y errores

75 Escribe una aproximación por defecto y otra por exceso del número 15,692413.

76 Aproxima:

a) $\sqrt[3]{9}$ hasta las unidades.

b) $\frac{1}{4}$ hasta las décimas.

c) 9,5874... hasta las centésimas.

77 Indica en qué orden de aproximación se ha tomado las siguientes medidas.

a) El peso de una persona: 62,7 kg.

b) El radio de la Tierra: 6 371 km.

c) La longitud de una hormiga: 5,3 mm.

d) El tiempo empleado por un ciclista en una prueba contrarreloj: 1 h 25 min 27,23 s.

78 Resuelve la operación $\sqrt{3}$ con ayuda de la calculadora. Haz una aproximación hasta las centésimas e indica una cota del error absoluto.

79 Efectúa con la calculadora:

a) 2,12457 – 2,24153 + 1,21487

b) 5,247 · (0,255 – 0,114)

c) (0,274 : 0,5 – 2,560 · 0,5) · (4,528 – 9,018)

d) $\dfrac{4{,}7 \cdot 10^{3} \cdot 1{,}8 \cdot 10^{5}}{2{,}6 \cdot 10^{10}}$

e) $\dfrac{14{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}27 \cdot 10^{-2}}{6{,}15 \cdot 10^{-2} \cdot 7{,}43 \cdot 10^{-4}}$

— Presenta tus resultados redondeados hasta las centésimas e indica una cota del error cometido en cada caso.

Lenguaje algebraico

80 Expresa en lenguaje algebraico.

a) Un número par.

b) Un número impar.

c) El cuadrado de un número par.

d) El triple de un número impar.

e) La suma de tres números consecutivos.

f) El producto de los cuadrados de dos números consecutivos.

81 Escribe una expresión algebraica formada por dos términos que cumpla todas las condiciones siguientes.

— El coeficiente del primer término es 3 y la parte literal x^2.

— La parte literal del segundo término es x.

— El valor numérico de la expresión algebraica, para $x = 1$, es 8.

82 Calcula el valor numérico de cada una de estas expresiones algebraicas.

a) $2x^2 - 5x$ para $x = \frac{1}{2}$

b) $-(x + y - 5)^2$ para $x = -1, y = 6$

83 Completa esta tabla en tu cuaderno.

a	b	$(a + b)^2$	$(a - b)^2$	$a^2 - b^2$
-6	4			
$\frac{1}{2}$	-1			
0,2	$-2{,}2$			

84 Reduce los términos semejantes de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $a - 3b + 2a - 9b - 5b + 7a - 3b$

b) $3y + 4x - 6y + x - 7y + 2x$

c) $2x + 1 - (5y - 3 + x)$

d) $2ab + 5b - (ba + 2ab - 2b + 5b)$

85 Efectúa estas multiplicaciones.

a) $2xy \cdot x^2 y$

b) $5ab^2 \cdot 4a^2 b$

c) $-7x \cdot 2y \cdot xyz$

d) $\frac{4}{3}xy^2 \cdot \frac{5}{4}xy^3 \cdot 3x^3$

86 Expresa estas frases en lenguaje algebraico, como producto de una suma por una diferencia.

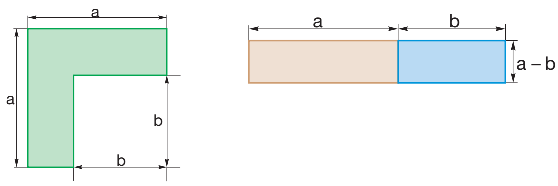
a) El cuadrado de a menos el cuadrado de b.

b) El cuadrado de a menos 25.

c) La novena parte del cuadrado de a menos 16.

d) El cuádruplo del cuadrado de a menos 81 veces el cuadrado de b.

87 Escribe mediante una expresión algebraica las áreas de las siguientes figuras. ¿Son iguales?



88 Completa esta tabla, en tu cuaderno.

·	a	$5b$	$-3a$	$a - b$
4				
$3a$				
$-2b$				
$a + b$				

89 Completa en tu cuaderno los números para que sean ciertas las igualdades siguientes.

a) $\ldots\ldots^2 + 5 = 14$

b) $3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + \ldots\ldots = (3 + 5)^2$

c) $4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \ldots\ldots + \ldots\ldots = (4 - 8)^2$

d) $5^2 - \ldots\ldots = (5 + 7) \cdot (5 - 7)$

90 Completa en tu cuaderno:

a) $49x^2 + 7x^3 = 7x^2(7 + \ldots\ldots)$

b) $a^2 b - 6a^2 b^2 = a^2 b(\ldots\ldots - \ldots\ldots)$

c) $27a^3 b^3 + 9a^4 b - 81a^4 b^2 + 21a^3 b^7 =$
$= 3a^3 b(\ldots\ldots + \ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots)$

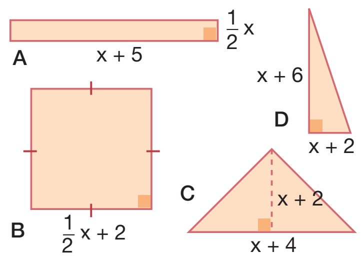
Operaciones con polinomios

91 Escribe un polinomio de grado 4 cuyo término independiente sea 0.

92 Sea $P(x) = 2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$. Calcula el valor numérico de $P(x)$ para:

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$

93 Relaciona cada una de estas cuatro figuras geométricas con la expresión algebraica que corresponde a su área.



a) $\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

b) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$

c) $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$

d) $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$

94 ¿La suma de dos polinomios de grado 5 puede ser un polinomio de grado 2?

95 ¿El producto de dos polinomios de grado 5 puede ser un polinomio de grado 2?

96 Indica el grado del cociente de una división en relación con los grados del dividendo y del divisor.

97 Dados los polinomios:

$P(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 7$

$Q(x) = -8x^4 - 3x^3 + x - 5$

$R(x) = x^3 + 7x^2 - x + 3$

Efectúa las siguientes operaciones.

a) $P(x) + Q(x)$ c) $P(x) + Q(x) - R(x)$

b) $P(x) - 3R(x)$ d) $2P(x) - Q(x) - R(x)$

98 Sean $P(x) = 2x^2 + 4x - 8$ y $Q(x) = x^3 - x + 2$. Calcula:

a) $P(x) \cdot Q(x)$ b) $\frac{1}{2}\ P(x) \cdot Q(x)$

99 Efectúa estas divisiones de polinomios.

a) $(2x^3 + 2x^2 - 12x) \div (x^2 - 2x)$

b) $(x^3 - 3x^2 + 4) \div (x^2 - 4)$

c) $(x^3 + 2x^2 - 13x + 10) \div (x^2 - 3x + 2)$

d) $(x^3 + x^2 - 6x + 7) \div (x^2 + x - 6)$

— ¿Cuáles de las divisiones anteriores son exactas?

100 Calcula las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini.

a) $(x^2 + 2x - 3) \div (x + 3)$

b) $(x^3 - 7x + 6) \div (x - 1)$

c) $(x^3 + 8x^2 - 23x - 30) \div (x + 10)$

101 @ Calcula el cociente y el resto de estas divisiones. En Internet, ingresa a las páginas de buscadores y encuentra la calculadora Wiris, aprende a usarla y comprueba tus resultados.

a) $(x^3 - 3x^2 - 10x + 10) \div (x - 4)$

b) $(x^3 - 7x^2 - 41x + 100) \div (x + 5)$

102 Si x es un número entero, expresa mediante un polinomio:

a) El cuadrado del número siguiente a x.

b) El cuadrado de la suma de x con el anterior a x.

c) El producto del número anterior a x por el triple del número siguiente a x.

d) La diferencia entre el cubo de x y el cubo del número anterior a x.

103 En una división de polinomios el dividendo es $3x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 3x - 2$; el cociente, $3x^2 + x + 5$ y el resto, $12x - 7$. Halla el divisor.

Divisibilidad de polinomios

104 Explica dos procedimientos para hallar el valor numérico de un polinomio.

105 Utiliza el teorema del resto para calcular el valor numérico de $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ para $x = 3$ y para $x = -3$.

106 Indica, sin efectuar ningún cálculo, las posibles raíces del polinomio $x^3 - 3x^2 + 4$.

107 Usando el teorema del resto halla dos raíces (valores que anulan la expresión) del polinomio $x^3 - 7x + 6$.

108 Al dividir el polinomio $P(x) = ax + b$ entre $x - 1$ se obtiene de resto 2 y al dividirlo entre $x - 2$ se obtiene de resto 5. Halla el polinomio $P(x)$.

109 ¿Cuáles de los siguientes polinomios son múltiplos de $2x - 4$?

a) $2x^3 - 6x^2 + 8$ c) $2x^2 + 6x - 4$

b) $x^3 - 2x^2$ d) $x^2 + 3x - 2$

110 ¿Cuáles de los siguientes polinomios son divisores de $3x^3 + 18x^2 + 33x + 18$?

a) $x - 3$ c) $3x^2 + 3x + 6$

b) $x + 1$ d) $x^2 - 4x - 1$

111 Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de las siguientes parejas de polinomios.

a) $x^3 + 4x^2 + x - 6$ y $x^3 - 7x + 6$

b) $x^3 - 3x^2 + 4$ y $2x^3 - 6x^2 + 8$

c) $x^3 + x^2 - 6x$ y $x^3 - 3x^2 - 10x + 20$

Factorización

112 Factoriza los siguientes polinomios con coeficientes enteros.

a) $x^3 - 2x^2 + x$ d) $3mt^2 + 12mt - 18m$

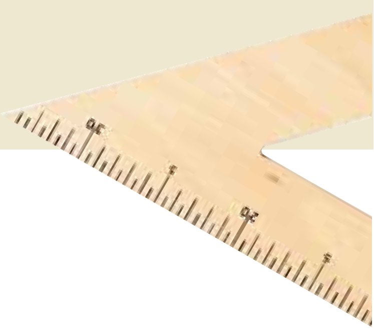
b) $x^3 + x^2 - 9x - 9$ e) $u^2 - 9u + 14 + uv - 7$

c) $x^4 - 9$ f) $mn^3 - 5mn^2 + 6mn$

113 Descompón en factores los siguientes polinomios.

a) $8a - a^2 + 4a$

b) $-x - y + z(x + y)$



c) $-x(a-4)-2x+(2-a)$

d) $3y-x^2+3xy-x$

e) b^2-b^4

f) $-x^3+10x^2-25x$

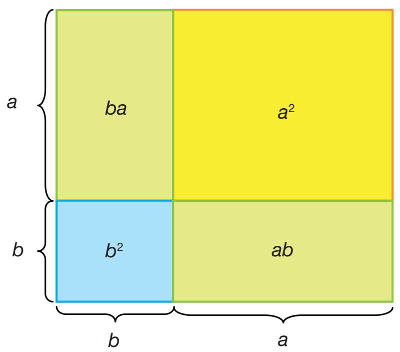
g) $81+a^2+18a$

h) $-z^4+z^2+z^2(5z^2-10)$

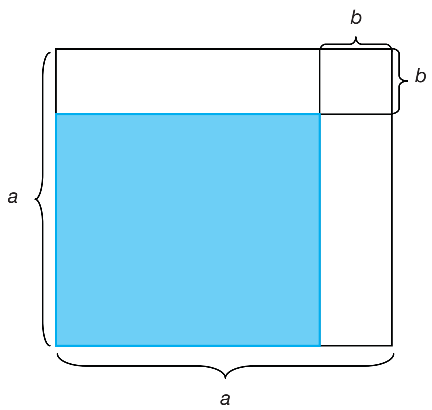
i) $3z^2-7z+4$

j) a^3-4a^2+4a

114 Usando los lados del siguiente cuadrado calcula su área, luego usa la suma de las sub-áreas e iguala las dos expresiones. identifica que relación se obtiene:



115 Usando el procedimiento del ejercicio anterior, encuentra la relación del área del cuadrado coloreado, en la siguiente figura.



116 **Material concreto:** representa con material concreto los siguientes polinomios y sus factores.

a) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

b) $a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)$

117 Encuentra los factores de los siguientes polinomios usando dos métodos distintos de factorización al iniciar el ejercicio. Compara las respuestas obtenidas.

a) $x(y+1)+x(y^2-1)$

b) $(x+y+1)+(y^2-1)-y^2-1$

c) $3c(a^2-b^2)+9c(a+b)$

d) $-4a^2+4b^2$

118 Completa los polinomios para que se cumpla la igualdad.

a) $a^2+b^2+\boxed{\quad}=(a+b)(a+b)$

b) $25x^2+25y^2-\boxed{\quad}=25(x-y)(x-y)$

c) $4y^2-4xy+\boxed{\quad}=(2x-y)(2x-y)$

d) $9x^2-\boxed{\quad}=(3x-5y)(3x+5y)$

119 Completa en tu cuaderno:

a) $x^2-8x+ \ldots\ldots = (x- \ldots\ldots)^2$

b) $\ldots\ldots -25=(x-5)\cdot(x+\ldots\ldots)$

c) $4x^2+4x+\ldots\ldots=(\ldots\ldots+1)^2$

120 Completa en tu cuaderno:

a) $(3\ldots\ldots)^2\cdot(2\ldots\ldots)^3-(5\ldots\ldots)^2=\ldots\ldots x^{12}$

b) $(\ldots\ldots)(\ldots\ldots-2x^2+x-12)=$

$=10x^4+\ldots\ldots-\ldots\ldots+24x$

Aplicación en la práctica

121 Determina el valor de k para que el resto de la división $(2x^3+x^2-x+k)\div(x-1)$ sea 1.

122 Determina el polinomio de grado 1, $P(x)$, si sabemos que $P(1)=1$ y $P(2)=4$.

123 Determina el valor de k para que el polinomio $x^3-2x^2+kx+18$ sea divisible por $x-3$.

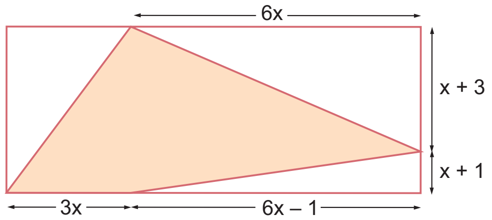
124 Halla un polinomio de grado 3 que sea divisible por $x-3$ y por $x+1$, y que se anule para $x=2$.

125 Halla el polinomio de grado 2 si sabemos que el coeficiente de x es nulo, $P(1)=3$ y $P(2)=13$.

126 Expresa mediante un polinomio, la cantidad de dinero que podrán reunir tres amigos si el dinero que tiene el segundo amigo es igual al cuadrado del que tiene el primero, menos el quíntuplo de dicha cantidad y el que dispone el tercero, es igual al cuadrado de la décima parte del que tiene el segundo.

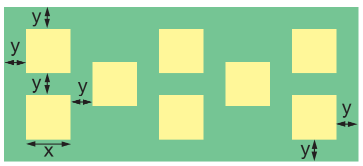
— ¿Qué cantidad de dinero podrán reunir, si el primer amigo dispone de 10 dólares?

127 Expresa mediante un polinomio el área de la figura coloreada.



128 Conéctate a la página http://dinamica1.fciencias.unam.mx/Preparatoria8/polinomi/index.html. Examina la explicación que se ofrece sobre polinomios, grado, raíces y factorización de un polinomio.

129 Disponemos del siguiente tapiz.



Escribe la expresión algebraica de:
a) El área total del tapiz.
b) El área de color verde.
c) El área de color amarillo.

130 Completa en tu cuaderno el siguiente cuadrado mágico.

$2(x^2-1)$		
	$5x^2+1$	
$(2x)^2$		$4(2x^2+1)$

Más a fondo

131 Efectúa en tu cuaderno las siguientes multiplicaciones.

a)
$$\begin{array}{r} x^2 - \frac{1}{2}x + 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 2x^2 - x + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}x + 3 \\ \hline \end{array}$$

132 Efectúa las siguientes divisiones.

a) $x^4 + 7x^3 - 62x^2 + 288 \;\big|\; x^2 + 9x - 36$

b) $3x^4 + 12x^3 - 3x^2 - 48x - 36 \;\big|\; x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

c) $6x^4 + 32x^3 + 22x^2 - 44x - 16 \;\big|\; x^2 + 6x + 8$

Una de las aplicaciones directas de la factorización es la simplificación de fracciones o expresiones algebraicas racionales y las operaciones entre éstas. Para resolver los ejercicios siguientes te recomendamos:

a) Factorizar el numerador y el denominador de cada una de las fracciones algebraicas;

b) Simplificar los factores que sean comunes en cada una de las fracciones;

c) Realizar, de ser el caso, la operación indicada entre fracciones usando tus conocimientos de operaciones aritméticas.

d) Intenta simplificar el resultado obtenido en el paso anterior.

133 Reduce o simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\frac{16x^2y}{24xy^2}$ b) $\frac{6m^2+3m}{3m}$ c) $\frac{u^2v-uv^2}{u^2-uv}$ d) $\frac{3p^3+18p^2+24p}{3p^2+12p}$

e) $\frac{14x^3y}{21xy^2}$ f) $\frac{2m^2-10m}{4m-20}$ g) $\frac{u^2-uv}{u^2v-uv^2}$ h) $\frac{2p^3+10p^2+12p}{6p^2+12p}$

i) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$ j) $\frac{m^2-4}{m^2+4m+4}$ k) $\frac{u^2-uv+2u-2v}{u^2-v^2}$ l) $\frac{p^2+pq-2p-2q}{p^2+2pq+q^2}$

134 Realiza las siguientes operaciones indicadas.

a) $\frac{18xy^2}{16y^3} \div \frac{3x}{4y}$ b) $\frac{2m}{3nx} \cdot \frac{6n}{4m}$ c) $\frac{uvw}{5abc} \div \frac{vb}{acu}$

d) $\frac{3p^2q}{p-q} \cdot \frac{p-q}{6pq}$ e) $\frac{x+3}{2x^2} \cdot \frac{4x}{x+3}$ f) $\frac{m+3}{m^3+3m^2} \cdot \frac{m^3}{m-3}$

g) $\frac{u^2-u}{u-1} \cdot \frac{u+1}{u}$ h) $\frac{p+q}{p^2-q^2} \div \frac{p^2-pq}{p^2-2pq+q^2}$

135 Realiza las siguientes sumas o restas según corresponda.

a) $\frac{7x}{5x^2} - \frac{2}{5x^2}$ b) $\frac{3m}{2m^2} + \frac{1}{2m^2}$ c) $\frac{4u}{2u-1} - \frac{2}{2u-1}$

d) $\frac{5}{3p} + \frac{6p-4}{3p}$ e) $\frac{-1}{2x^2} + \frac{2y-1}{2x^2}$ f) $\frac{3m}{n} - \frac{1}{4}$

g) $\frac{2}{u} - \frac{1}{3}$ h) $\frac{2}{y} - 1$

Las tres puertas

En una prueba de un concurso, un participante debe elegir una puerta de entre tres. Detrás de una de las puertas hay un premio, detrás de otra hay una multa y detrás de la otra puerta no hay nada. Cada puerta tiene un cartel y se sabe que uno solo de los tres carteles es falso.

Puerta 1: Aquí detrás está el premio.

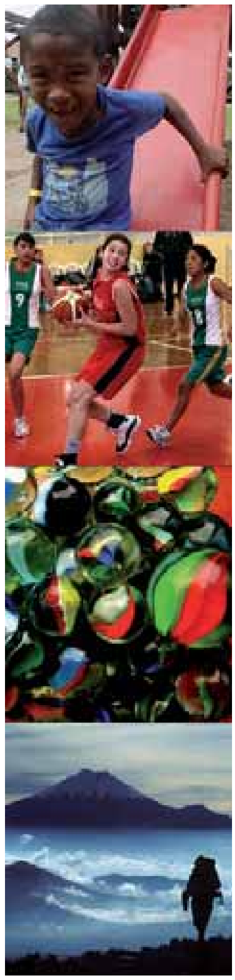
Puerta 2: Aquí detrás está la multa.

Puerta 3: Aquí detrás no está la multa.

¿Qué puerta debe elegir el concursante?

La excursión de fin de curso

En una excursión, 30 alumnos llevan gorra y 20 llevan un plano. Si en total hay 42 alumnos, ¿cuántos, como mínimo, llevan tanto gorra como plano?



Buen Vivir

Cultura física y tiempo libre

Es una preocupación para muchas personas alcanzar proporciones físicas que tal vez solo se ven en fotos retocadas o en personas sometidas a cirugías estéticas. Por supuesto que el ejercicio físico modifica las proporciones y medidas del cuerpo, pero siempre dentro de parámetros fisiológicamente determinados. En la antigua Grecia, lo importante era la búsqueda de la belleza ideal. Para los griegos esta radicaba en la perfección, la proporción y la armonía. En el arte, esta búsqueda de relacionar las proporciones de los cuerpos ha sido resuelta con ayuda de la matemática a través de un número conocido como áureo o de oro, al que muchos artistas han recurrido.

Actividades

1 Investiguen los beneficios del ejercicio físico en la salud de las personas.

2 Realicen una lista sobre las diversas opciones de entretenimiento para su tiempo libre, no olviden mencionar actividades al aire libre y de actividad física.

3 ¿Qué relación existe entre la actividad física y el Buen Vivir? ¿Creen que en los colegios se debe fomentar la cultura física y la práctica de deportes? ¿Por qué?

4 Comenten cómo se sienten después de practicar algún deporte y si pueden identificar beneficios al hacerlo.

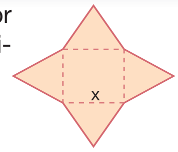
5 Elaboren una campaña sobre el aprovechamiento del tiempo libre con las opciones que enunciaron en el ejercicio anterior y propongan una mañana deportiva o de juegos con sus compañeros/as. Para esto, establezcan un horario para realizar las actividades.

Autoevaluación — Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

Autoevaluación

1. La siguiente figura está formada por un cuadrado y cuatro triángulos equiláteros.



a) Escribe un polinomio para expresar su área.

b) Halla el área de la figura si $x = 3$ cm.

2. Indica el resultado de multiplicar los polinomios $2x^2 + 7x + 3$ y $x^2 - 1$.

3. Escribe un intervalo cerrado de centro -3 y cuyos extremos se hallen a una distancia de 5 unidades de dicho punto.

4. Factoriza estos polinomios.

a) $x^3 + x^2 - 9x - 9$ b) $5x^3 + 15x^2 - 65x - 75$

Coevaluación

1. ¿Cuál es el resto de la división del polinomio $x^3 + 2x^2 - 4x - 6$ por $x^2 - x - 2$?

2. Indica el valor numérico de $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ para $x = 7$.

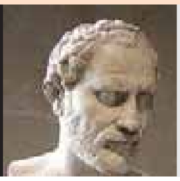
3. ¿Cuál de los siguientes polinomios es divisor de $2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$?

a) $x^2 + 3x + 2$ b) $x^2 - 3x - 2$ c) $x^2 + 2x + 3$

4. a) Halla un polinomio tal que al sumarlo con el polinomio $3x^2 + \frac{1}{2}x + 4$ dé como resultado el polinomio $x^3 + 8x^2 + 7$.

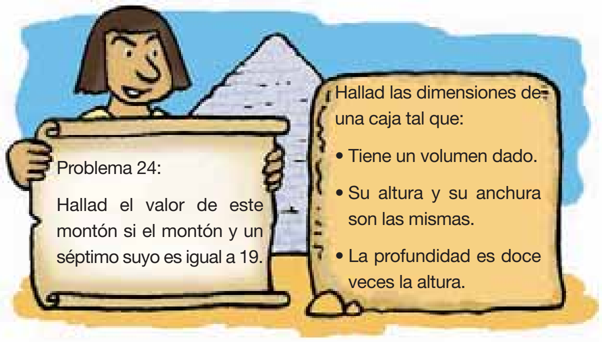
b) Halla un polinomio que multiplicado por el polinomio $3x^2 + x$ dé como resultado $3x^4 + x^3 - 15x^2 - 5x$.

5. Aproxima por redondeo hasta las milésimas el número decimal 10,428751.

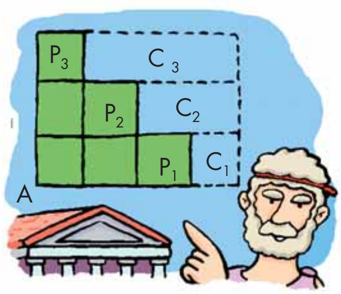


Sección de historia

Las civilizaciones antiguas resolvían verbalmente situaciones que hoy describimos mediante ecuaciones.



Los griegos clásicos resolvían geométricamente situaciones correspondientes a ecuaciones sencillas.



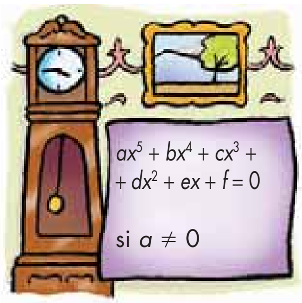
Diofanto (s. III) fue el primero en utilizar símbolos en los problemas, aunque resolvía aritméticamente las ecuaciones planteadas.

Los hindúes amplían las ideas de Diofanto, pero los árabes vuelven a un álgebra verbal.

Del siglo XV al XVII, se introduce y se desarrolla la notación algebraica actual.

$(=, +, -, <, \sqrt{\ }, \times, x^2 \ldots)$

Desde el siglo XVIII se han desarrollado avanzadas teorías sobre ecuaciones de ciertos tipos.



Actualmente, con la ayuda de ordenadores y métodos numéricos, puede resolverse de manera aproximada cualquier ecuación.

Crónica matemática

La utilización de letras por los matemáticos se remonta a la Antigüedad clásica. Basta con echar una ojeada a la forma en que griegos y romanos, por ejemplo, escribían los números.

Grecia	*Roma*
$\alpha \rightarrow 1$	$\mathrm{I} \rightarrow 1$
$\beta \rightarrow 2$	$\mathrm{V} \rightarrow 5$
$\gamma \rightarrow 3$	$\mathrm{X} \rightarrow 10$

Sin embargo, el paso de los números a las letras se produjo en el momento en que el ser humano empezó a interesarse, no por los números en sí, sino por las operaciones que pueden efectuarse con cualquier número.

En un principio, las operaciones generales con números cualesquiera se describían con palabras.

Así, por ejemplo, términos como *arithmos, res* y *cosa* eran formas de expresar un valor entero desconocido.

La formulación de problemas aparecía entonces como un complicado juego de palabras:

- *¿Cuál es el valor de la cosa cuyo cuadrado coincide con el quíntuplo de dicha cosa aumentado en 6?*
- *¿Qué valor tiene este montón si el montón y un séptimo suyo son iguales a 19?*

Sistema de numeración griego.

Álgebra

La palabra *álgebra* procede del árabe, concretamente del título del libro *Al-jabr w'al-muqabalah*, de **Mohamed ben Musa al-Jwarizmi** (780-850).

Aunque los árabes introdujeron el álgebra en Europa durante toda la Edad Media, su desarrollo no se produce hasta el siglo XIV, con el inicio del Renacimiento.

El primero en introducir letras distintas para designar por separado los elementos conocidos (parámetros) y los desconocidos (variables) fue el francés **François Viète** (1540-1603).

La sistematización del lenguaje algebraico es obra de otro francés, **Descartes** (1596-1650). Este matemático y filósofo fue, además, el primero que estableció relaciones entre la geometría y el álgebra.

En un pequeño lago de un parque natural viven dos patos.

Uno de ellos, el más joven, es intrépido y presume de volar el doble de rápido que el otro. Ambos se encuentran en una pequeña isla del lago cuando el pato joven decide conocer nuevas tierras y parte volando hacia el Norte. Al poco de su partida se oye, a 1000 metros al este de la isla, la llamada del guarda del parque que les lleva comida.

Al oírlo, ambos patos acuden volando y llegan los dos al mismo tiempo. ¿A qué distancia de la isla se encontraba el pato joven?

Informática

Uno de los pioneros de la actual informática es el matemático e inventor inglés **Charles Babbage** (1791-1871).

Babbage construyó en 1822 una pequeña máquina mecánica movida por vapor que calculaba valores para polinomios de segundo grado, con una precisión de seis cifras. Esta máquina se utilizó para el cálculo de tablas de navegación y de artillería.

Posteriormente, se embarcó en el proyecto de lo que llamaría *la máquina analítica* que, por problemas económicos, no pudo finalizar. Fue su hijo Henry quien la terminó y la presentó en 1910 en la Astronominal Society de Inglaterra.

@ Conéctate en la siguiente página de Internet y amplía tus conocimientos sobre el origen de la informática.

http://homepage.mac.com/eravila/histcomp.html

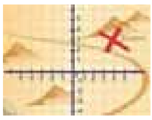
Módulo 4

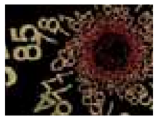
Bloques: Numérico. Relaciones y funciones

Buen Vivir: Hábitat y vivienda

En la costa ecuatoriana hay lugares cálidos, donde la temperatura ambiental media los 27 °C. Si hay estanques o humedales, allí crecerán nenúfares. Esta planta se duplica cada dos días. Si el primer día que visitamos un humedal, observamos que hay 40 plantas, ¿cuántas habrá cuando volvamos a visitarlo 20 días más tarde? ¿Cuántas había 6 días antes de nuestra primera visita?

Números reales
Patrones de crecimiento lineal





En este módulo consolidarás los procedimientos de cálculo con potencias y representarás gráficamente patrones de crecimiento lineal.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Simplificar expresiones de números reales con exponentes negativos con la aplicación de las reglas de potenciación.
- Reconocer patrones de crecimiento lineal en tablas de valores y gráficos.
- Graficar patrones de crecimiento lineal a partir de su tabla de valores.
- Presentar de manera clara y ordenada los ejercicios realizados.
- Confiar en tus propias capacidades para efectuar operaciones matemáticas.
- Usar la calculadora de forma racional para operar con potencias.

Prerrequisitos

Recuerda

- El conjunto formado por los números racionales y los irracionales recibe el nombre de conjunto de los números reales, y se representa por $\mathbb{R}$.
- Una potencia de base un número racional $\frac{a}{b}$ y exponente un número natural n es la multiplicación de la base por ella misma tantas veces como indique el exponente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n \text{ veces}} = \frac{a^n}{b^n}$$

- La raíz cuadrada de un número b es otro número a que, elevado al cuadrado, nos da b.

$$\sqrt{b} = a \text{ , si } a^2 = b$$

$\sqrt{\ }$ es el símbolo de la raíz.
b es el radicando.
a es una raíz.

- Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si, al multiplicar o dividir un valor de una de ellas por una constante, el valor correspondiente de la otra queda multiplicado o dividido por la misma constante.

- Si dos magnitudes son directamente proporcionales, la razón entre pares de valores correspondientes es constante y se llama **constante de proporcionalidad.**

Evaluación diagnóstica

- Resuelve:

$$-5 + \frac{4}{5}\left[\frac{-1}{4} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right] - \frac{5}{3}\left(\frac{7}{8} \div \frac{1}{2}\right)$$

- Calcula:

a) $2x + 3x$ b) $b \cdot b^2$ c) $17y^2 \div 5y$

- Expresa como potencias de exponente positivo.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-4};\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-9};\ \left(\frac{-7}{9}\right)^{3} \div \left(\frac{7}{-9}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{9}{7}\right)^{-11}$$

- Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales.

$$\frac{1}{3};\ 4;\ \frac{-4}{5};\ \sqrt{2};\ \frac{7}{2};\ 2{,}33333\ldots;\ -\sqrt{5};\ \pi$$

- Calcula: $\sqrt{\frac{16}{25}};\ \sqrt{\frac{1}{81}};\ \sqrt{\frac{4}{169}}$

- ¿A qué potencia debes elevar 10 para obtener como resultado 100? Completa la siguiente ecuación para expresarlo.

$$10^x = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow x = \ldots\ldots\ldots$$

- Escribe cuatro múltiplos de 11 y cuatro divisores de 125.

- Calcula el valor numérico de $\frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + 1}$ para los siguientes valores de n.

a) $n = 3$ b) $n = 5$ c) $n = 10$

Buen Vivir

Hábitat y vivienda

Art. 375.- El Estado, en todos sus niveles de gobierno, garantizará el derecho al hábitat y a la vivienda digna, para lo cual generará la información necesaria para el diseño de estrategias y programas que comprendan las relaciones entre vivienda, servicios, espacio y transporte públicos, equipamiento y gestión del suelo urbano.

Constitución de la República del Ecuador, 2008.

1 Potencias de base real y exponente entero

Sabemos que el producto de varios números racionales iguales puede expresarse como una potencia de base racional.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

Si el factor que se repite es un número real, podemos expresarlo de manera análoga como:

$$\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi=\pi^5$$

Así, tenemos una potencia de base el número real π y de exponente el número natural 5.

La **potencia** de **base** un número **real *a*** y **exponente** un número **natural *n*** es el producto del número ***a*** por sí mismo, ***n*** veces.

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot ...\cdot a}^{n \text{ veces}}$$

Pero, ¿qué sucede si el exponente de una potencia es 1? En tal caso no podemos aplicar la definición de potencia, ya que no existen productos con un único factor. En este caso se toma como valor de la potencia la propia base. Así, por ejemplo, $\pi^1=\pi$.

La **potencia** de **base** un número **real *a*** y **exponente 1** es igual a ***a***.

$$a^1=a$$

Las **operaciones con potencias** de base real y exponente natural tienen las mismas propiedades que las de base racional. Obsérvalas.

Multiplicación de potencias de la misma base

$$a^5\cdot a^2=\overbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a)=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}^{7 \text{ veces}}=a^7$$

$$a^5\cdot a^2=a^{5+2}=a^7$$

Para **multiplicar potencias** de la misma base real y exponentes números naturales, se deja la **misma base** y se **suman los exponentes.**

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

División de potencias de la misma base

$$a^7\div a^3=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a}=\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a}^{4 \text{ veces}}=a^4$$

$$a^7\div a^3=a^{7-3}=a^4$$

Para **dividir dos potencias** de la misma base real ***a**^m* y ***a**^n* siendo $a\neq 0$, m y n números naturales y $m>n$, se deja la **misma base** y se **restan los exponentes.**

$$a^m\div a^n=a^{m-n} \text{ con } a\neq 0 \text{ y } m>n$$

Potencia de un producto

$$(a\cdot b)^3=(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)=$$
$$=a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b=a^3\cdot b^3$$

Para elevar un **producto** de números reales ***a*** y ***b*** a una **potencia** de exponente natural ***n*** se eleva **cada uno** de los **factores** a dicha potencia.

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$$

Potencia de una potencia

$$(a^2)^3=a^2\cdot a^2\cdot a^2=a^{2+2+2}=a^6$$

$$(a^2)^3=a^{2\cdot 3}=a^6$$

Para **elevar** una **potencia** a otra **potencia** se deja la **misma base** y se **multiplican** los **exponentes.**

$$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$$

Consideremos seguidamente el caso en que el **exponente** sea un **número entero.**

Las potencias de base real y exponente entero positivo son justamente las potencias de base real y exponente natural que ya hemos visto. Pero, ¿qué ocurre si el exponente es 0 o un número entero negativo?

Las potencias de exponente 0 o un número entero negativo se definen de manera que las **propiedades de las potencias** de exponente natural **continúen siendo válidas,** en particular la propiedad de la división de potencias de la misma base.

Potencias de exponente 0

Consideramos la división $\pi^4 \div \pi^4$.

$$\pi^4 \div \pi^4 = \frac{\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi}{\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi} = 1 \longrightarrow \boxed{\pi^0 = 1}$$

Si aplicásemos la regla para dividir potencias $\longrightarrow \pi^{4-4} = \pi^0$

La **potencia** de base un número real a, $a \neq 0$, y **exponente** 0 es igual a **1.**

$$a^0 = 1, \text{ con } a \neq 0$$

Potencias de exponente negativo

Consideramos la división $\pi^3 \div \pi^5$.

$$\pi^3 \div \pi^5 = \frac{\pi\cdot\pi\cdot\pi}{\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi} = \frac{1}{\pi\cdot\pi} = \frac{1}{\pi^2} \longrightarrow \boxed{\pi^{-2} = \frac{1}{\pi^2}}$$

Si aplicásemos la regla para dividir potencias $\longrightarrow \pi^{3-5} = \pi^{-2}$

La **potencia** de base un número real a, $a \neq 0$, y **exponente** un número entero **negativo** $-n$ es igual al inverso de la potencia de base el mismo número real y exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ejemplo 1

Expresa:

a) $\pi^{-4} \cdot \pi^6$ *en forma de una sola potencia de base* π.

b) $a^7 \div a^{-4}$ *en forma de una sola potencia de base el número real* a.

c) $(a^3 \cdot \pi^2)^{-2}$ *como producto de potencias.*

d) $(a^6)^{-3}$ *en forma de potencia de base el número real* a.

Aplicamos las propiedades de las operaciones con potencias.

a) $\pi^{-4} \cdot \pi^6 = \dfrac{1}{\pi^4} \cdot \pi^6 = \dfrac{\pi^6}{\pi^4} = \pi^{6-4} = \pi^2$

b) $a^7 \div a^{-4} = a^7 \div \dfrac{1}{a^4} = a^7 \cdot a^4 = a^{7+4} = a^{11}$

c) $(a^3 \cdot \pi^2)^{-2} = \dfrac{1}{(a^3 \cdot \pi^2)^2} = \dfrac{1}{a^6 \cdot \pi^4} = \dfrac{1}{a^6} \cdot \dfrac{1}{\pi^4} = a^{-6} \cdot \pi^{-4}$

d) $(a^6)^{-3} = \dfrac{1}{(a^6)^3} = \dfrac{1}{a^{18}} = a^{-18}$

Actividades

1 Transforma las siguientes potencias para que tengan exponente positivo.

a) $(3\pi)^{-2}$

b) $\left(\dfrac{4x}{9}\right)^{-3}$

c) $(\pi - 1)^{-5}$

d) $\left(\dfrac{4}{x+3}\right)^{-1}$

2 Expresa en forma de una sola potencia:

a) $\left(\dfrac{-3}{4}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{-3}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{-3}{4}\right)^3$

b) $(3^{-5} \cdot 3^{-2})^{-6} \div [(5-2)^2]^{-3}$

c) $[(3+\pi)^5 \div (3+\pi)^{-2}]^4$

2 Simplificación de expresiones con números reales

Para realizar operaciones con números reales que están representados por varios factores, es aconsejable simplificar las expresiones matemáticas antes de operarlas. Observa los siguientes ejemplos:

ejemplo 2

Resuelve la siguiente expresión: $\dfrac{4a^2}{2a} + a$

a) En primer lugar, identificamos los términos en la expresión.

$$\underbrace{\frac{4a^2}{2a}}_{\text{Primer término}} \quad + \quad \underbrace{a}_{\text{Segundo término}}$$

b) Luego, ordenamos, de acuerdo a una letra, los factores del numerador y del denominador.

$$\frac{4\ \ a^2}{2\ \ a} = \frac{4}{2}\cdot\frac{a^2}{a}$$

c) Siempre que la división sea exacta, dividimos la parte literal y las variables del numerador para sus similares en el denominador.

$$4 \div 2 = 2$$
$$a^2 \div a = a$$
$$\frac{4\ \ a^2}{2\ \ a} = 2 \cdot a$$

d) Finalmente, operamos los términos resultantes:

$$\frac{4a^2}{2a} + a = 2a + a = 3a$$

ejemplo 3

Resuelve el siguiente ejercicio: $\dfrac{4x}{3x^2} - \dfrac{2}{x}$

a) En primer lugar, identificamos los términos en la expresión.

$$\underbrace{\frac{4x}{3x^2}}_{\text{Primer término}} \quad - \quad \underbrace{\frac{2}{x}}_{\text{Segundo término}}$$

b) Ordenamos y, dividimos los factores del numerador con los del denominador.

$$x \div x^2 = x^{-1}$$
$$\frac{4x}{3x^2} = \frac{4x^{-1}}{3} = \frac{4x}{3x}$$

c) Luego, operamos los términos.

$$\frac{4x}{3x^2} - \frac{2}{x} = \frac{4-6}{3x} = \frac{-2}{3x}$$

Actividades

3 Resuelve los siguientes problemas, simplificando primero cada término.

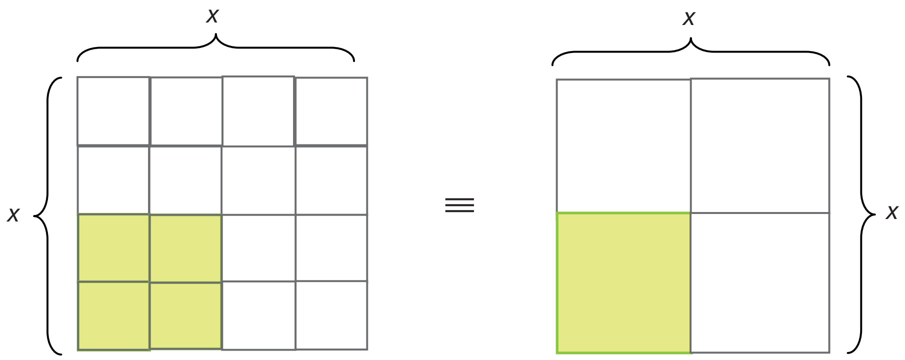
a) $6az - \dfrac{9a^3z}{3a^2}$

b) $\dfrac{18x^2b}{9b^2x} + \dfrac{7x}{14b}$

c) $\dfrac{8c^2b}{16c} + cb$

d) $\dfrac{2x^3y}{4x^2} - 2xy - \dfrac{5x^4y^7}{15(xy^2)^3}$

Simplificar los términos antes de operar una expresión algebraica ayuda a que las operaciones que posteriormente desarrollaremos sean más sencillas de realizar. Cuando simplificamos una expresión matemática el valor de esta no se altera, solo varía su representación.



$$\frac{4x^2}{16} \equiv \frac{x^2}{4}$$

Para simplificar varios términos, debemos encontrar el factor común del numerador y del denominador, observa.

ejemplo 4

Simplifica: $\dfrac{8x^2z}{4} - \dfrac{4xz^2}{12}$

a) Buscamos el término común del denominador y del denominador de las dos expresiones.

- Los numeradores $8x^2z$ y $4xz^2$ tienen el factor común: $4xz$.
- Mientras que el factor común de los denominadores **4** y **12** es 4.

Luego, expresamos los términos sin su factor común, es decir a cada numerador lo dividimos para su factor común y a los denominadores para el suyo.

$$8x^2z \div 4xz = 2x \quad \textbf{y} \quad 4xz^2 \div 4xz = z$$

$$4 \div 4 = 1 \quad \textbf{y} \quad 12 \div 4 = 3$$

$$\frac{8x^2z}{4} - \frac{4xz^2}{12} = \frac{4xz}{4} \cdot \left(\frac{2x}{1} - \frac{z}{3}\right)$$

b) Finalmente, simplificamos los factores de cada término.

$$\frac{8x^2z}{4} - \frac{4xz^2}{12} = \frac{\cancel{4}xz}{\cancel{4}} \cdot \left(\frac{2x}{1} - \frac{z}{3}\right) = xz \cdot \left(2x - \frac{z}{3}\right)$$

Actividades

4 Simplifica.

a) $\dfrac{8ab^2}{5ba} - \dfrac{4ba^2}{25a^2}$

c) $\dfrac{81xy - 9xy + 27yx^2}{9xy}$

b) $\dfrac{7(xy)^2}{17y^3} - \dfrac{14x^2y^4}{34y^5}$

d) $\dfrac{3x^2}{45x^3} + \dfrac{3x^3}{15x^4}$

5 Representa con material concreto las siguientes fracciones y encuentra su expresión más simple.

a) $\dfrac{2x}{8}$

b) $\dfrac{14y^2}{7}$

FÍJATE

Para simplificar dos términos de una expresión algebraica, deben estar multiplicándose o dividiéndose.

$$\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1 \text{ ó } \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} = 1$$

3 Sucesiones

Observa los siguientes conjuntos ordenados:

- Lunes, martes, miércoles...
- Enero, febrero, marzo...
- 2, 4, 6...
- 4, 8, 12...

Todos ellos pueden representarse mediante una función que relaciona un elemento del conjunto con el lugar que ocupa en él.

Posición	Elementos			
1	Lunes	Enero	2	4
2	Martes	Febrero	4	8
3	Miércoles	Marzo	6	12
...	...	...	...	...

Entre estos conjuntos ordenados, los de números reales que se corresponden con los números naturales se denominan **sucesiones numéricas** y cada elemento, **término.**

Una **sucesión numérica** es una función en la que la variable independiente es un número natural y la variable dependiente es un número real.

La forma general de representar una sucesión es:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$$

Para representar los diferentes términos se emplea una misma letra con distintos subíndices que indican el lugar que ocupa cada uno de ellos en la sucesión.

3.1. Término general

En algunas ocasiones es posible obtener los términos de una sucesión a partir de una expresión que permite calcular cualquier término sabiendo el lugar que ocupa.

El **término general** de una sucesión es una expresión matemática que relaciona la posición que ocupa un término con su valor.

Veamos la sucesión de los múltiplos de 2:

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad 12\dots$$

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5, \quad a_6\dots$$

Cada término se obtiene al multiplicar por 2 el número del lugar que ocupa. Por tanto, la expresión del término general a_n será:

$$a_n = 2n$$

Conocida esta expresión podemos calcular cualquier término. Por ejemplo, el término decimoctavo será:

$$a_{18} = 2 \cdot 18 = 36$$

Notación

$<$ menor que

$>$ mayor que

$\leqslant$ menor o igual que

$\geqslant$ mayor o igual que

Observa:

- $a \leqslant b$ significa que $a < b$, o bien, que $a = b$.
- $a \geqslant b$ significa que $a > b$, o bien, que $a = b$.

Tipos de sucesiones

Para clasificar una sucesión, comparamos los términos que la componen. Así, una sucesión puede ser:

— Sucesión **creciente,** si:

$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \dots \leqslant a_n \leqslant \dots$

Ejemplo: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4...

— Sucesión **decreciente,** si:

$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \dots \geqslant a_n \geqslant \dots$

Ejemplo: 5, 1, 1, −1, −2, −2...

— Sucesión **estrictamente creciente,** si:

$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$

Ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5, 6...

— Sucesión **estrictamente decreciente,** si:

$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$

Ejemplo: 4, 2, 0, −2, −4,−6...

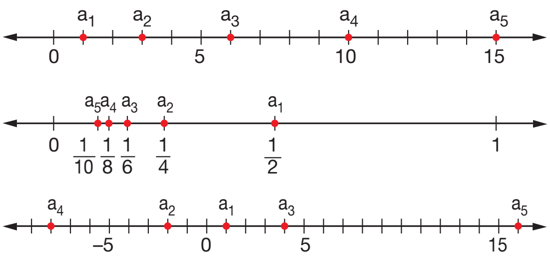
@

¿Qué es una sucesión acotada superiormente? ¿Y acotada inferiormente? Pon un ejemplo de cada una de ellas. Puedes consultar la página http://www.sectormatematica.cl/contenidos/sucacot.htm.

3.2. Representación gráfica

Los términos de una sucesión son números reales, por lo que podremos representarlos sobre la recta real. Veamos algunos ejemplos:

- 1, 3, 6, 10, 15...
- $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}...$
- 1, –2, 4, –8, 16...



También podemos representar gráficamente una sucesión en un sistema de coordenadas cartesianas en el plano representando los pares (1, a_1), (2, a_2), (3, a_3)...

En la figura 1 puedes observar la representación gráfica de la sucesión 1, 3, 6, 10, 15... en un sistema de coordenadas cartesianas.

Esta representación permite visualizar mejor las propiedades y las características de las sucesiones.

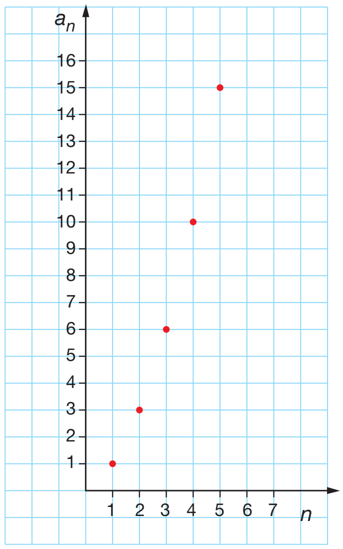


Fig. 1

Actividades

6 Escribe doce términos consecutivos de la sucesión de los múltiplos de 5. ¿Puedes escribir todos los múltiplos de 5? Razona tu respuesta.

7 ¿Cómo expresarías los siguientes términos?

a) El anterior a a_n.

b) El posterior a a_n.

c) El siguiente a a_{n-2}.

d) El anterior del anterior a a_n.

8 Escribe la expresión del término general de las sucesiones siguientes.

a) 3, 6, 9, 12, 15, 18...

b) $2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}...$

c) 3, 5, 7, 9, 11, 13...

d) 1, 4, 9, 16, 25, 36...

9 Escribe los diez primeros términos de la sucesión cuyo término general es:

a) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+2}$

b) $a_n = \dfrac{n^2-3n+1}{n+2}$

10 Clasifica estas sucesiones como crecientes o decrecientes, y represéntalas gráficamente.

a) 2, 0, –2, –4, –6...

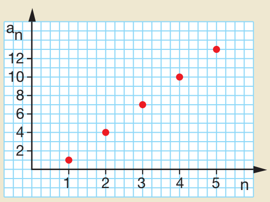
b) 3, –3, 3, –3, 3...

c) Los siete primeros múltiplos de 3.

d) 4, 7, 10, 10, 12...

11 Observa la representación gráfica de una sucesión.

— Escribe los cinco primeros términos de la sucesión y calcula la expresión del término general.



Sucesión de Fibonacci

De la sucesión **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...** en la que cada término, excepto los dos primeros, se halla sumando los dos términos inmediatamente anteriores, se dice que es recurrente porque para calcular un término hay que recurrir a términos anteriores.

Esta sucesión es conocida como **sucesión de Fibonacci,** por ser este matemático italiano el primero en describirla. Y, curiosamente, se encuentra en numerosos ejemplos de la naturaleza: la disposición de las formas de la piña, de las hojas alrededor del tallo en algunas plantas o de las semillas en la flor del girasol.

@

Busca ejemplos en la naturaleza en los que esté presente la sucesión de Fibonacci. Obtendrás ayuda en la página http://www.juntadeandalucia.es/averroes/recursos_informaticos/concurso02/alumnado/naturaleza.html.

4 Patrones de crecimiento lineal

Geométricamente es posible representar las partes de un término algebraico.

En un monomio podemos distinguir al coeficiente y la parte literal, esta última puede tomar valores de un conjunto ordenado de números, formando así una sucesión, veamos algunos ejemplos:

En el monomio $4a$, la parte literal puede tomar los valores del conjunto de los números naturales, formando un nuevo conjunto.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\} \longrightarrow 4a \longrightarrow 0; 4; 8; 12; ...$$

$$4a = 4 \cdot 0 = 0$$
$$4a = 4 \cdot 1 = 4$$
$$4a = 4 \cdot 2 = 8$$
$$4a = 4 \cdot 3 = 12$$

El nuevo conjunto representa una sucesión de números que aumenta.

También podemos usar al conjunto de los números enteros positivos para encontrar una sucesión a partir del monomio $\frac{2}{b}$.

En este caso, como no existe la división para cero, debemos excluir a este número e ir asignando otros valores del conjunto de los enteros a la parte literal del monomio.

$$\mathbb{Z}^{+} - \{0\} = \{1; 2; 3; 4; 5...\} \longrightarrow 4a \longrightarrow 2; 1; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{5}...$$

$$\frac{2}{b} = \frac{2}{1} = 2$$
$$\frac{2}{b} = \frac{2}{2} = 1$$
$$\frac{2}{b} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{2}{b} = \frac{2}{4} = \frac{2}{4}$$
$$\frac{2}{b} = \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

Los elementos de este nuevo conjunto, forman una sucesión de elementos que decrece continuamente al aumentar el valor del conjunto de los números enteros positivos sin el cero. A las expresiones algebraicas que asociadas a un conjunto ordenado producen una sucesión creciente, se las conoce como patrones crecientes, mientras que las que producen una sucesión decreciente se las conoce como patrones decrecientes.

Antes de encontrar los valores que representan a un patrón de crecimiento, debemos simplificar los términos de la expresión matemática, para interpretar el patrón con facilidad.

ejemplo 5

Encuentra seis términos de la sucesión formada a partir del conjunto de los números naturales y de la expresión algebraica siguiente: $4x - \frac{2x^3}{x^2}$

a) En primer lugar, simplificamos la expresión algebraica.

$$4x - \frac{2x^3}{x^2} = 4x - 2x^{3-2} = 4x - 2x = 2x$$

b) Luego, reemplazamos los primeros elementos del conjunto de los números naturales, en la expresión algebraica resultante, $2x$:

Elementos del conjunto ℕ	Elementos de la serie resultante
0	2x = 2(0) = 0
1	2x = 2(1) = 2
2	2x = 2(2) = 4
3	2x = 2(3) = 6
4	2x = 2(4) = 8
5	2x = 2(5) = 10

Para crear cada elemento de las sucesiones anteriores hemos utilizado a un conjunto ordenado de elementos. Cada par de elementos, uno de la sucesión y otro del conjunto ordenado, forma un par ordenado al que lo podemos graficar, observa:

ejemplo 6

Grafica la sucesión del ejercicio anterior.

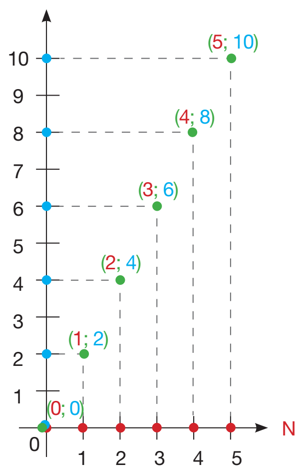
a) Primero, formamos los pares ordenados donde el primer elemento del par es el número del conjunto ordenado y el segundo es el elemento de la sucesión que se formó a partir de ese elemento.

(0;0) ; (1;2) ; (2;4) ; (3;6) ; (4;8) ; (5;10)

b) Luego, en el eje de las abscisas de un plano cartesiano, representamos los elementos del conjunto ordenado.

c) Seguido, en el eje de las ordenadas, colocamos los elementos de la sucesión que se encontraron a partir del conjunto ordenado.

d) Finalmente, graficamos los puntos que forman en el plano los pares ordenados.



Actividades

12 Utilizando el conjunto de los números naturales encuentra los cinco primeros elementos de las sucesiones formada a partir de los siguientes términos. Indica si son crecientes o decrecientes y realiza su gráfico.

a) $\frac{2b}{3}$ b) $3x + 1$ c) $\frac{c}{3} - 1$ d) $\frac{2}{x} + 2$

5 Función de primer grado

FÍJATE

Las **funciones de primer grado** son funciones polinómicas de primer grado, cuya expresión algebraica es de la forma:

$$y = mx + b$$

donde $m \neq 0$.

Vamos a estudiar las *funciones de primer grado* o *funciones afines,* que son aquellas cuya expresión algebraica es un polinomio de primer grado en la variable *x*. En el caso particular que la ordenada en el origen sea nula estas funciones reciben el nombre de *funciones lineales* o *de proporcionalidad directa.* El dominio de la función son los números reales.

5.1. Función lineal o de proporcionalidad directa

En primer lugar, vamos a estudiar la *función lineal* o *de proporcionalidad directa.* Para ello, veamos el siguiente ejemplo.

El espacio recorrido por un atleta que se desplaza a una velocidad constante de 15 km/h está en función del tiempo que invierte en recorrerlo.

Expresamos esta dependencia en la siguiente tabla de valores.

Tiempo en horas (*x*)	1	2	3	4
Espacio recorrido en kilómetros (*y*)	15	30	45	60

Observamos que se trata de dos magnitudes directamente proporcionales, es decir, que existe entre ellas una proporcionalidad directa.

La constante de proporcionalidad viene dada por el cociente entre el valor del espacio recorrido y el valor del tiempo correspondiente.

$$\frac{15}{1} = \frac{30}{2} = \frac{45}{3} = \frac{60}{4} = 15$$

En general, se cumple que $\frac{y}{x} = 15$, es decir, la expresión algebraica de esta función es $y = 15x$. Diremos que es una *función lineal o de proporcionalidad directa.*

@

Analiza algunas características de la función lineal y realiza las actividades que se proponen en la página http://www.pntic.mec.es/Descartes/Autoformacion/Archivos_comunes/La_funcion_lineal.htm

Si consideramos ahora un ciclista que se desplaza a una velocidad constante de 40 km/h, la función que relaciona el espacio recorrido y el tiempo transcurrido viene dada en la siguiente tabla de valores.

Tiempo en horas (*x*)	1	2	3	4
Espacio recorrido en kilómetros (*y*)	40	80	120	160

Fig. 1

En este caso, la constante de proporcionalidad es:

$$\frac{40}{1} = \frac{80}{2} = \frac{120}{3} = \frac{160}{4} = 40$$

La expresión algebraica de la función es $y = 40x$.

Al representar en el mismo sistema de coordenadas cartesianas las gráficas de estas dos funciones (fig. 1), observamos que ambas son semirrectas cuyo punto inicial es el origen de coordenadas.

Además, la inclinación de la semirrecta dada por $y = 40x$ respecto al semieje positivo de abscisas es mayor que la de la semirrecta dada por $y = 15x$.

Esta inclinación depende de la constante de proporcionalidad, de manera que cuanto mayor sea dicha constante, mayor será la inclinación de la recta respecto al semieje positivo de abscisas.

Así pues, la constante de proporcionalidad es igual a la **pendiente de la recta,** que representaremos por *m.*

Para calcular el valor de la pendiente, efectuamos el cociente entre un valor de la variable *y* con relación al valor correspondiente de la variable *x.*

$$\frac{y}{x} = m$$

FÍJATE

Una función lineal o de proporcionalidad directa es:

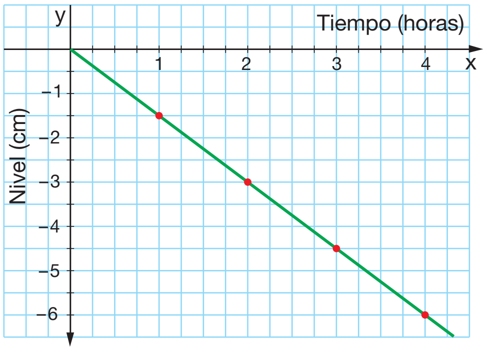
- *Creciente,* si la constante de proporcionalidad es positiva.
- *Decreciente,* si la constante de proporcionalidad es negativa.

Consideremos ahora la siguiente situación.

Un embalse se encuentra lleno. Al abrir las compuertas, el nivel del agua desciende 1,5 cm cada hora.

Expresamos esta dependencia en la siguiente tabla de valores.

Tiempo en horas *(x)*	1	2	3	4
Nivel *(y)*	–1,5	–3	–4,5	–6



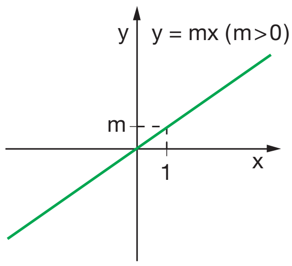
En este caso, la constante de proporcionalidad es –1,5 y la expresión algebraica de la función es $y = -1{,}5\,x$.

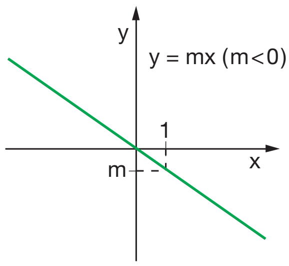
La gráfica de esta función es también una semirrecta cuyo punto inicial es el origen de coordenadas, pero su pendiente es negativa.

En general, la función lineal o de proporcionalidad directa se define para cualquier valor de la variable *x* y expresa la relación entre dos variables directamente proporcionales.

Una **función lineal** o **de proporcionalidad directa** es una función cuya expresión algebraica es de la forma $\boldsymbol{y = m\,x}$ ($m \neq 0$), siendo *m* la *constante de proporcionalidad.*

Su **gráfica** es una **recta** que pasa por el **origen de coordenadas** y tiene **pendiente *m.***





Actividades

13 Representa gráficamente las siguientes funciones lineales.

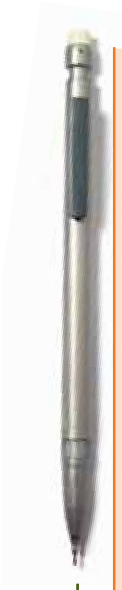
a) $y = 3\,x$ b) $y = -2\,x$ c) $y = 0{,}4\,x$

— Indica en cada una de ellas la pendiente de la recta.

14 La sandía es una fruta con muy bajo aporte energético: 30 kcal/100 g. Elabora una tabla de la energía aportada en función de la masa de sandía ingerida y dibuja la gráfica correspondiente. Calcula la pendiente de la recta obtenida.

15 Un alimento con un alto aporte energético son las nueces: 675 kcal/100 g. Elabora la gráfica de la energía aportada en función de la masa de nueces ingerida y compárala con la de la actividad anterior.

Cómo resolver problemas



Un vendedor de enciclopedias puede elegir dos opciones en el momento de firmar su contrato laboral:

Opción A: $ 1 800 fijos mensuales.

Opción B: $ 800 fijos mensuales más $ 50 por cada enciclopedia que venda.

a) Obtén la expresión algebraica de las funciones que proporcionan el sueldo de un mes en función del número de enciclopedias vendidas.

b) Representa gráficamente estas dos funciones.

c) Si el vendedor prevé una venta mensual de 25 enciclopedias, ¿qué opción le interesa más?

d) ¿Cuántas enciclopedias han de venderse como mínimo para que la opción B sea más beneficiosa?

▶ **Comprensión** del enunciado

— Vuelve a leer el enunciado.

— Anota los datos conocidos y lo que te piden.

▶ **Planificación** de la resolución

Observamos que en ambas opciones la relación de dependencia es una función.

Hallamos la expresión algebraica de las funciones correspondientes a la opción A y a la opción B.

Realizamos la representación gráfica de estas funciones en un mismo sistema de coordenadas.

A partir de las gráficas de ambas funciones, responderemos a los apartados *c)* y *d)*.

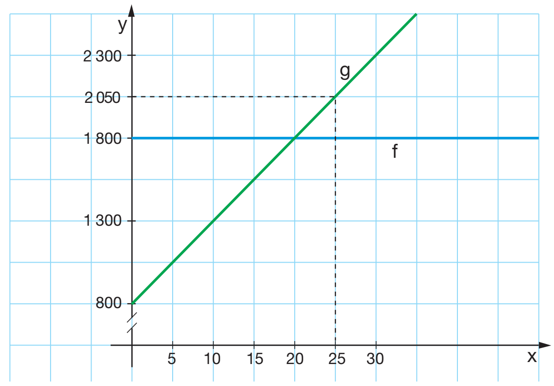
▶ **Ejecución** del plan de resolución

a) Las expresiones algebraicas de las dos funciones son:

Opción A: $y = f(x) = 1\,800$

Opción B: $y = g(x) = 800 + 50x$

b) Representamos gráficamente estas dos funciones.



c) A partir de las gráficas, obtenemos:

$$f(25) = 1\,800 \quad ; \quad g(25) = 2\,050$$

Por lo tanto, la opción B es la más favorable.

d) Observamos en las gráficas anteriores que $f(x) < g(x)$ si $x > 20$. Así, la opción B es la más beneficiosa siempre que se vendan más de 20 enciclopedias.

▶ **Revisión** del resultado y del proceso seguido

Podemos comprobar el resultado del apartado *c)* a partir de las expresiones algebraicas de las funciones *f* y *g*.

Podemos comprobar que el resultado del apartado *d)* es correcto constatando que se cumple la condición $f(x) < g(x)$ para algunos valores de x mayores que 20.

Actividades

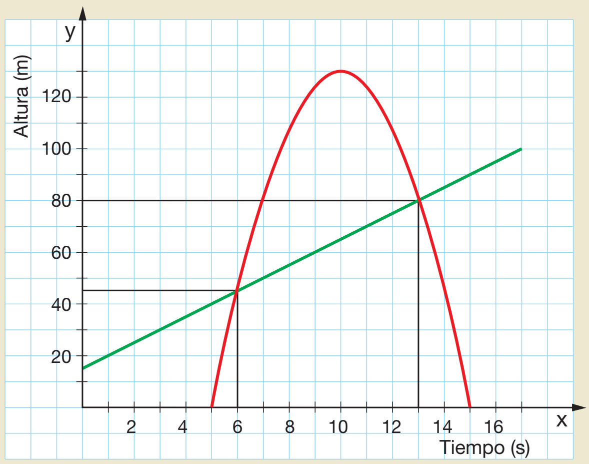
16 En la figura de la derecha, la gráfica verde representa la altura en función del tiempo de un globo sonda lanzado desde lo alto de una torre. La gráfica roja representa la altura en función del tiempo de un proyectil disparado verticalmente y hacia arriba.

a) ¿Qué altura tiene la torre desde donde se lanza el globo sonda?

b) ¿Cuánto tiempo transcurre entre que se lanzan el globo sonda y el proyectil?

c) ¿En qué instantes ambos están a la misma altura?

d) ¿En qué intervalo de tiempo el proyectil está por encima del globo?



En resumen

- La **potencia** de **base** un número **real** a y **exponente** un número **natural** n es el producto del número a por sí mismo, n veces.

$$\mathbf{a}^{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} \quad ; \quad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n} = \frac{1}{a^{n}}$$

$$\mathbf{a}^{1} = a \quad ; \quad \mathbf{a}^{0} = 1$$

- La **raíz enésima** del número real $\mathbf{b}$ es el número real $\mathbf{a}$ si se cumple que $\mathbf{a}^{n} = \mathbf{b}$. Se expresa .

$$\sqrt[n]{b} = a \quad \begin{cases} \sqrt[n]{b} \text{ es el radical.} \\ n \text{ es el índice del radical.} \\ b \text{ es el radicando.} \\ a \text{ es la raíz.} \end{cases}$$

- **Propiedades de las operaciones con radicales**

  Dados los números reales a, b, c y d, se cumple:

$$a\sqrt[n]{b} + c\sqrt[n]{b} = (a + c)\sqrt[n]{b}$$

$$a\sqrt[n]{b} \cdot c\sqrt[n]{d} = a \cdot c\sqrt[n]{b \cdot d}$$

$$\frac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{d}} = \frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$$

$$(a\sqrt[n]{b})^{m} = a^{m}\sqrt[n]{b^{m}} \quad ; \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

- Para **introducir un factor** en un radical se eleva dicho factor al índice del radical.

- La potencia de base un número real a y de exponente un número racional $\frac{m}{n}$ se define como la raíz de índice n y radicando a^{m}.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

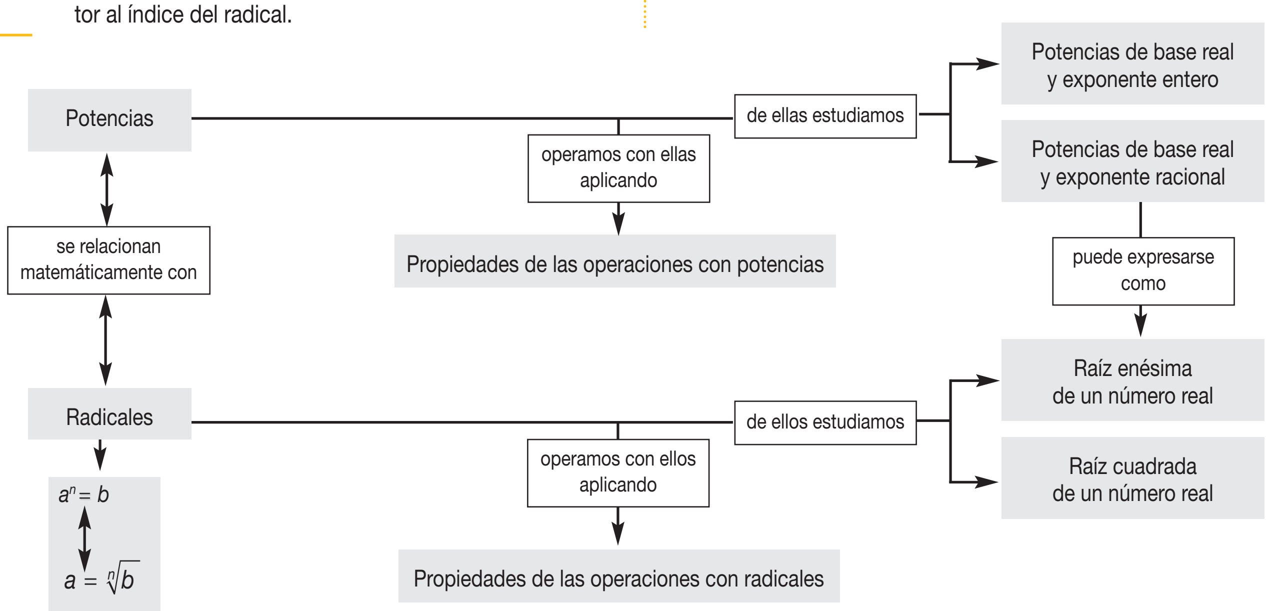
- **Propiedades de las operaciones con potencias de base real y exponente racional**

  Si $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son números reales y $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ números racionales, se cumple:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} \qquad a^{\frac{m}{n}} \div a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} \quad (a \neq 0)$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} \qquad (a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$



- Una **sucesión numérica** es una función en la que la variable independiente es un número natural y la variable dependiente es un número real. Cada uno de los elementos del conjunto imagen recibe el nombre de **término.**

  La expresión matemática que relaciona la posición que ocupa un término con su valor se denomina expresión del **término general.**

- Una **función constante** es una función cuya expresión algebraica es de la forma $y = b$, siendo b la ordenada en el origen.

  Su gráfica es una recta paralela al eje de abscisas por lo que tiene pendiente 0.

- Una **función lineal** o **función de proporcionalidad directa** es una función cuya expresión algebraica es de la forma $y = m\,x$ ($m \neq 0$), siendo m la constante de proporcionalidad.

  Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene pendiente m.

Ejercicios y problemas integradores

La suma de los primeros n números enteros

Vamos a encontrar una expresión que nos permita calcular la suma de los primeros **n** números enteros. Aplicaremos el método del célebre matemático árabe del siglo X, al-Karhki, para ello, iniciamos desarrollando el cuadrado de un binomio. Así

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

Trasponiendo al lado izquierdo la potencia $\mathbf{k^2}$, te quedará:

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$$

Haciendo que $\mathbf{k = 1, 2, 3, \ldots, n-1}$, obtienes $\mathbf{(n-1)}$ fórmulas. Así por ejemplo, cuando $\mathbf{k = 1}$, obtendrás

$$2^2 - 1^2 = 2(1) + 1$$

Cuando $k = 2$, obtendrás

$$3^2 - 2^2 = 2(2) + 1$$

Y así sucesivamente, hasta cuando $k = n-1$. Te quedará

$$n^2 - (n-1)^2 = 2(n-1) + 1$$

Juntando convenientemente las fórmulas, resultará:

$$\begin{aligned}
2^2 - 1^2 &= 2(1) + 1,\\
3^2 - 2^2 &= 2(2) + 1,\\
4^2 - 3^2 &= 2(3) + 1,\\
&\vdots\\
(n-1)^2 - (n-2)^2 &= 2(n-2) + 1,\\
n^2 - (n-1)^2 &= 2(n-1) + 1.
\end{aligned}$$

Al sumar estas fórmulas, todos los términos del lado izquierdo (señalados en rojo) se cancelan

$$\begin{aligned}
\boxed{2^2} - \boxed{1^2} &= 2(1) + 1,\\
\boxed{3^2} - \boxed{2^2} &= 2(2) + 1,\\
\boxed{4^2} - \boxed{3^2} &= 2(3) + 1,\\
&\vdots\\
\boxed{(n-1)^2} - \boxed{(n-2)^2} &= 2(n-2) + 1,\\
\boxed{n^2} - \boxed{(n-1)^2} &= 2(n-1) + 1.
\end{aligned}$$

excepto dos (señalados en verde), y extrayendo el factor común en la suma del lado derecho se obtiene:

$$n^2 - 1^2 = 2[1 + 2 + \ldots + (n-1)] + \boxed{(n-1).}$$

Se obtiene al sumar los términos independientes de las **n-1** fórmulas enlistadas antes.

Reescribiendo y usando la notación de suma, te quedará:

$$n^2 - 1^2 = 2\sum_{k=1}^{n-1} k + (n-1).$$

Trasponiendo términos, te quedará:

$$n^2 - 1^2 - (n-1) = 2\sum_{k=1}^{n-1} k.$$

Destruyendo el paréntesis, se producirá:

$$n^2 - 1 - n + 1 = 2\sum_{k=1}^{n-1} k.$$

Reduciendo términos semejantes

$$n^2 - n = 2\sum_{k=1}^{n-1} k.$$

y factorando, obtendrás:

$$n(n-1) = 2\sum_{k=1}^{n-1} k.$$

En el lado derecho obtuviste lo que buscabas, la suma de los primeros **(n – 1)** números. Despejándola, obtienes:

$$\frac{n(n-1)}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} k$$

¡Pero necesitas la suma de los n primeros números enteros! Para ello suma **n** a los dos lados de la igualdad anterior. Te quedará:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \sum_{k=1}^{n-1} k \quad + n$$

Operando en el lado izquierdo tienes

$$\frac{n(n-1) + 2n}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} k \quad + n$$

Reduciendo términos semejantes, resultará:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k$$

Es decir, la suma de la sucesión de los primeros n números enteros

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Has obtenido las siguientes fórmulas:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2},$$

y

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Junto a tus compañeros puedes encontrar:

- La suma de los diez primeros números enteros. Sin usar la fórmula y luego usando la fórmula.

- La suma de los cien primeros números enteros. Sin usar la fórmula y luego usando la fórmula, (investiga la anécdota del joven Gauss y la suma de estos números).

FÍJATE

Notación sigma para la suma

Es una notación abreviada para las sumas, se la nombra como notación sigma debido al uso de la letra griega mayúscula sigma

$$\sum_{i=1}^{n} a = i$$

Donde, i es el índice de la suma, indica el límite inferior de la suma

e informa el lugar que ocupa el sumando en la sucesión, ai es el término i-ésimo de la suma (cualquiera de los términos) y n es el límite superior de la suma.

Unos ejemplos:

$$\sum_{i=3}^{6} a_i = a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

$$\sum_{i=1}^{4} i = 1 + 2 + 3 + 4$$

Ejercicios y problemas

Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

En tu cuaderno

Potencias de base real y exponente entero

17 Expresa las siguientes operaciones en forma de una sola potencia de base positiva.

a) $(+2)^3 \cdot (+2)^{-4} \cdot (-2)^4$

b) $(+7)^{-2} \cdot (7^3)^3 \cdot (-7)^4$

18 Expresa el resultado de cada una de estas operaciones en forma de una sola potencia.

a) $\dfrac{(-5)^2 \cdot (+5)^5}{5^2}$ b) $\dfrac{(-9)^5 \div (-9)^{-4}}{(-9)^{-3} \cdot (-9)^2}$

19 Transforma las siguientes potencias para que tengan exponente positivo.

a) 12^{-5} b) $(a-1)^{-3}$ c) $\left(\dfrac{8x}{3}\right)^{-2}$

20 Resuelve los siguientes ejercicios, simplificando primero cada término.

a) $\dfrac{2x}{x^2} + \dfrac{6}{3x}$

b) $\dfrac{16(zxy)^2}{4y^2} + \dfrac{40z^2x^2}{10} - 30(xz)^2$

c) $\dfrac{14y^3}{7y^2} - 7y$

d) $\dfrac{21c^4}{14c^3a} + \dfrac{5a}{25a^2}$

21 Simplifica y resuelve los siguientes ejercicios, extrayendo el factor común.

a) $\dfrac{8yx^2}{6yx} - \dfrac{4x^2}{2x}$

b) $\dfrac{45x^3y - 15x^2y^2}{15yx^2}$

c) $\dfrac{12b^2a - 14ba^2 + 6a^2b}{9b - 7a}$

22 Encuentra los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones, y determina si corresponden a un patrón creciente o decreciente.

a) $\dfrac{1}{x}$ c) $\dfrac{x}{2}$

b) $\dfrac{3}{2x} + 2$ d) $2x - 3$

23 Simplifica las siguientes expresiones algebraicas y grafica los cinco primeros términos usando el conjunto de los números naturales.

a) $\dfrac{2xy}{4x} + 1$ c) $\dfrac{5y}{15xy} - 2$

b) $\dfrac{9x}{3x^2}$ d) $\dfrac{4xy - 2y}{2y}$

Función de primer grado

24 ¿Cuántos puntos de la gráfica de una función lineal necesitamos conocer para deducir su expresión algebraica? ¿Y de una función afín no lineal?

25 ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas corresponden a funciones lineales, afines o constantes? ¿Cuáles no son funciones?

a) $y = 8x - 2$ c) $x = 4$

b) $y = -5$ d) $y = 7x$

26 La gráfica de una función lineal pasa por el punto (2, 6). Indica cuál de los siguientes puntos pertenece a la gráfica de dicha función.

a) (4, 6) b) (1, 3) c) (2, 4)

27 Representa gráficamente las siguientes funciones lineales.

a) $y = x$ b) $y = -x$ c) $y = -6x$

— Indica en cada una de ellas la pendiente de la recta.

28 Construye una tabla de valores y representa gráficamente las funciones de proporcionalidad directa dadas por estas relaciones.

a) El precio de una vivienda y su superficie, si cada metro cuadrado cuesta $ 1 500.

b) El gasto en gasolina de un auto y los kilómetros recorridos, si cada 100 km gasta $ 8.

Sucesiones

29 ¿Cualquier lista de números es una sucesión? Razona tu respuesta.

30 Expresa con una frase cómo se construye cada una de estas sucesiones y escribe, en su caso, el término siguiente.

a) 3, 6, 9, 12, 15... d) 1, 3, 5, 7, 9...

b) 64, 60, 56, 52, 48... e) 2, 3, 5, 8, 13...

c) 1, 4, 9, 16, 25... f) 0, 2, 6, 12, 20...

31 Considera la sucesión 3, 6, 11, 18, 27... y resuelve los siguientes apartados:

a) Halla la expresión del término general.

b) Calcula el término a_{100}.

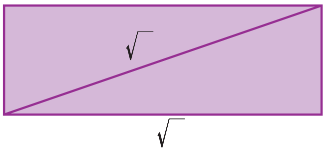
32 Halla los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones cuyos términos generales son:

a) $a_n = 4 - 3n$ c) $a_n = \dfrac{3n - 2}{n}$

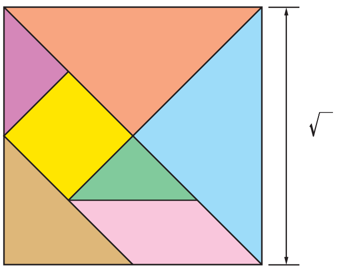
b) $a_n = \dfrac{5n - 3}{2n}$ d) $a_n = \dfrac{n^2 - 2}{2n}$

Aplicación en la práctica

33 La base de un rectángulo mide $4\sqrt{7}$ cm y la diagonal $5\sqrt{5}$ cm. Halla su altura y su área.



34 Observa el *tangram* de la figura y halla el área de cada una de las piezas que lo componen.

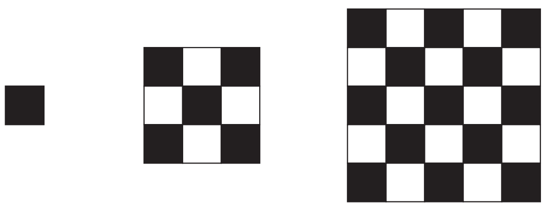


35 a) Halla el volumen de una esfera de $5^{\frac{2}{3}}$ cm de radio.

b) Halla el radio de una esfera cuyo volumen es $36\,\pi$ cm^3.

36 @ Busca en Internet el proyecto Descartes, allí encontrarás muchos ejercicios matemáticos. En este caso busca los materiales sobre radicales.Lee atentamente la página y resuelve los ejercicios propuestos.

37 Observa la siguiente sucesión de figuras formadas cada una de ellas por cuadrados blancos y negros.



a) Dibuja dos figuras más de esta sucesión.

b) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Figura	1	2	3	4	5
Cuadrados blancos					
Cuadrados negros					
Número total de cuadrados					

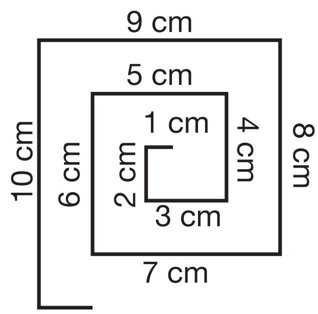
c) ¿Cuántos cuadrados blancos y cuántos cuadrados negros son necesarios para construir una figura formada por 10^2 cuadrados?

d) ¿Cuántos cuadrados blancos y cuántos cuadrados negros son necesarios para construir una figura formada por 121 cuadrados?

38 Unos amigos recorren una parte del Camino del Inca durante 6 días. El primer día andan 20 km, y cada día aumentan de forma progresiva la distancia hasta acabar con una etapa de 35 km.

¿Cuántos kilómetros hicieron en cada etapa y cuántos en total?

39 Al completar la línea poligonal de la figura, la longitud del último segmento es de 30 cm. ¿Cuál es la longitud total de la línea poligonal?



40 Para ir a patinar un día festivo con los compañeros y las compañeras de clase alquilamos unos patines. El precio del alquiler es de \$ 12 diarios.

a) Representa gráficamente la función que relaciona el importe del alquiler según el número de horas diarias de uso de los patines.

b) ¿Cuál es la pendiente de la recta obtenida?

41 El metro cuadrado de papel que se utiliza para empapelar una habitación de 40 m^2 cuesta \$ 3.

a) Confecciona una tabla de valores y representa gráficamente la función que relaciona los metros cuadrados de pared con el importe.

b) ¿Cuánto cuesta el papel necesario para empapelar toda la habitación?

42 La longitud de la sombra que proyecta un edificio, a una hora determinada, y la altura del edificio son magnitudes directamente proporcionales. Indica las expresiones algebraicas de las funciones de proporcionalidad directa que se obtienen en los siguientes casos.

a) Un edificio de 24 m, a las 8 de la mañana, proyecta una sombra de 30 m.

b) El mismo edificio, a las 10 de la mañana, proyecta una sombra de 20 m.

— Construye una tabla de valores para los 6 m, 12 m, 18 m y 24 m de altura del edificio, y representa gráficamente ambas funciones.

— Determina la pendiente de cada recta.

— ¿Qué crees que ocurrirá a las 11 de la mañana? ¿Las sombras serán mayores o menores?

43 Lee las condiciones de cada uno de estos hoteles.

Hotel La Laguna

Precio por persona/día $ 70
Primer día gratis
Estadía mínima 5 días


http://tardor.files.wordpress.com

Hotel El Mar

Precio por persona/día $ 60
Estadía mínima 2 días


http://www.visitingbarcelona.info

a) Confecciona, para cada uno de los hoteles, la tabla de valores relativa a los diez primeros días de estandía en el hotel.

b) Expresa algebraicamente cómo varía el costo en cada uno de los hoteles al aumentar la estadía.

c) Representa gráficamente las funciones obtenidas en el apartado anterior.

d) ¿Cuánto pagará una persona al cabo de 5 días en cada uno de los hoteles?

e) ¿Al cabo de cuántos días resulta más económico el hotel El Mar?

f) El coste de la estadía de una persona en el hotel es de $ 480. ¿En qué hotel se ha alojado? ¿Cuántos días?

44 Una excursionista se encuentra a 100 m de una señal de un cruce de carreteras y empieza a desplazarse en línea recta alejándose de la señal a una velocidad de 1,5 m/s.

a) ¿Qué espacio recorrerá en 5 minutos? ¿A qué distancia de la señal se encontrará en ese instante?

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo se hallará a 400 m de la señal?

c) Escribe la expresión algebraica de la función que relaciona la distancia a la que se halla la excursionista de la señal con el tiempo transcurrido.

d) Representa gráficamente dicha función.

Más a fondo

45 Piensa y resuelve:

a) $2^x = 8 \rightarrow x =$ ......

b) $2^x + 3^x = 35 \rightarrow x =$ ......

c) $4 \cdot 3^x = 405 - 3^x \rightarrow x =$ ......

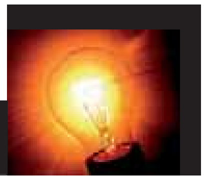
46 Escribe la sucesión de los cuadrados de los diez primeros números naturales.

— Forma una nueva sucesión cuyos términos sean las diferencias entre dos términos consecutivos de la sucesión anterior.

— Repite el proceso anterior con la última sucesión. ¿Qué observas?

47 Diego quiere recorrer una distancia de 5 m saltando en un solo pie.

En el primer salto alcanza los 2 m y en cada uno de los siguientes avanza la mitad que en el anterior. ¿Logrará recorrer la distancia que se había planteado?



El examen

Un examen tipo test consta de 30 preguntas. Cada respuesta correcta vale 3 puntos, mientras que por cada respuesta en blanco o incorrecta se resta 1 punto. Si un alumno ha obtenido 70 puntos, ¿cuántas preguntas ha contestado correctamente?

Para aprobar, hay que obtener un mínimo de 42 puntos. ¿A cuántas respuestas correctas equivalen?

Adivinar el número

Una chica propone a su amiga el siguiente truco de adivinación.

—Piensa un número. Súmale 10. Ahora, multiplica el resultado por 2. A continuación,réstale 8. Divide el número que tienes entre 2. Ahora, resta el número que has pensado inicialmente.

Deja que me concentre. Voy a adivinar el número que has obtenido. Veamos... Es el 6, ¿no es cierto?

—Sí, exacto, pero... ¿cómo lo haces?

—Es muy fácil, la respuesta siempre es 6.

Juego de tablero

Dos amigos juegan cinco partidas de un juego de tablero. Uno gana cuatro partidas y el otro tres. ¿Cómo es posible?

Buen Vivir

Hábitat y vivienda

La demanda de vivienda en el Ecuador es un problema social, ya que, se trata de una de las necesidades básicas en la población, principalmente urbana, que ha adquirido características preocupantes, puesto que ni todo el presupuesto del Estado podría cubrir los requerimientos habitacionales de la actualidad. Las causas para este problema son muchas: la migración del campo a la ciudad, con el consecuente crecimiento demográfico urbano; la falta de acceso a fuentes de trabajo estables y bien remuneradas que impiden a las personas adquirir una vivienda; la escasez de planes habitacionales populares que provocan invaciones y asentamientos no planificados. Es preciso que comencemos a cambiar esta situación.

Actividades

1. Consulten, en el municipio de su localidad, sobre las políticas habitacionales que se implementarán en los próximos cinco años y el porqué de su decisión.
2. Investiguen cuántas familias de sus compañeros/as poseen vivienda propia y cuántas pagan alquiler.
3. Consulten, en la página web del INEC, la demanda de vivienda en el Ecuador y cuál ha sido el crecimiento de la población urbana y rural con relación al censo del año 2000 y 2010.
4. Reflexionen acerca del siguiente postulado: “el acceso a la vivienda es un derecho fundamental de las personas”. Planteen argumentos que respalden esta posición si están a favor.
5. Organicen junto con sus familias y comunidades una propuesta viable para cubrir las necesidades habitacionales de su comunidad. Propongan este proyecto a las autoridades locales.
6. Lleven la propuesta anterior a sus colegios y socialícenla. Recuerden que la comunidad es un actor fundamental para el progreso y el desarrollo del país.

Autoevaluación | Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

1. Expresa en forma de una sola potencia de base π:

a) $(\pi^{-5} \cdot \pi^{-3} \cdot \pi^{6})^2$

b) $\pi^5 \cdot \left(\pi^{\frac{1}{2}} \div \pi^{-3}\right)$

2. Escribe el término siguiente de la sucesión 2, 6, 12, 20, 30...

3. Indica los valores de m y b para que la expresión algebraica $y = mx + b$ corresponda a:

a) Una función constante.

b) Una función lineal o de proporcionalidad directa.

c) Una función afín.

4. Determina la expresión algebraica de una función lineal sabiendo que pasa por el punto $P\left(\frac{7}{4}, \frac{7}{2}\right)$.

1. Expresen $\left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{-2}$ en forma de una sola potencia de base 2.

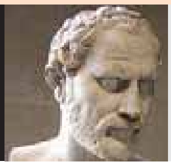
2. Hallen la expresión del término general de la sucesión

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{7}{6}...$

3. Completen en sus cuadernos los siguientes enunciados:

a) El eje de .... viene dado por la recta $y = 0$ y el eje de ordenadas viene dado por la recta ....

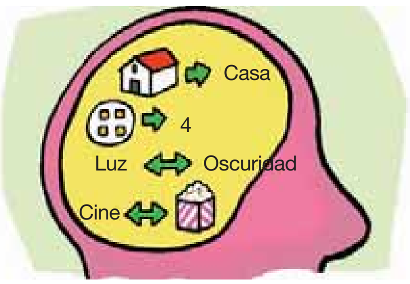
b) Para conocer la ecuación de una recta basta con conocer .... puntos de ésta, o bien, un punto de la recta y el valor de su ....



Historia

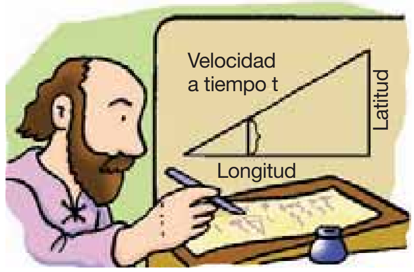
Sección de historia

El cerebro humano funciona asociando ideas. Así, la noción de correspondencia es natural en la persona.



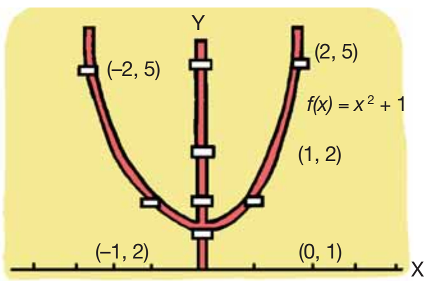
Los babilonios recogieron muchos datos astronómicos en forma de tabla de valores y trataron de relacionarlos para predecir la situación de los cuerpos celestes.

En la obra *De configurationibus qualitarum te motuum,* de Oresme (s. XIV), se refleja la idea primitiva de gráfica de una función.

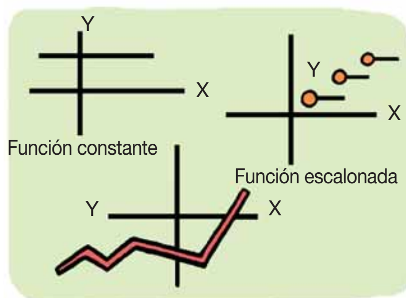


Galileo (s. XVII) recoge la idea de función en sus estudios sobre el movimiento.

Las coordenadas cartesianas y el perfeccionamiento del lenguaje algebraico permiten en el siglo XVII definir la gráfica y la expresión algebraica de una función.



Desde el siglo XVIII, se estudian y se clasifican las funciones en la rama de las matemáticas llamada *análisis.*

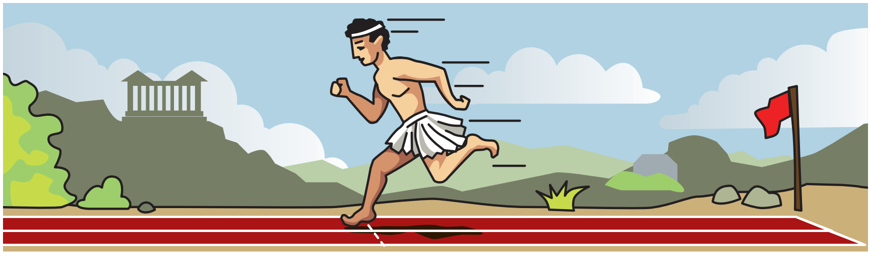


Crónica matemática

El filósofo griego Zenón de Elea (495-435 a. C.) provocó una crisis en la matemática antigua al enunciar algunas paradojas llenas de ingenio. Una de ellas, llamada **paradoja del corredor,** puede exponerse de la manera siguiente:

Un corredor no puede alcanzar la meta porque siempre ha de recorrer la mitad de una distancia antes de recorrer la distancia total. Es decir, cuando haya recorrido la mitad de la distancia, le quedará todavía la cuarta parte; cuando haya recorrido la mitad de la cuarta parte, le quedará todavía la octava parte; y así sucesiva e indefinidamente.

Hubo que esperar unos 2000 años para que la afirmación de Zenón de que un número infinito de cantidades positivas no puede tener una suma finita fuera contradicha con el desarrollo de la teoría de series.

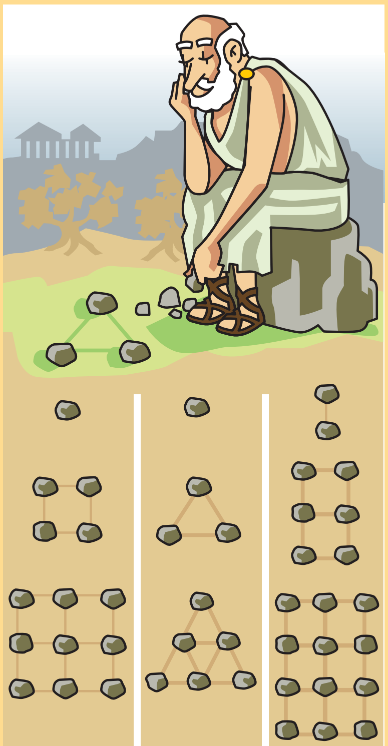


Pitágoras nació hacia el año 569 a. C. en la isla de Samos. Discípulo de Tales, fundó una hermandad de tipo religioso, científico y filosófico, los *pitagóricos.*

Entre sus muchas actividades estaba el estudio de los números. Los pitagóricos representaban los números con piedras y los clasificaban según las formas que adoptaban al distribuirlos. Así, tenemos: los números *cuadrados* (1, 4, 9, 16...), los números *triangulares* (1, 3, 6, 10...), los números *rectangulares* (2, 6, 12, 20...)...

— A partir de la figura, calcula el quinto término de cada una de las sucesiones anteriores.

— Descubre el término general de cada una de estas sucesiones.



Visita la siguiente página de Internet y amplía tus conocimientos de la escuela pitagórica: http://thales.cica.es/rd/Recur sos/rd97/Biografias/12-1-b-pitagoras.html

Según cuenta la tradición, el problema de hallar el valor de la suma de los cien primeros números naturales fue planteado en 1787 por un profesor a su clase de niños de 10 años con la intención de mantenerlos ocupados un buen tiempo. En esa clase se encontraba el que es conocido como «príncipe de las matemáticas», el alemán Carl F. Gauss.

Gauss observó que si sumaba el primer término con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y, así, sucesivamente, obtenía siempre el mismo resultado.

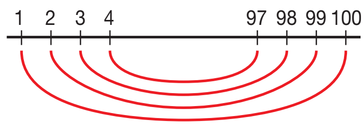
Es decir:

$$1 + 100 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$3 + 98 = 101$$

...



Así dedujo que la suma de los cien primeros números naturales es:

$$101 \cdot 50 = 5050$$

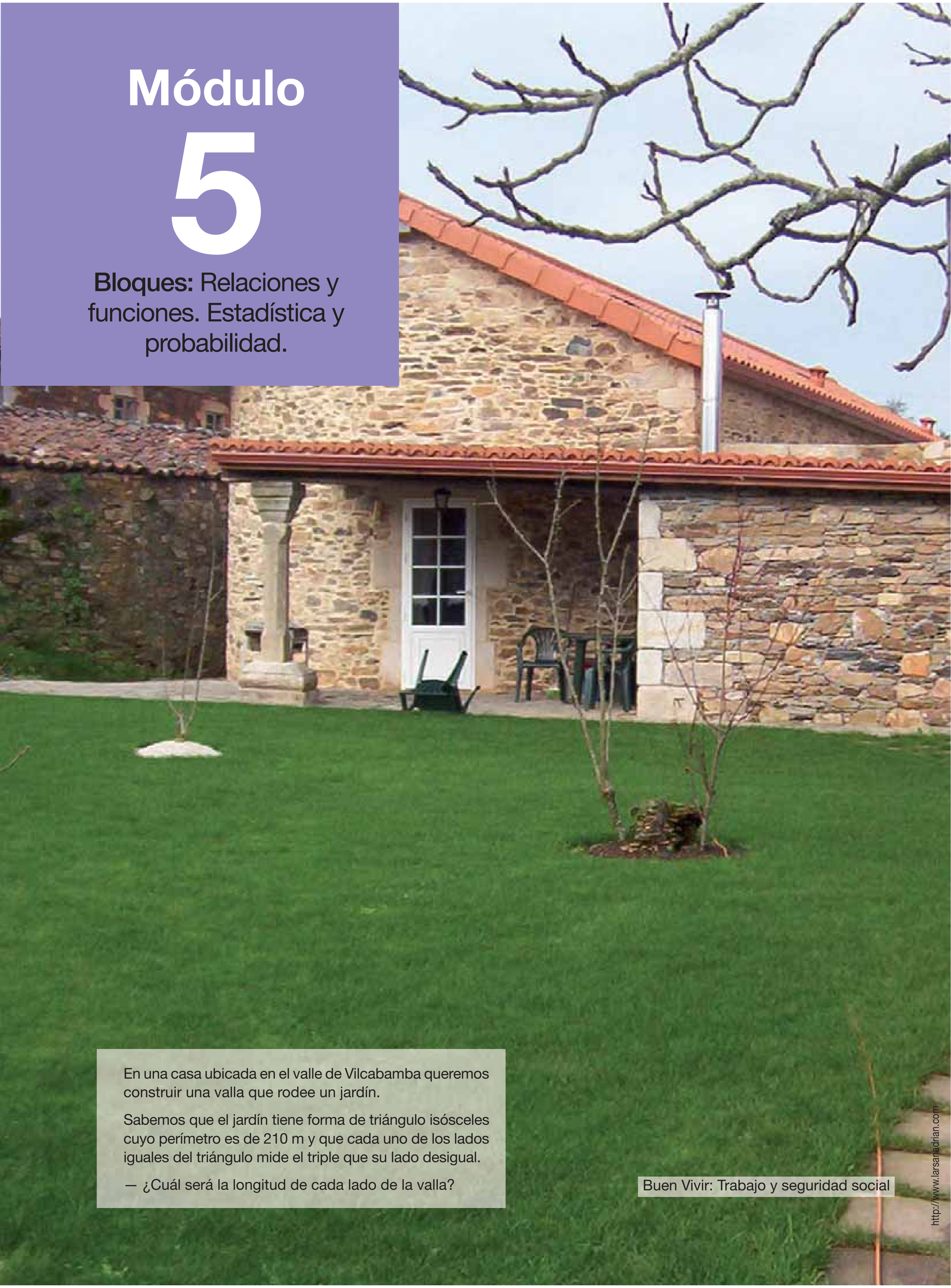
Gauss asombró al profesor por la manera tan rápida e ingeniosa de resolver el problema.

Gauss dio la primera señal de su genio antes de cumplir los tres años. A esa edad aprendió a leer y hacer cálculos aritméticos mentales con tanta habilidad que descubrió un error en los cálculos que había hecho su padre para pagar unos sueldos.

Poco después de su muerte se acuñaron monedas en su honor. Gauss fue gran admirador de Arquímedes y Newton, a quienes citaba en sus trabajos llamándolos *illustrissimus*.

Módulo 5

Bloques: Relaciones y funciones. Estadística y probabilidad.



En una casa ubicada en el valle de Vilcabamba queremos construir una valla que rodee un jardín.

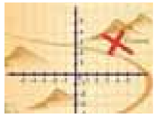
Sabemos que el jardín tiene forma de triángulo isósceles cuyo perímetro es de 210 m y que cada uno de los lados iguales del triángulo mide el triple que su lado desigual.

— ¿Cuál será la longitud de cada lado de la valla?

Buen Vivir: Trabajo y seguridad social

http://www.larsanadrian.com

Ecuaciones e inecuaciones de primer grado
Diagramas de tallo y hojas



Con tus conocimientos de álgebra: *lograrás plantear* y *resolver* ecuaciones e inecuaciones sencillas y *solucionarás* problemas utilizando ecuaciones. También, *aprenderás* a *elaborar* diagramas en estadística.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Resolver ecuaciones de primer grado con procesos algebraicos.
- Resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita con procesos algebraicos.
- Utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones en contextos diversos como la vida cotidiana y los ámbitos socioeconómico, científico y social.
- Resolver problemas de la vida cotidiana utilizando ecuaciones e inecuaciones.
- Tener predisposición para comprobar los resultados obtenidos en la resolución de problemas.
- Utilizar los símbolos propios de las desigualdades, así como sus principales características.
- Representar datos estadísticos en diagramas de tallo y hojas.

Prerrequisitos

Recuerda

- Para elevar una fracción a una potencia, se elevan el numerador y el denominador a esta potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

- La representación gráfica de los números reales llena por completo la recta llamada **recta real.**
- Dados dos números reales *a* y *b* diremos que ***b* es mayor que *a*** si al efectuar su representación gráfica sobre la recta real, *b* queda situado a la derecha de *a*.
- Dados dos números reales *a* y *b,* el conjunto de números comprendidos entre ellos se denomina **intervalo** de **extremos** *a* y *b*.
- Los **intervalos** pueden ser:

— **Cerrados,** si contienen los extremos.

— **Abiertos,** si no contienen los extremos.

— **Semiabiertos,** si contienen sólo uno de los extremos.

Evaluación diagnóstica

- Calcula el doble de 6, el triple de 12 y la quinta parte de 25.
  — ¿Cómo representarías el doble de un número cualquiera *a*? ¿Y el triple? ¿Y su quinta parte?
- Calcula el valor que se obtiene al sustituir *a* por –3 y *b* por $\frac{1}{2}$ en la expresión siguiente:

$$2 \cdot a^2 - 4 \cdot a \cdot b$$

- Ordena de mayor a menor estos números.

$$-3,\ 5,\ 0,\ -2,\ -4,\ -1,\ -1{,}5$$

— Represéntalos sobre la recta real.

- Representa estos intervalos en la recta real.

a) (–5, 2) b) [–3, 3] c) [3, 7) d) (–5, 9]

- Escribe tres números reales que pertenezcan simultáneamente a cada uno de los siguientes intervalos.

a) (3, 4) b) (+ ∞, 4] c) (1, + ∞) d) (–1, 5)

Trabajo y seguridad social

Buen Vivir

Art. 34.- El Estado garantizará a las personas trabajadoras el pleno respeto a su dignidad, una vida decorosa, remuneraciones y retribuciones justas y el desempeño de un trabajo saludable y libremente escogido o aceptado.

Constitución de la República del Ecuador, 2008.

1 Igualdad y ecuación

El signo igual, =, es muy importante en matemáticas y se utiliza en diversas situaciones.

- Para conectar una operación con su resultado: $6 \cdot (3 + 2) = 30$
- Para conectar los diferentes pasos de un proceso: $6 \cdot (3 + 2) = 6 \cdot 5 = 30$
- Para relacionar dos procesos que dan el mismo resultado: $3 + 2 = 9 - 4$

En este último sentido, también podemos emplearlo para expresar una **igualdad** entre dos **expresiones algebraicas:**

$$3a + 2a = 9a - 4a$$

La expresión situada a la izquierda del signo igual recibe el nombre de **primer miembro** y la expresión situada a su derecha se denomina **segundo miembro.**

Si damos diferentes valores a las letras de las expresiones siguientes, podemos comprobar que:

$3x + 2x = 5x$	$3x + 4 = 10$	$3x + 2 = 3x - 1$
Se verifica para cualquier valor de *x*.	Sólo se cumple para $x = 2$.	No se verifica para ningún valor de *x*.

Así, podemos definir *identidad* y *ecuación.*

Una **identidad** es una igualdad que se verifica para *cualquier valor* numérico de las letras que aparecen en ella.

Una **ecuación** es una igualdad que se verifica para *algunos valores* numéricos de las letras que aparecen en ella.

La letra (o letras) que aparece en la ecuación se denomina **incógnita.**

La **solución** de la ecuación es el valor o valores numéricos de la incógnita que hacen cierta la igualdad.

Dos ecuaciones que tengan las mismas soluciones se llaman **ecuaciones equivalentes.**

Actividades

1 Identifica la incógnita, el primer miembro y el segundo miembro de la siguiente ecuación.

$$5\,(x + 2) = 3x + 14$$

— ¿Cuál de los siguientes valores es solución de la ecuación?

$x = -3$ $\quad$ $x = 0$ $\quad$ $x = 2$

2 Averigua si cada uno de los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes.

a) $2x = 4\ ;\ 2x - 3 = 1$ $\quad$ b) $2x = 9 - 3\ ;\ 3x - 3 = 2 - x$

2 Ecuaciones

En las operaciones con expresiones algebraicas hemos usado ya el signo igual (=). También puede ser que al traducir al lenguaje algebraico un enunciado obtengamos una igualdad.

El triple de un número más cuatro es igual a diez: $3x + 4 = 10$

Observa que esta igualdad no se cumple para todos los valores de x.

$3 \cdot \mathbf{4} + 4 \neq 10 \qquad 3 \cdot (\mathbf{-2}) + 4 \neq 10 \qquad 3 \cdot \mathbf{2} + 4 = 10$

Las letras que aparecen en una ecuación se denominan **incógnitas.** $\Rightarrow$ $3x + 4 = 10$. La incógnita es la x.

El valor de la incógnita que hace que se cumpla la igualdad en una ecuación es una **solución** de dicha ecuación. $\Rightarrow$ La solución es $x = 2$.

Resolver una ecuación es determinar el valor de la incógnita que hace que se cumpla la igualdad, es decir, hallar su solución.

Podemos resolver ecuaciones sencillas formulándonos una breve pregunta sobre las condiciones que debe satisfacer la incógnita para que se cumpla la igualdad. Observa el siguiente ejemplo.

ejemplo 1

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x + 6 = 14$ *b)* $3x = 18$ *c)* $\frac{x}{4} = 9$ *d)* $3x + 5 = 11$

a) ¿Qué número sumado a 6 da 14? Solución: 8.

b) ¿Qué número multiplicado por 3 da 18? Solución: 6.

c) ¿Qué número dividido por 4 da 9? Solución: 36.

d) ¿Qué número da 11 al multiplicarlo por 3 y añadirle 5? Solución: 2.

La igualdad $2x + 2x = 4x$ se cumple para cualquier valor de x. Se trata de una *identidad.*

FÍJATE

Usos del signo igual (=)

Usamos el signo igual (=) para relacionar dos expresiones que tienen el mismo valor.

- Al conectar una operación con su resultado.

$3 + 4 = 7$

$3a + 4a = 7a$

- Al conectar los diferentes pasos de un proceso.

$2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$

$2 \cdot (3a + 4a) = 2 \cdot 7a = 14a$

- Para relacionar dos procesos que dan el mismo resultado.

$3 + 4 = 2 + 5$

$3a + 4a = 2a + 5a$

FÍJATE

Una igualdad es una relación entre dos expresiones matemáticas que tienen el mismo valor.

Toda igualdad consta de dos miembros separados por el signo igual (=).

$\underbrace{3x + 4}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{10}_{\text{Segundo miembro}}$

Actividades

3 Identifica la incógnita, el primer miembro y el segundo miembro en la siguiente ecuación.

$5(x + 2) = 3x + 14$

— ¿Cuál de los siguientes valores es solución de la ecuación?

$x = -3 \qquad x = 0 \qquad x = 2$

4 Resuelve estas ecuaciones planteándote una breve pregunta.

a) $14 = x + 2$

b) $17 - x = 14$

c) $x - 8 = -2$

d) $35 = 5x$

e) $\frac{x}{2} + 1 = 6$

f) $2x + 5x = 21$

MATERIAL CONCRETO

Construye una balanza de dos brazos para que compruebes lo siguiente:

Las igualdades se comportan como una balanza. Observa.

Esta balanza está equilibrada porque las dos botellas pesan lo mismo que los tres botes.

Si añadimos un mismo peso a cada uno de los platillos, la balanza continuará estando equilibrada.

Si ponemos el doble de lo que hay en cada platillo, la balanza continuará estando equilibrada.

FÍJATE

Dado que $a = b$ es lo mismo que $b = a$, al resolver una ecuación escribiremos la forma que nos resulte más cómoda.

El valor $x = -1$ es solución de la ecuación $2\,x = -2$. La ecuación $x + 2 = 1$ tiene la misma solución. Diremos que las dos ecuaciones son *equivalentes.*

> Dos ecuaciones son **equivalentes** si, aún teniendo distintos términos, tienen la misma solución.

2.1. Propiedades de las ecuaciones

Estudiemos dos propiedades de las ecuaciones que nos permiten pasar de una ecuación a otra equivalente.

Propiedad 1

Si **sumamos** un mismo número o expresión algebraica a los dos miembros de una ecuación, obtenemos una ecuación equivalente.

$x + 2 = 1$ (solución $x = -1$)

$\mathbf{+\,3}$:

$x + 2 \mathbf{+ 3} = 1 \mathbf{+ 3}$

$x + 5 = 4$ (sol. $x = -1$)

$\mathbf{+(-2x)}$:

$x + 2 \mathbf{- 2x} = 1 \mathbf{- 2x}$

$2 - x = 1 - 2\,x$ (sol. $x = -1$)

Propiedad 2

Si **multiplicamos** por un mismo número, distinto de 0, los dos miembros de la ecuación, obtenemos una ecuación equivalente a la primera.

$x + 2 = 1$ (solución $x = -1$)

$\mathbf{\cdot\,2}$:

$(x + 2) \cdot \mathbf{2} = 1 \cdot \mathbf{2}$

$2\,x + 4 = 2$ (sol. $x = -1$)

$\mathbf{\cdot(-5)}$:

$(x + 2) \cdot \mathbf{(-5)} = 1 \cdot \mathbf{(-5)}$

$-5\,x - 10 = -5$ (sol. $x = -1$)

Observa, en el siguiente ejemplo, cómo utilizamos estas propiedades para resolver ecuaciones.

ejemplo 2

Utiliza las propiedades de las ecuaciones para hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $x + 8 = 5$ *b)* $3\,x = 12$

Debemos conseguir que la incógnita quede sola en el primer miembro con coeficiente 1.

a) Sumamos -8 a los dos miembros, o lo que es lo mismo, restamos 8.

$$x + 8 - 8 = 5 - 8$$

$$x = -3$$

b) Multiplicamos los dos miembros por $\frac{1}{3}$, que equivale a dividirlos por 3.

$$3\,x \cdot \frac{1}{3} = 12 \cdot \frac{1}{3}$$

$$x = 4$$

Actividades

5 Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las siguientes.

a) $-3\,x = 15$ b) $y - 3 = 0$ c) $z + 8 = 0$

6 Resuelve estas ecuaciones.

a) $x + 2 = 21$ b) $35 = 5x$ c) $17 - x = 14$

3 Resolución de ecuaciones

Las ecuaciones en las que sólo aparece una incógnita y su mayor exponente es 1 se denominan **ecuaciones de primer grado con una incógnita.**

Veamos ahora algunos métodos para hallar la solución de una ecuación de primer grado con una incógnita; es decir, sepamos cómo resolverla.

> **Resolver** una ecuación es determinar los valores numéricos de la incógnita que satisfacen la igualdad, esto es, hallar las **soluciones.**

Aunque el método más utilizado es el método algebraico o método general, conozcamos antes otros dos procedimientos para resolver una ecuación.

Aplicaremos estos métodos para hallar la solución de $3x - 6 = 15$.

Ensayo-error

Consiste en dar valores a x hasta encontrar uno que satisfaga la igualdad.

— Para $x = 5$ $3 \cdot 5 - 6 = 9$ No se cumple, no llega a 15.

— Para $x = 9$ $3 \cdot 9 - 6 = 21$ No se cumple, se pasa.

— La solución de la ecuación es un número entre 5 y 9, y podemos obtenerla completando una tabla.

x	5	6	7	8	9
$3x - 6$	9	12	15	18	21

— La solución es $x = 7$ porque $3 \cdot 7 - 6 = 15$.

Razonamiento inverso

Consiste en efectuar, a partir del resultado, las operaciones inversas hasta llegar al valor inicial.

— En la ecuación $3x - 6 = 15$ se obtiene 15 al multiplicar la incógnita por 3 y restarle 6.

$$x \xrightarrow{\cdot 3} \xrightarrow{-6} 15$$

— Obtendremos la solución sumándole 6 a 15 y dividiendo el resultado por 3.

$$x \xleftarrow{\div 3} \xleftarrow{+6} 15$$

$15 + 6 = 21$ $21 : 3 = 7$

La solución es $x = 7$.

Actividades

7 Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando el método de ensayo-error.

a) $6 + x = 8$ b) $10x + 3 = 83$

8 Halla la solución de cada una de estas ecuaciones por el método del razonamiento inverso.

a) $3x + 5 = 17$ b) $\dfrac{x}{3} - 3 = 11$

4 Método general de resolución de ecuaciones

Hemos visto cómo se resuelven ecuaciones sencillas haciendo una pregunta breve o aplicando las propiedades. Conozcamos, a continuación, el procedimiento general para casos más complejos.

Procedimiento		Ejemplo: $6\,x - 3 = 2\,x + 9$
Transposición de términos	Pasamos a un miembro todos los términos que contienen la incógnita y al otro miembro, los términos que no la contienen.	Aplicamos la primera propiedad: sumamos a los dos miembros $3 - 2\,x$. $$6\,x \cancel{-3} \cancel{\mathbf{+3}} \mathbf{- 2\,x} = \cancel{2\,x} + 9 \mathbf{+ 3} \cancel{\mathbf{- 2\,x}}$$ $$6\,x - 2\,x = 9 + 3$$
Reducción de términos semejantes	Efectuamos las operaciones en cada miembro.	$$4\,x = 12$$
Despeje de la incógnita	Eliminamos el coeficiente de la incógnita.	Aplicamos la segunda propiedad: multiplicamos los dos miembros por $\frac{1}{4}$. $$\frac{4\,x}{4} = \frac{12}{4} \Leftrightarrow x = 3$$

Un consejo

Una vez resuelta la ecuación, debemos **comprobar** el resultado obtenido. Para ello, sustituimos el valor hallado de la incógnita y observamos que obtenemos una igualdad.

En el ejemplo 3, $x = 7$ es solución puesto que:

$$7 + 4 + 6 \cdot 7 - 15 = 3 + 5 \cdot 7$$
$$7 + 4 + 42 - 15 = 3 + 35$$
$$38 = 38$$

ejemplo 3

Resuelve la siguiente ecuación: $x + 4 + 6\,x - 15 = 3 + 5\,x$

Aplicamos los pasos del procedimiento general.

— Transposición de términos: sumamos $-4 + 15 - 5\,x$ a cada miembro.

$$x + \cancel{4} + 6\,x - \cancel{15} - \cancel{4} + \cancel{15} - 5\,x = 3 + \cancel{5\,x} - 4 + 15 - \cancel{5\,x}$$
$$x + 6\,x - 5x = 3 - 4 + 15$$

— Reducción de términos semejantes: $2\,x = 14$

— Despeje de la incógnita: dividimos por 2 cada miembro.

$$\frac{2\,x}{2} = \frac{14}{2}$$
$$x = 7$$

La solución de la ecuación es $x = 7$.

Actividades

9 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $3\,x + 30 = 80 + 2\,x$

b) $10 - 5\,x = 18 - 3\,x$

c) $4\,x + 3 = 48 + x$

10 Escribe una ecuación cuyo coeficiente de la incógnita sea 5 y cuya solución sea –3.

11 Escribe la expresión algebraica que corresponde a la siguiente frase: «Si sumamos 8 al triple de la edad de Marta, obtenemos 29».

—Resuelve la ecuación que has obtenido.

12 Basándote en la actividad anterior, invéntate un problema en el que intervengan tu edad y el número 20.

Las propiedades de las ecuaciones nos permiten obtener ecuaciones equivalentes.

Propiedad 1		
$x + 2 = 5$ (solución $x = 3$) $x + 2 + \mathbf{(-2)} = 5 + \mathbf{(-2)}$ $x = 3$ (solución $x = 3$)	Si **sumamos** un mismo número o expresión algebraica a los dos miembros de una ecuación, obtenemos una ecuación equivalente.	$3x + 1 = -x + 9$ (solución $x = 2$) $3x + 1 + \mathbf{(-1 + x)} =$ $-x + 9 + \mathbf{(-1 + x)}$ $4x = 8$ (solución $x = 2$)

Propiedad 2		
$x + 2 = 5$ (solución $x = 3$) $(x + 2) \cdot \mathbf{2} = 5 \cdot \mathbf{2}$ $2x + 4 = 10$ (solución $x = 3$)	Si **multiplicamos** por un mismo número, distinto de 0, los dos miembros de la ecuación, obtenemos una ecuación equivalente a la primera.	$3x + 1 = -x + 9$ (solución $x = 2$) $(3x + 1) \cdot \mathbf{(-3)} =$ $(-x + 9) \cdot \mathbf{(-3)}$ $-9x - 3 = 3x - 27$ (solución $x = 2$)

CONTRAEJEMPLO

La expresión:

$$x + 2 < 5$$

no corresponde a una igualdad.

El método general de resolución consiste en aplicar las propiedades de las ecuaciones para transformar la ecuación inicial en otra equivalente más sencilla.

Veamos su aplicación en ecuaciones sin paréntesis ni denominadores.

Procedimiento	Ejemplo: $4x + 3 = 48 + x$
Transposición de términos: Agrupamos en un miembro los términos que contienen la incógnita y, en el otro miembro, los términos que no la contienen.	Aplicamos la primera propiedad restando $3 + x$ a los dos miembros. $4x + \cancel{3} - \cancel{3} - x = 48 + \cancel{x} - 3 - \cancel{x}$ $4x - x = 48 - 3$
Reducción de términos semejantes: Efectuamos las operaciones en cada miembro.	$3x = 45$
Despeje de la incógnita: Eliminamos el coeficiente de la incógnita.	Aplicamos la segunda propiedad dividiendo por 3 los dos miembros. $\dfrac{3x}{3} = \dfrac{45}{3}$ $x = 15$

Comprobación de las soluciones

Una vez obtenida la solución de la ecuación, debemos efectuar la **comprobación.** Para ello, sustituimos, en la ecuación inicial, el valor de la incógnita hallado y vemos que se cumple la igualdad.

En el ejemplo de la izquierda, $x = 15$ es solución, puesto que:

$$4 \cdot 15 + 3 = 48 + 15$$

$$63 = 63$$

Actividades

13 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x + 3 = 7$

b) $7x + 4 = 10 - 3x$

c) $2x + 3 = -x$

d) $45 - x = 4x + 25$

14 Explica cada uno de los pasos efectuados en la resolución de la ecuación $-x + 13 = 7 + 2x$.

$$-x + 13 = 7 + 2x \Rightarrow 13 - 7 = 2x + x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6 = 3x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

4.1. Ecuaciones con paréntesis

Si la ecuación que debemos resolver contiene **paréntesis,** lo primero que debemos hacer es eliminarlos de la forma habitual, es decir, aplicando la propiedad distributiva. Veamos algunos ejemplos.

ejemplo **4**

Resuelve la siguiente ecuación: $2(x-2)+3(x-3)=2-2(2x-1)+13$

— En primer lugar, suprimimos los paréntesis.

$$2x-4+3x-9=2-4x+2+13$$

Ahora ya podemos aplicar los pasos descritos en el método general.

— Transponemos términos de manera que los que llevan x queden en un miembro de la igualdad y los que no llevan x queden en el otro.

$$2x+3x+4x=2+2+13+4+9$$

— Reducimos los términos semejantes.

$$9x=30$$

— Despejamos la incógnita.

$$x=\frac{30}{9}=\frac{10}{3}$$

ejemplo **5**

Resuelve la siguiente ecuación: $2x-[6-2(5x-4)]=6x-2$

— Primero, eliminamos los paréntesis.

$$2x-(6-10x+8)=6x-2$$

$$2x-6+10x-8=6x-2$$

— Transponemos términos.

$$2x+10x-6x=-2+6+8$$

— Reducimos los términos semejantes.

$$6x=12$$

— Despejamos la incógnita.

$$x=\frac{12}{6}=2$$

Actividades

15 Resuelve estas ecuaciones.

a) $2x+21=3x-6$

b) $12(x-2)=1-x$

c) $x+5x-4=18-2x$

d) $3x-2+7x=7-1$

e) $4(2x+3)-2x=4x+20$

f) $34=3x-6+2x$

16 Resuelve:

a) $6(7-x)=8(6-x)$

b) $-8(10-x)=-6$

c) $(x+2)\cdot 3=(13-x)\cdot 4+3$

d) $3(1-2x)+12=10-2(x-3)$

e) $4(x-6)=12-(x+3)$

f) $-2(x+3)-4=18+4x$

g) $2(3x+1)-x+6=2(x-1)$

h) $6x-2(x-3)=12$

4.2. Ecuaciones con denominadores

A menudo, encontraremos ecuaciones con denominadores. En estos casos, debemos transformar la ecuación en otra sin denominadores para proceder, a continuación, con el método general de resolución. Observa cómo resolvemos las ecuaciones de los siguientes ejemplos.

ejemplo 6

Resuelve la ecuación: $\frac{x}{4} = \frac{x}{3} - 1$

— Primero, suprimimos los denominadores multiplicando los dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, m.c.m. (3, 4) = 12.

$$12 \cdot \frac{x}{4} = 12 \cdot \left(\frac{x}{3} - 1 \right)$$

$$\frac{12}{4} x = \frac{12}{3} x - 12$$

$$3x = 4x - 12$$

— Ahora, resolvemos esta ecuación tal y como hemos visto anteriormente: transponemos términos, reducimos términos semejantes y despejamos la incógnita.

$$3x - 4x = -12$$

$$-x = -12$$

$$x = \frac{-12}{-1} = 12$$

ejemplo 7

Resuelve la ecuación: $\frac{4x - 4}{5} - \frac{2x + 1}{3} = -7$

— Suprimimos los denominadores multiplicando los dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, m.c.m. (5, 3) = 15.

$$15 \cdot \left(\frac{4x - 4}{5} - \frac{2x + 1}{3} \right) = 15 \cdot (-7)$$

$$\frac{15}{5}(4x - 4) - \frac{15}{3}(2x + 1) = -105$$

$$3(4x - 4) - 5(2x + 1) = -105$$

— A continuación, resolvemos esta ecuación de la forma que hemos visto anteriormente.

Fíjate en que, al suprimir los denominadores, han aparecido paréntesis.

$$3(4x - 4) - 5(2x + 1) = -105$$

$$12x - 12 - 10x - 5 = -105$$

$$12x - 10x = -105 + 12 + 5$$

$$2x = -88$$

$$x = \frac{-88}{2} = -44$$

ejemplo 8

Resuelve la ecuación: $\frac{2x - 4}{x + 1} = \frac{4}{5}$

— Para suprimir los denominadores, tenemos en cuenta que esta ecuación es una igualdad entre dos fracciones.

Por este motivo, podemos transformarla en una ecuación sin denominadores utilizando la propiedad fundamental de las fracciones equivalentes.

$$(2x - 4) \cdot 5 = (x + 1) \cdot 4$$

$$5(2x - 4) = 4(x + 1)$$

— Ahora, resolvemos esta ecuación tal y como hemos visto anteriormente.

$$10x - 20 = 4x + 4$$

$$10x - 4x = 4 + 20$$

$$6x = 24$$

$$x = \frac{24}{6} = 4$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones **en forma de proporción.**

En el caso general en que una ecuación incluya **paréntesis** y **denominadores,** los primeros pasos de la resolución deben ir encaminados a eliminarlos.

Observa, en el ejemplo siguiente, los pasos que han de seguirse.

ejemplo **9**

Resuelve la ecuación: $\dfrac{2(x-1)}{3} - \dfrac{x+4}{15} + 1 = x - \dfrac{3(x-2)}{5}$

— Suprimimos los paréntesis de la forma habitual; es decir, aplicando la propiedad distributiva.

$$\frac{2x-2}{3} - \frac{x+4}{15} + 1 = x - \frac{3x-6}{5}$$

— Eliminamos los denominadores multiplicando los dos miembros por el m.c.m. de los denominadores.

$$15\left(\frac{2x-2}{3} - \frac{x+4}{15} + 1\right) = 15\left(x - \frac{3x-6}{5}\right)$$

$$5(2x-2) - (x+4) + 15 = 15x - 3(3x-6)$$

— Al suprimir los denominadores, suelen aparecer nuevos paréntesis. Debemos eliminarlos.

$$10x - 10 - x - 4 + 15 = 15x - 9x + 18$$

— Aplicamos el método general: transponemos los términos, reducimos los términos semejantes y despejamos la incógnita.

$$10x - x - 15x + 9x = 18 + 10 + 4 - 15$$

$$3x = 17$$

$$x = \frac{17}{3}$$

Actividades

17 Resuelve estas ecuaciones y comprueba que las soluciones halladas sean las correctas.

a) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{x}{6}$

b) $\dfrac{2x-1}{5} - 5 = \dfrac{x+4}{3} - \dfrac{7}{2}$

c) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{5} + 1 = \dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{2}$

d) $2x - \dfrac{1-3x}{10} - \dfrac{2}{3} = 2(x-3) + \dfrac{1}{5}$

18 Halla la solución en cada caso.

a) $\dfrac{2x+4}{3} = \dfrac{4x}{7}$

b) $\dfrac{1}{5x-7} = \dfrac{-3}{2x-8}$

c) $\dfrac{x-5}{x+6} = \dfrac{4}{3}$

d) $\dfrac{6}{5} = \dfrac{x-7}{2(x+1)}$

Número de soluciones

Si nos fijamos en las igualdades tratadas hasta ahora, vemos que siempre se llega a una expresión de la forma:

$$\boldsymbol{a\,x = b}$$

Podemos encontrar diferentes casos, que dependen de los valores de *a* y *b.*

- Si $\boldsymbol{a \neq 0}$**,** la ecuación tiene **una única solución:**

$$a\,x = b \quad \rightarrow \quad x = \frac{b}{a}$$

- Si $\boldsymbol{a = 0}$**,** vemos que:

$$0 \cdot x = b \;\rightarrow\; 0 = b$$

Y distinguimos dos casos, dependiendo del valor de *b.*

— Si $\boldsymbol{b \neq 0}$**,** no puede haber ningún valor de x que verifique la ecuación, puesto que no existe ningún número que multiplicado por 0 dé diferente de 0: la ecuación **no tiene solución.**

— Si $\boldsymbol{b = 0}$**,** se establece la igualdad: $0 \cdot x = 0$, que se verifica para cualquier valor de *x,* puesto que cualquier número multiplicado por 0 da 0: la ecuación tiene **infinitas soluciones.**

El siguiente cuadro resume las distintas posibilidades que podemos encontrar en la resolución de una ecuación de la forma $a\,x = b$.

$$a\,x = b \begin{cases} a \neq 0 & \rightarrow \text{ Tiene una única solución: } x = \dfrac{b}{a} \\ a = 0 & \begin{cases} b \neq 0 \rightarrow & \text{No tiene solución.} \\ b = 0 \rightarrow & \text{Tiene infinitas soluciones.} \end{cases} \end{cases}$$

Actividades

19 Indica el número de soluciones en cada caso.

a) $2\,x + 5 = 7$

b) $\dfrac{5}{3} = \dfrac{10\,x - 7}{6\,(x + 1)}$

c) $2\,x - 2 = 2\,(x - 1)$

d) $7\,(2\,x + 1) = 14\,x$

20 Clasifica las siguientes igualdades en ecuaciones o identidades.

a) $x + 3 = 8$

b) $5\,x + 1 = 3\,x + 1 + 2\,x$

c) $3\,x - 2\,x = 5\,x$

d) $2\,x + 3 = 2\,x - 6$

e) $8 + x = 2\,x$

f) $2\,x = x + x$

g) $2\,(x + 1) = 4$

h) $x + 3 = 2\,x$

— ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de primer grado con una incógnita?

— Una ecuación de primer grado con una incógnita puede expresarse siempre de la forma $a\,x = b$. ¿Puede la a, en este caso, valer 0?

4.3. Aplicación a la resolución de problemas

Algunas veces, la resolución de problemas por métodos aritméticos resulta difícil. En estos casos, solemos utilizar letras para designar el dato desconocido y traducimos el enunciado al lenguaje algebraico, con lo que la resolución del problema se reduce a encontrar la solución de una ecuación.

Veamos el procedimiento general para resolver un problema mediante ecuaciones.

Procedimiento	Ejemplo
• **Lectura atenta del enunciado.** Es fundamental leer el problema las veces que sea necesario hasta que comprendamos perfectamente el enunciado.	*Al sumar 37 al doble de un número, obtenemos 97. ¿De qué número se trata?*
• **Elección de la incógnita.** Representamos con una x el valor que debemos determinar, es decir, la incógnita.	Representamos por x el número que no conocemos.
• **Planteamiento de la ecuación.** Escribimos las condiciones que establece el enunciado y las traducimos al lenguaje algebraico. Así, acabamos expresando por medio de una ecuación las relaciones que el enunciado establece entre los datos y la incógnita.	El doble del número más 37 es igual a 97. $2x + 37 = 97$
• **Resolución de la ecuación.** Determinamos los valores numéricos de la incógnita *(x)* que cumplen la ecuación.	$2x = 97 - 37$ $2x = 60$ $x = \dfrac{60}{2} = 30$
• **Respuesta.** Respondemos a la pregunta o preguntas del problema.	El número que nos piden es 30.
• **Comprobación.** Para comprobar si la solución del problema es correcta, tenemos que determinar si cumple todas y cada una de las condiciones del enunciado.	Veamos si al sumar 37 al doble de 30 obtenemos 97. $2 \cdot 30 + 37 = 60 + 37 = 97$

Actividades

21 Halla un número sabiendo que su tercera parte disminuida en 125 es igual a 175.

22 Busca un número sabiendo que su séptima parte más sus dos terceras partes da 51.

Mostremos algunos ejemplos en los que aplicamos el procedimiento anterior.

ejemplo 10

Un padre tiene 33 años y su hijo, 8. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el doble que la del hijo?

— **Lectura atenta del enunciado.** Lee de nuevo el problema y expresa el enunciado con tus palabras.

— **Elección de la incógnita.** Llamamos x al número de años que tienen que transcurrir.

	Edad padre	Edad hijo
Ahora:	33	8
Dentro de x años:	$33 + x$	$8 + x$

— **Planteamiento de la ecuacion.** Traducimos al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado.

$$33 + x = 2\,(8 + x)$$

— **Resolución de la ecuación.**

$$33 + x = 2(8 + x)$$
$$33 + x = 16 + 2x$$
$$x - 2x = 16 - 33$$
$$-x = -17$$
$$x = 17$$

— **Respuesta.** Dentro de 17 años.

— **Comprobación.** Veamos si la edad del padre dentro de 17 años será el doble que la del hijo.

El padre tendrá: $33 + 17 = 50$ años

El hijo tendrá: $8 + 17 = 25$ años

Efectivamente, 50 es el doble de 25 y, por lo tanto, la solución del problema es correcta.

ejemplo 11

Un ciclista recorre la distancia que separa dos ciudades en tres etapas. En la primera recorre un tercio del trayecto; en la segunda, un cuarto, y en la tercera, los 35 km restantes. ¿Cuántos kilómetros separan las dos ciudades?

— **Lectura atenta del enunciado.** Vuelve a leer el problema e interpreta el enunciado.

— **Elección de la incógnita.** Llamamos x a los kilómetros entre las ciudades. En cada etapa recorre:

1.ª etapa: $\frac{1}{3}x = \frac{1}{3} \cdot x = \frac{x}{3}$

2.ª etapa: $\frac{1}{4}x = \frac{1}{4} \cdot x = \frac{x}{4}$

3.ª etapa: 35 km

— **Planteamiento y resolución de la ecuación.**

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 35 = x \quad ; \quad \text{m.c.m.}(3, 4) = 12$$

$$12 \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 35\right) = 12 \cdot x$$

$$12 \cdot \frac{x}{3} + 12 \cdot \frac{x}{4} + 12 \cdot 35 = 12x$$

$$4x + 3x + 420 = 12x$$

$$4x + 3x - 12x = -420$$

$$-5x = -420 \quad ; \quad x = \frac{-420}{-5} = 84$$

— **Respuesta y comprobación.** La distancia es de 84 km. Comprobamos la respuesta.

$$\frac{1}{3}84 + \frac{1}{4}84 + 35 = 28 + 21 + 35 = 84$$

Actividades

23 Una madre tiene 57 años y su hijo, 32. ¿Cuántos años hace que la edad de la madre era el doble que la del hijo?

24 El perímetro de un rectángulo mide 72 cm. Calcula sus medidas sabiendo que la base es cinco veces la altura.

25 Un depósito de agua vacía el segundo día 2 l menos que el primero y el tercer día, el doble que el primero y el segundo juntos. Si el depósito en estos tres días ha vaciado 600 l, ¿cuántos litros vació el primer día?

26 Para celebrar una fiesta, Luis compra botellas de agua, de cola y de jugo. En total ha comprado 73 botellas. Si hay el triple de colas que de aguas y diez jugos más que colas, ¿cuántas botellas hay de cada clase?

5 Desigualdades

Con frecuencia, utilizamos las expresiones *mayor que* o *menor que* para comparar diferentes medidas de una magnitud como, por ejemplo, la temperatura.

En esta tabla te mostramos las temperaturas recogidas durante una semana del mes de enero.

Día	L	M	Mi	J	V	S	D
Temperatura (°C)	– 3	5	0	– 2	– 4	1	5

Observamos que la temperatura del lunes, – 3 °C, es menor que la del martes, 5 °C. También observamos que la del martes, 5 °C, es mayor que la del miércoles, 0 °C.

En lenguaje matemático, *ser menor que* se indica mediante el signo $<$, y *ser mayor que,* con el signo $>$. Observa:

$-3 < 5 \xrightarrow{\text{Indica}}$ – 3 es menor que 5.

$5 > 0 \xrightarrow{\text{Indica}}$ 5 es mayor que 0.

> Para expresar algebraicamente que un número ***a*** es **menor que** otro número ***b*,** escribimos ***a*** **<** ***b*.**
>
> Para expresar algebraicamente que un número ***a*** es **mayor que** otro número ***b*,** escribimos ***a*** **>** ***b*.**

Signos de desigualdad

$<$ menor que

$>$ mayor que

$\leq$ menor o igual que

$\geq$ mayor o igual que

Observa que:

- $a \leq b$ significa que $a < b$, o bien, que $a = b$.
- $a \geq b$ significa que $a > b$, o bien, que $a =$ b.

En la tabla anterior también observamos que la temperatura de cualquier día de la semana es menor o igual que 5 °C. Es decir, la temperatura 5 °C es mayor o igual que la de cualquier otro día. Para expresarlo utilizaremos los signos $\leq$ y $\geq$, respectivamente.

> Para expresar algebraicamente que un número ***a*** es **menor o igual que** otro número ***b*,** escribimos ***a*** **≤** ***b*.**
>
> Para expresar algebraicamente que un número ***a*** es **mayor o igual que** otro número ***b*,** escribimos ***a*** **≥** ***b*.**

Dos números, *a* y *b,* siempre cumplen alguna de las relaciones siguientes: ***a*** **<** ***b*, *a*** **>** ***b*, *a*** **≤** ***b*** o ***a*** **≥** ***b***. Estas relaciones se llaman **desigualdades.**

Los números situados a la izquierda del signo de desigualdad constituyen el **primer miembro** de ésta y los situados a la derecha constituyen el **segundo miembro.**

Desigualdad

a	≤	b
Primer miembro	Signo	Segundo miembro

Dados dos números, las desigualdades permiten establecer un criterio para determinar cuál es el mayor.

Observa la tabla siguiente.

Desigualdades	Primer miembro menos segundo miembro
$3 < 8$	$3 - 8 = -5 < 0$
$-4 < -2$	$-4 - (-2) = -2 < 0$
$9 > 3$	$9 - 3 = 6 > 0$
$5 > -2$	$5 - (-2) = 7 > 0$

Fíjate en que la diferencia entre el primer miembro y el segundo miembro de las desigualdades de la forma $a < b$ es **negativa** mientras que dicha diferencia, para las desigualdades de la forma $a > b$, es **positiva.** Así:

- Si $a < b$, entonces $a - b < 0$.
- Si $a > b$, entonces $a - b > 0$.

Puesto que, si $a = b$, evidentemente se tiene que $a - b = 0$. Podemos afirmar:

- Si $a \leq b$, entonces $a - b \leq 0$.
- Si $a \geq b$, entonces $a - b \geq 0$.

Actividades

27 Ordena de mayor a menor los siguientes números utilizando el signo de desigualdad correspondiente y represéntalos sobre la recta real.

$-3 \quad 0 \quad \frac{9}{7} \quad -8 \quad 4 \quad \frac{7}{2} \quad \pi$

28 Ordena de menor a mayor estos números.

a) $0{,}1$; 10^{-2} ; $0{,}01^{-2}$; -10^3 ; $0{,}1^3$

b) 2^{-3} ; 2^2 ; -2^2 ; $(-2)^3$; $(-2)^{-3}$

29 Indica si son ciertas o falsas las siguientes desigualdades.

a) $5 < -3$

b) $-8 < -3$

c) $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \geq \frac{5}{6}$

e) $2^{-5} \geq \frac{1}{32}$

f) $(3 + 4)^2 > 3^2 + 4^2$

g) $(5 - 3)^2 \leq 5^2 - 3^2$

h) $\frac{1}{4} \geq 4^{-1}$

i) $5 \cdot (-1) < -6$

j) $14 \cdot (-4) > -28 \cdot 2$

30 Escribe en tu cuaderno el signo de la desigualdad correspondiente.

a) $6 - 9 \ \square \ 1 - 5$

b) $\frac{4}{3} \ \square \ 3 \cdot (-2)$

c) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2} \ \square \ \frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{3} \cdot 5 \ \square \ 8 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$

e) $\frac{1}{3} \ \square \ 0{,}333...$

f) $0{,}125 \ \square \ \frac{1}{100}$

g) $2^{-3} \ \square \ \frac{1}{2}$

h) $5(3 - 1) \ \square \ 10$

i) $7^2 - 3^2 \ \square \ 40$

j) $3(2 - 7) \ \square \ -10$

31 Indica, en cada caso, algún valor de a que haga cierta la desigualdad correspondiente.

a) $a^2 > a$

b) $\frac{1}{a} < a$

c) $\frac{a}{3} < 0$

d) $3 \cdot \frac{a}{2} > \frac{a}{5}$

32 ¿Qué signo debe tomar a para que se cumpla $a^2 > a^3$? Justifica tu respuesta con tres ejemplos.

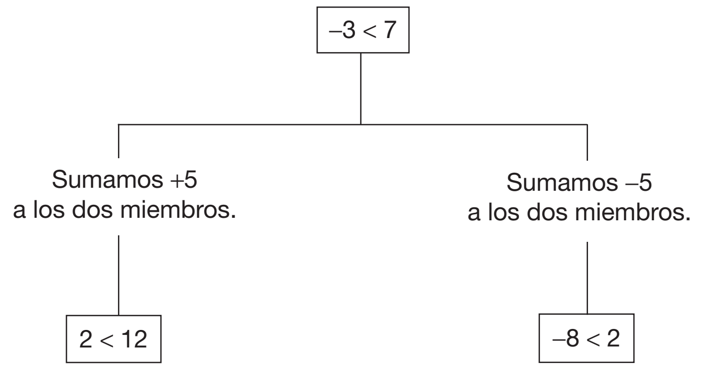
5.1. Propiedades

Sabemos que si sumamos o restamos el mismo número a los dos miembros de una igualdad, ésta se mantiene y también lo hace si multiplicamos o dividimos ambos miembros por un mismo número diferente de 0. Veamos si estas propiedades se cumplen en el caso de las desigualdades.

Propiedad 1

Consideramos la desigualdad $-3 < 7$.

Observa qué ocurre cuando sumamos un mismo número a los dos miembros de la desigualdad.

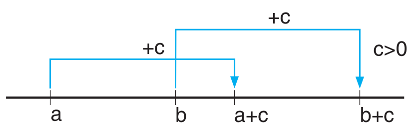


Si **sumamos** un mismo número a los dos miembros de una desigualdad, obtenemos otra desigualdad del **mismo sentido.**

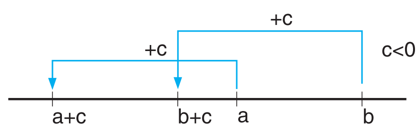
FÍJATE

Se dice que dos desigualdades son del **mismo sentido** si ambas llevan el signo < o el signo >.

Esta propiedad puede visualizarse gráficamente.



Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow a + c < b + c$



Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow a + c < b + c$

ejemplo 12

Escribe la desigualdad que resulta al efectuar en cada miembro de la desigualdad $8 > 5$ las siguientes operaciones:

a) Sumarle 12. *b) Restarle 6.*

a) Sumamos 12 a cada miembro de la desigualdad dada y obtenemos $20 > 17$.

— La desigualdad conserva el mismo sentido, cumpliendo así la propiedad 1.

b) Restamos el número 6 a cada miembro de la desigualdad dada y obtenemos $2 > -1$.

— La desigualdad conserva el mismo sentido. Cumple la propiedad 1, ya que restar 6 equivale a sumar -6.

Propiedad 2

Consideramos de nuevo la desigualdad $-3 < 7$.

Veamos qué sucede cuando multiplicamos los dos miembros por un mismo número distinto de 0.

$-3 < 7$

Multiplicamos por +5 los dos miembros. → $-15 < 35$

Multiplicamos por –5 los dos miembros. → $15 > -35$

Si **multiplicamos** por un mismo número distinto de 0 los dos miembros de una desigualdad:

- Si el número es **positivo,** se obtiene otra **desigualdad del mismo sentido.**
- Si el número es **negativo,** se obtiene otra **desigualdad de sentido contrario.**

ejemplo 13

Escribe la desigualdad que resulta al efectuar en cada miembro de la desigualdad $6 > -4$ las siguientes operaciones:

a) Dividir entre – 2. *b) Cambiar el signo.*

a) Dividimos entre –2 cada miembro de la desigualdad dada y obtenemos $-3 < 2$.

— La desigualdad no conserva el sentido. Se cumple la propiedad 2, ya que dividir entre –2 equivale a multiplicar por $-\dfrac{1}{2}$.

b) Cambiamos el signo a cada miembro de la desigualdad dada y obtenemos $-6 < 4$.

— La desigualdad no conserva el sentido. Se cumple la propiedad 2, ya que cambiar el signo en cada miembro equivale a multiplicar por –1.

Actividades

33 Escribe la desigualdad que resulta al efectuar en cada miembro de la desigualdad $-10 \leq -8$ las siguientes operaciones:

a) Sumar el número 3.
b) Multiplicar por –2.
c) Cambiar el signo.

34 Explica los pasos que seguirías para ir de la desigualdad a) a la desigualdad b).

a) $6 > 5$ b) $-4 < -\dfrac{10}{3}$

35 Utiliza las propiedades de las desigualdades para eliminar los denominadores en estas desigualdades.

a) $\dfrac{3}{4} < \dfrac{7}{5}$ b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} < \dfrac{10}{3}$ c) $\dfrac{2}{3} > -\dfrac{1}{4}$

36 Indica tres valores distintos de *a, b* y *c* que hagan cierta la desigualdad $a + b < c$ y que cumplan:

a) $a < b$; $b < c$
b) $a > c$

— ¿Existe algún valor de *a* y *b* que verifique la desigualdad y cumpla $a > c$ y $b > c$?

6 Inecuaciones

Considera las desigualdades siguientes:

$$x - 3 < 0 \qquad x - y \geq 2 \qquad x^2 - 3 \leq 5x$$

Observa que los miembros de estas desigualdades están formados por expresiones algebraicas. Estas desigualdades se llaman *inecuaciones.*

> Una **inecuación** es una desigualdad entre expresiones algebraicas.

La letra o letras que aparecen en una inecuación reciben el nombre de **incógnitas.**

Las dos expresiones separadas por el signo de desigualdad se denominan **primer miembro,** la situada a la izquierda del signo, y **segundo miembro,** la situada a su derecha.

Observa en el esquema del margen cuáles son los miembros y las incógnitas de la inecuación $x - y \geq 2$.

Inecuación
$x - y \geq 2$

Incógnitas: x, y

Primer miembro	Segundo miembro
$x - y$	2

6.1. Conjunto solución

Como ya sabes, la ecuación $x - 3 = 5$ sólo se cumple si x es igual a 8, por lo que decimos que $x = 8$ es su solución.

Consideramos ahora la inecuación $x - 3 < 5$. Al sustituir la incógnita por cada uno de los siguientes valores: $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 10$, obtenemos:

- $x = 0$ cumple la desigualdad, pues $0 - 3 < 5$.
- $x = \pi$ cumple la desigualdad, pues $\pi - 3 < 5$.
- $x = 10$ no cumple la desigualdad, pues $10 - 3 > 5$.

Así, los valores $x = 0$ y $x = \pi$ verifican la desigualdad; por este motivo, decimos que ambos son *soluciones* de la inecuación.

Fíjate en que, de hecho, los números reales menores que 8 son las soluciones de esta inecuación.

> Los valores de la incógnita (o incógnitas) que cumplen la desigualdad son las **soluciones** de la inecuación. El conjunto de **todas** las **soluciones** recibe el nombre de **conjunto solución** y se representa por **S.**

Actividades

37 Indica cuáles de estas expresiones son inecuaciones y, en tal caso, señala el número de incógnitas que aparecen.

a) $5(12 - 2) < 3 - 1$

b) $7x^4 + \frac{1}{3} > 8 - \frac{1}{2}$

c) $2x + \frac{1}{2}y \leq 8 - \frac{1}{x}$

d) $4x + 3 = 5(x + 1)$

e) $5xy(x - 3) \geq 3x$

f) $3x(y^4 - 3) \geq 1$

38 Comprueba si los números 4, 0, 1 y 2 son solución de las siguientes inecuaciones.

a) $3x - 7 \geq x - 5$

b) $\frac{5x - 1}{2} \leq 3x$

c) $\frac{x - 3}{2} \leq \frac{x - 6}{3}$

6.2. Inecuaciones equivalentes

Observa las siguientes inecuaciones.

$$x - 3 < 5 \qquad\qquad x < 8$$

Se cumple que el conjunto solución en ambos casos son los números reales menores que 8. Decimos que ambas inecuaciones son *equivalentes.*

Dos **inecuaciones** son **equivalentes** si tienen el mismo **conjunto solución.**

Observa que si sumamos 3 a los dos miembros de la primera inecuación resulta la segunda inecuación.

$$x - 3 < 5 \quad \rightarrow \quad x - 3 + 3 < 5 + 3 \quad \rightarrow \quad x < 8$$

Las siguientes reglas, basadas en las propiedades de las desigualdades, permiten pasar de una inecuación a otra equivalente.

Obtenemos una inecuación equivalente a otra si:

- **Sumamos** o **restamos** un mismo **número** o una misma **expresión algebraica** a los dos miembros de la inecuación.
- **Multiplicamos** o **dividimos** por un **número positivo** los dos miembros de la inecuación.
- **Multiplicamos** o **dividimos** por un **número negativo** los dos miembros de la inecuación y **cambiamos el sentido** de la desigualdad.

Fíjate en que a partir de estas reglas se deduce que, al transponer términos o al despejar la incógnita en una inecuación, obtenemos otra inecuación equivalente. Así, las siguientes inecuaciones son equivalentes.

$$5x - 14 < 2x + 4 \iff 5x - 2x < 4 + 14 \iff 3x < 18 \iff x < 6$$

Notación

Observa los siguientes símbolos matemáticos:

$\Rightarrow$ símbolo de implicación

$\Leftrightarrow$ símbolo de doble implicación

Si entre dos expresiones aparece el símbolo $\Rightarrow$, indica que si la primera es cierta, también lo es la segunda.

Si entre dos expresiones aparece el símbolo $\Leftrightarrow$, indica que la primera se cumple si y sólo si se cumple la segunda.

Así, para indicar que dos inecuaciones son equivalentes utilizamos el símbolo de doble implicación $\Leftrightarrow$.

Actividades

39 Halla dos inecuaciones equivalentes a cada una de las propuestas.

a) $2x + 5 < 6x - 1$ b) $\frac{x}{2} > 3x - 1$

40 Transforma las siguientes inecuaciones en otras equivalentes cuyo coeficiente de la incógnita sea positivo.

a) $-3x + 4 < 5$

b) $-x + 7 > -3x$

c) $4\,(5 - x) \geq 3x - 2$

d) $-2x \geq 3x - 12\,(5 - x)$

41 Escribe dos inecuaciones equivalentes a $2x \geq -27$ cuyo segundo miembro sea un número positivo.

42 ¿Qué expresión algebraica ha de sumarse a cada miembro de la inecuación $3x + 5 \leq 2x - 1$ para obtener la inecuación $x \leq -6$?

43 Obtén la inecuación equivalente del tipo $x < a$, $x > a$, $x \leq a$ o $x \geq a$ a cada una de estas inecuaciones.

a) $5x < -15$

b) $2x < \frac{7}{3}$

c) $-7x \leq -56$

d) $\frac{-3x}{4} > \frac{-1}{7}$

e) $\frac{3x + 8}{2} < \frac{x + 20}{5}$

f) $\frac{x}{2} - 3 \leq \frac{5x}{4} - \frac{1}{4}$

g) $\frac{8\,(x - 1)}{3} + 7 > \frac{6x - 18}{9}$

h) $\frac{4x}{3} - 2 \leq x$

6.3. Resolución de inecuaciones de primer grado con una incógnita

Observa la siguiente inecuación: $5x - 2 < 2x - 3$.

La x es la única incógnita de esta inecuación y, como el exponente mayor al que está elevada es 1, se trata de una **inecuación de primer grado con una incógnita.**

Veamos cómo podemos **resolver** este tipo de inecuaciones; es decir, cómo podemos hallar su conjunto solución. El método de resolución que utilizamos consiste en transformarlas en otras equivalentes más sencillas siguiendo estos pasos:

— Eliminar paréntesis.

— Suprimir denominadores.

— Transponer términos.

— Reducir términos semejantes.

— Despejar la incógnita.

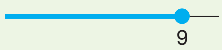
Veamos un ejemplo.

FÍJATE

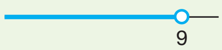
Las semirrectas representan intervalos de la recta real. Si contienen el extremo, hablamos de **semirrectas cerradas** y, si no lo contienen, de **semirrectas abiertas.**

A continuación, te mostramos un ejemplo de cada uno de los diferentes tipos de semirrectas:

- Los números menores o iguales que 9, $x \leq 9 \div (-\infty, 9]$.



- Los números menores que 9, $x < 9 \div (-\infty, 9)$.



- Los números mayores o iguales que -4, $x \geq -4 \div [-4, +\infty)$.

- Los números mayores que -4, $x > -4 \div (-4, +\infty)$.

ejemplo 14

Resuelve la siguiente inecuación $\dfrac{x-5}{2} + 4(2-x) < -\dfrac{5x}{3}$.

— Eliminamos paréntesis.

$$\frac{x-5}{2} + 8 - 4x < -\frac{5x}{3}$$

— Suprimimos los denominadores multiplicando ambos miembros de la inecuación por el m.c.m. (2, 3) = 6.

$$3(x-5) + 48 - 24x < -10x$$

— Eliminamos paréntesis: $3x - 15 + 48 - 24x < -10x$

— Transponemos términos: $3x - 24x + 10x < -33$

— Reducimos términos semejantes: $-11x < -33$

— Despejamos la incógnita: debemos tener en cuenta que al dividir por un número negativo, debe cambiarse el sentido de la desigualdad.

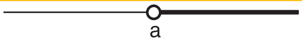
$$x > \frac{-33}{-11} = 3$$

Así, el conjunto solución son los números reales mayores que 3: $\mathbf{S} = (3, +\infty)$

Para comprobar el resultado, consideramos un valor del conjunto solución **S,** por ejemplo $x = 15$, y sustituimos en la inecuación.

$$\frac{15-5}{2} + 4(2-15) < -\frac{5 \cdot 15}{3} \Leftrightarrow -47 < -25$$

En el ejemplo anterior, hemos resuelto una inecuación de primer grado, despejando la incógnita. Así hemos obtenido una ecuación equivalente sencilla. En la siguiente tabla, se muestra el conjunto solución de las inecuaciones más sencillas.

Inecuación	Conjunto solución	Representación gráfica
$x < a$	$\mathbf{S} = (-\infty,\ a)$	 a
$x \leq a$	$\mathbf{S} = (-\infty,\ a]$	 a
$x > a$	$\mathbf{S} = (a,\ +\infty)$	 a
$x \geq a$	$\mathbf{S} = [a,\ +\infty)$	 a

Si no podemos despejar la incógnita, significa que la inecuación se cumple para todos los números reales o que no se verifica para ningún número real. En este último caso, diremos que el conjunto solución es el conjunto vacío, que se indica con el símbolo $\varnothing$.

Veamos un ejemplo.

ejemplo 15

Resuelve la inecuación $10\,x - 4\,x < 3 + 6\,x$.

— Transponemos términos: $10x - 4x - 6x < 3$

— Reducimos términos semejantes: $0x < 3$

No podemos despejar *x*, pues no es posible dividir por 0. No obstante, el producto de 0 por cualquier número es 0 y, por lo tanto, es menor que 3; con lo que cualquier número cumple la desigualdad. Así, el conjunto solución está formado por todos los números reales: $\mathbf{S} = \mathbb{R}$.

Si consideramos la inecuación del ejemplo, pero con el signo de la desigualdad contrario, tenemos que:

$$10x - 4x - 6x > 3 \iff 0x > 3$$

Observa que la inecuación $0x > 3$ no tiene solución, ya que el producto de 0 por cualquier número es 0 y, por lo tanto, no es mayor que 3. Así, en tal caso, el conjunto solución es $\mathbf{S} = \varnothing$.

Actividades

44 Resuelve las siguientes inecuaciones y representa los conjuntos solución sobre la recta real.

a) $2 - 7x < 5 - 21x$

b) $3\,(2x + 5) < 4\,(x + 5)$

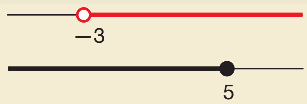
c) $\dfrac{3x - 2}{5} \leq \dfrac{2x - 1}{3}$

d) $5\,(x - 3) \geq 2x + 3\,(x - 5)$

e) $3x - \dfrac{5}{2} \geq 2x - \dfrac{1}{3}$

f) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{2(x-1)}{6} < \dfrac{5x + 1}{2}$

45 Escribe en cada caso dos inecuaciones equivalentes cuyo conjunto solución sea el representado en la figura.



Conjunto solución de una inecuación de primer grado con una incógnita

Al resolver una inecuación de primer grado con una incógnita y después de efectuar distintas transformaciones, se obtiene siempre una inecuación del tipo: $\boldsymbol{ax < b}$, $\boldsymbol{ax \leq b}$, $\boldsymbol{ax > b}$, o $\boldsymbol{ax \geq b}$.

Fíjate en que si $\boldsymbol{a \neq 0}$, podemos despejar *x* y obtenemos que el conjunto solución de la inecuación es una semirrecta.

Pero si $\boldsymbol{a = 0}$, no puede despejarse la incógnita; la inecuación tendrá como conjunto solución todos los números reales o el conjunto vacío, según cuál sea el valor de *b*.

CÁLCULO MENTAL

Es posible obtener la solución de una inecuación sencilla de primer grado con una incógnita mediante el cálculo mental.

Consideramos inecuaciones sencillas; esto es, las inecuaciones transformadas en $ax < b$, $ax \leq b$, $ax > b$ o $ax \geq b$. Esto nos permite razonar y calcular mentalmente la solución.

Observa estos ejemplos.

$3x \geq 3 \xrightarrow{(3\,:\,3)} x \geq 1$ $\quad \mathbf{S} = [1, +\infty)$

$\dfrac{x}{6} < \dfrac{4}{3} \xrightarrow{(4 \times 6\,:\,3)} x < 8$ $\quad \mathbf{S} = (-\infty, 8)$

$0x < 3$ El producto de 0 por cualquier número es 0. $\mathbf{S} = \mathbb{R}$

C1 *Efectúa el cálculo mental para las inecuaciones siguientes.*

- $2x - 3 \geq 3$ $\quad \mathbf{S} = [\ldots,\ \ldots)$
- $0x < 0$ $\quad \mathbf{S} = \ldots\ldots$

6.4. Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Observa la desigualdad $x + y \leq 7$.

En este caso tenemos dos incógnitas x e y cuyo exponente máximo es 1. Se trata pues de una **inecuación de primer grado con dos incógnitas.**

Asignamos valores a x e y, y obtenemos la siguiente tabla.

x	y	¿$x + y \leq 7$?
1	3	$1 + 3 \leq 7$
2	4	$2 + 4 \leq 7$
5	6	$5 + 6 \geq 7$

Fíjate en que los pares de valores $x = 1$, $y = 3$ y $x = 2$, $y = 4$ verifican la desigualdad, mientras que el par $x = 5$, $y = 6$ no la cumple.

Así, los pares de valores $x = 1$, $y = 3$ y $x = 2$, $y = 4$ son soluciones de la inecuación.

Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Una inecuación de primer grado con dos incógnitas es equivalente a una inecuación de la forma:

$ax + by < c$

$ax + by \leq c$

$ax + by > c$

$ax + by \geq c$

Representación gráfica de las soluciones

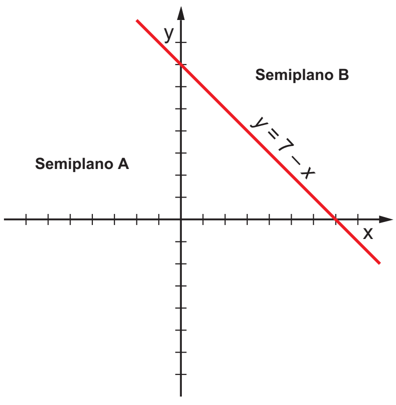
Consideramos la ecuación que resulta de sustituir el signo $\leq$ en la inecuación $x + y \leq 7$ por el signo =.

$$x + y = 7$$

Se trata de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

La representación gráfica de las soluciones de esta ecuación es la recta de ecuación $x + y = 7$ o, lo que es lo mismo, $y = 7 - x$.

Esta recta divide el plano en dos semiplanos A y B, y los puntos contenidos en los semiplanos y la recta cumplirán las siguientes propiedades:



- Las coordenadas (x, y) de los puntos del semiplano A cumplen:

$$y < 7 - x \Rightarrow x + y < 7$$

- Las coordenadas (x, y) de los puntos de la recta cumplen:

$$y = 7 - x \Rightarrow x + y = 7$$

- Las coordenadas (x, y) de los puntos del semiplano B cumplen:

$$y > 7 - x \Rightarrow x + y > 7$$

Por lo tanto, podemos afirmar que los puntos del semiplano A y los puntos de la recta representan gráficamente las soluciones de la inecuación $x + y \leq 7$. Así, las coordenadas de estos puntos permiten obtener las soluciones de la inecuación.

La **representación gráfica** de las soluciones de una inecuación de primer grado con dos incógnitas es un semiplano.

CÁLCULO MENTAL

Es posible obtener soluciones de una inecuación sencilla de primer grado con dos incógnitas mediante el cálculo mental.

Consideramos inecuaciones sencillas; esto es, las inecuaciones del tipo $y < ax$, $y \leq ax$, $y > ax$ o $y \geq ax$.

En estas inecuaciones se establece una relación directa entre las variables que permite obtener las soluciones.

Por ejemplo, para la inecuación $y > 2x$, se observa que para cualquier valor de y que sea superior al doble del valor de x se cumple la inecuación.

Así, $x = 2$ e $y = 8$ es solución de la inecuación, ya que 8 es mayor que el doble de 2.

Para determinar el semiplano solución, tomamos un punto situado en uno de los semiplanos y comprobamos si sus coordenadas verifican o no la inecuación propuesta.

— Si la verifican, las coordenadas de todos los puntos situados en el semiplano elegido serán los valores *x* e *y,* solución de la inecuación.

— Si no la verifican, las soluciones serán los valores de *x* e *y* dados por las coordenadas de los puntos del otro semiplano.

ejemplo 16

Resuelve gráficamente la inecuación $5x - y < 4$.

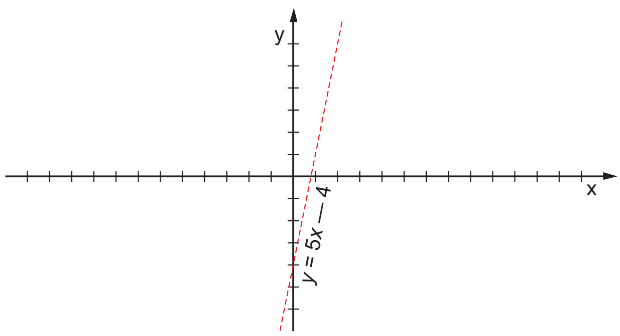
— Representamos la recta $5x - y = 4$, que equivale a $y = 5x - 4$.

— Consideramos un punto cualquiera de uno de los semiplanos en que queda dividido el plano y sustituimos sus coordenadas en la inecuación. Tomamos, por ejemplo, el punto (0, 0): $5 \cdot 0 - 0 < 4$.

Así pues, los valores de las coordenadas del punto (0, 0) son solución de la inecuación, y también los valores de las coordenadas de todos los puntos del semiplano que lo contiene.

— Rayamos el semiplano solución y marcamos con un trazo **discontinuo** la recta $5x - y = 4$.

Con este trazo discontinuo indicamos que los valores de las coordenadas de los puntos de la recta no son soluciones de la inecuación $5x - y = 4$.



ejemplo 17

Resuelve gráficamente la inecuación $x - y \geq 0$.

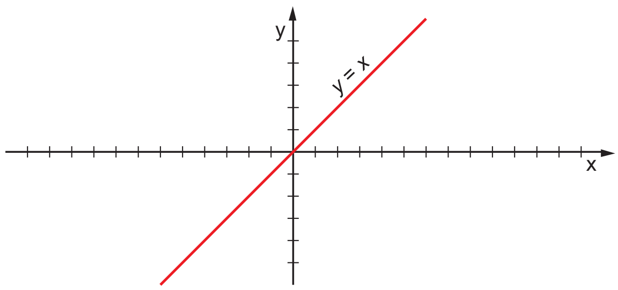
— Representamos la recta $x - y = 0$, que equivale a $y = x$.

— Consideramos un punto cualquiera de uno de los semiplanos en que queda dividido el plano y sustituimos sus coordenadas en la inecuación. Tomamos, por ejemplo, el punto (0, 1): $0 - 1 < 0$.

Así pues, los valores de las coordenadas del punto (0, 1) no son solución de la inecuación, y tampoco lo son los valores de las coordenadas de los otros puntos del semiplano que lo contiene. Por lo tanto, las soluciones serán los valores *x* e *y* dados por las coordenadas de los puntos del otro semiplano.

— Rayamos el semiplano solución y marcamos con un trazo **continuo** la recta $x - y = 0$.

Con este trazo continuo indicamos que los valores de las coordenadas de los puntos de la recta son soluciones de la inecuación $x - y \geq 0$.



Actividades

46 Comprueba si los siguientes pares son soluciones de la inecuación $5x - y > -3$.

a) (5, –1) b) (3, 1) c) (–2, 4) d) (0, 5)

47 Obtén las coordenadas de dos puntos que sean solución de cada una de estas inecuaciones.

a) $-2x + y < 3$ b) $3x \geq 2y$

48 Resuelve gráficamente estas inecuaciones.

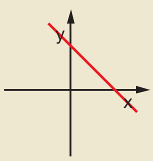
a) $y \geq 2x + 3$

b) $5x - y < 3x + 2$

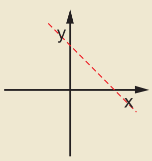
c) $\dfrac{x - 1}{3} > 2y - \dfrac{1}{4}$

49 Relaciona cada una de las inecuaciones con la representación gráfica de sus soluciones.

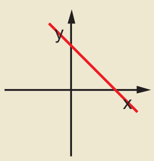
a) $x + y > 2$ b) $x + y \geq 2$ c) $x + y < 2$ d) $x + y \leq 2$



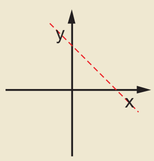
1



2



3



4

7 Sistemas de inecuaciones

A veces, nos podemos encontrar con situaciones en que necesitamos obtener los valores que cumplan más de una inecuación a la vez.

Consideramos, por ejemplo, un número tal que:

- Si a su doble le añadimos el propio número, obtenemos un número mayor que 6.
- Si a su doble le sustraemos el propio número, obtenemos un número menor que 6.

MUCHO OJO

Para indicar que un valor x cumple las condiciones:

- $x > 2$
- $x < 6$

podemos escribir:

$$2 < x < 6$$

Al representar por x cualquier número que cumpla estas dos condiciones, obtenemos dos inecuaciones que deben cumplirse a la vez:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + x > 6 \\ 2x - x < 6 \end{array}\right\}$$

Este conjunto está formado por dos inecuaciones, con una sola incógnita, cuyo máximo exponente es 1. Es un *sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita*.

Llamamos **sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita** a un conjunto de dos o más **inecuaciones** que deben **verificarse** a la vez para los **mismos valores** de la **incógnita.** Estos valores son las **soluciones** del sistema.

Las inecuaciones del ejemplo son, respectivamente, equivalentes a las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 3x > 6 \\ x < 6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 6 \end{array}\right\}$$

Así, las soluciones del sistema son los números reales mayores que 2 y menores que 6. Por lo tanto, el conjunto solución del sistema es **S** = (2, 6).

Actividades

50 Indica cuáles de estos números, 3, 5, 9, 2 ó –10, son solución de cada uno de los sistemas de inecuaciones siguientes.

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3 > 6 \\ 3x - 4 < x \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x > x + 6 \\ 2x - 5 \leq x \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 5 > -2x \\ -2 - x < 9 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 4x - 5 \geq 3x - 2 \\ \dfrac{5 + 5x}{4} > \dfrac{3x}{2} - 1 \end{array}\right\}$

51 Transforma estas inecuaciones en un sistema de inecuaciones.

a) $-4 \leq 3x + 1 < 7$

b) $-1 \leq 2x + 1 \leq 3$

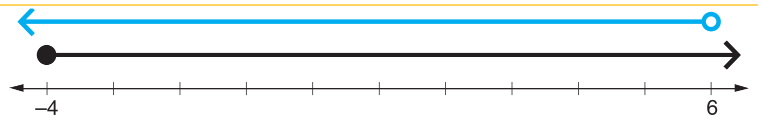
c) $\dfrac{1}{3} \leq 3x - 2 < 1$

d) $\dfrac{1}{4} < \dfrac{x - 2}{5} \leq 1$

Resolución

Resolver un sistema de dos o más inecuaciones consiste en encontrar los valores de la incógnita que verifiquen a la vez todas las inecuaciones.

En la siguiente tabla mostramos el procedimiento para resolver sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita.

Procedimiento	*Ejemplo:*	$\left.\begin{array}{l} 2x-3 \le 5x+9 \\ 3x+1 < 2x+7 \end{array}\right\}$
Resolvemos cada inecuación por separado.	<u>Primera inecuación</u> $2x - 3 \le 5x + 9$ $2x - 5x \le 9 + 3$ $-3x \le 12 \Rightarrow x \ge -4$ $\mathbf{S_1} = [-4, +\infty)$	<u>Segunda inecuación</u> $3x + 1 < 2x + 7$ $3x - 2x < 7 - 1$ $x < 6$ $\mathbf{S_2} = (-\infty, 6)$
Representamos en la misma recta el conjunto solución de cada inecuación.		
Determinamos las soluciones comunes a las inecuaciones.	Las soluciones comunes son los números reales mayores o iguales que -4 y menores que 6: $-4 \le x < 6$ $\mathbf{S} = [-4, 6)$ 	

Cuando no hay ningún valor que verifique a la vez todas las inecuaciones del sistema, decimos que no tiene solución. Observa el siguiente ejemplo.

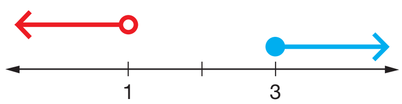
ejemplo 18

Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{l} 5x - 1 \ge 2(4 + x) \\ 2x - 3 < 6 - 7x \end{array}\right\}$

— Resolvemos cada inecuación por separado.

<u>Primera inecuación</u>	<u>Segunda inecuación</u>
$5x - 1 \ge 8 + 2x$	$2x - 3 < 6 - 7x$
$5x - 2x \ge 8 + 1$	$2x + 7x < 6 + 3$
$3x \ge 9$	$9x < 9$
$x \ge 3$	$x < 1$
$\mathbf{S_1} = [3, +\infty)$	$\mathbf{S_2} = (-\infty, 1)$

— Representamos en la misma recta el conjunto solución de cada inecuación.



— Determinamos las soluciones comunes a las dos inecuaciones.

Como no existen números que a la vez sean solución de las dos inecuaciones, el sistema no tiene solución. Así, el conjunto solución es el conjunto vacío: $\mathbf{S} = \varnothing$.

Actividades

52 Resuelve estos sistemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

a) $\left.\begin{array}{l} x \ge 5 \\ 3(x - 1) < 2x + 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 3 > -2 \\ 5x - 3 \le 7x + 9 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3(x - 2) - (x + 1) \ge 3 \\ 2x - 1 \le 5x - 7 \end{array}\right\}$

d) $3 < 2x + 1 \le 5$

e) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} + 3 > \dfrac{x - 5}{3} \\ \dfrac{4x}{5} \le 2x + 1 \end{array}\right\}$

8 Aplicación a la resolución de problemas

Como verás en los ejemplos que se resuelven a continuación, los pasos que han de seguirse en la resolución de problemas mediante inecuaciones son prácticamente los mismos que aplicamos al solucionar problemas mediante ecuaciones.

ejemplo 19

Averigua qué números son los que su triple supera a su mitad en más de 10 unidades.

Lectura atenta del enunciado. Vuelve a leer el problema e interpreta el enunciado.

Elección de la incógnita. Representamos por x cualquiera de dichos números.

Planteamiento de la inecuación. Traducimos al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado:

- El triple de un número: $3x$
- La mitad de un número: $\frac{x}{2}$
- El triple de x es mayor que su mitad más 10:

$$3x > \frac{x}{2} + 10$$

Resolución de la inecuación

$$3x > \frac{x}{2} + 10$$

— Suprimimos el denominador multiplicando ambos miembros de la inecuación por 2.

$$6x > x + 20$$

— Transponemos y reducimos los términos semejantes.

$$5x > 20$$

— Despejamos la incógnita.

$$x > \frac{20}{5} = 4$$

Respuesta. Los números reales mayores que 4 cumplen la condición del enunciado.

Comprobación. Consideramos un número mayor que 4, por ejemplo, $x = 6$:

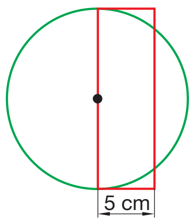
— Su triple es 18.

— Su mitad es 3.

— La diferencia entre ambos es 15, que es superior a 10.

ejemplo 20

Obtén los valores del radio de la circunferencia para los cuales la longitud de ésta es mayor que el perímetro de un rectángulo como el de la figura.



Lectura atenta del enunciado. Vuelve a leer el problema e interpreta el enunciado.

Elección de la incógnita. Representamos por x el radio de la circunferencia.

Planteamiento de la inecuación. Traducimos al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado:

- Longitud de la circunferencia: $2\pi x$
- Perímetro del rectángulo:

$$5 + 2x + 5 + 2x = 4x + 10$$

- La longitud de la circunferencia ha de ser mayor que el perímetro del rectángulo:

$$2\pi x > 4x + 10$$

Resolución de la inecuación

$$2\pi x - 4x > 10$$

$$(2\pi - 4)\, x > 10$$

$$2{,}28\, x > 10$$

$$x > \frac{10}{2{,}28} = 4{,}39$$

Respuesta. La longitud del radio ha de ser superior a 4,39 cm.

Comprobación. Consideramos una circunferencia cuyo radio sea mayor que 4,39 cm, por ejemplo, 10 cm. Así, obtenemos que la longitud de ésta es 62,8 cm, que es mayor que el perímetro del rectángulo que mide 50 cm.

Debes prestar especial atención al análisis de las soluciones, ya que algunas de ellas, a pesar de ser solución de la inecuación o de las inecuaciones planteadas, no lo son del problema. Veamos un ejemplo.

ejemplo **21**

Un representante de comercio tiene un contrato con su empresa en el que figuran las siguientes cláusulas:

- *Un sueldo fijo mensual de $ 750.*
- *Un incentivo de $ 8 por lote de productos vendido.*
- *Una dieta de $ 0,1 por kilómetro recorrido.*

Calcula el número mínimo de lotes que vendió durante un mes en que recorrió 1 500 km si, al final de éste, percibió un sueldo superior a $ 1 200.

Lectura atenta del enunciado. Vuelve a leer el problema e interpreta el enunciado.

Elección de la incógnita. Representamos por x el número de lotes que consiguió vender.

Planteamiento de la inecuación. Analizamos los datos y traducimos al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado:

- Dólares correspondientes al sueldo fijo: 750
- Dólares correspondientes a los incentivos: $8x$
- Dólares correspondientes a las dietas:

$$1\,500 \cdot 0{,}1 = 150$$

- El sueldo, que es la suma del sueldo fijo, los incentivos y las dietas, fue superior a $ 1 200:

$$750 + 8x + 150 > 1\,200$$

Resolución de la inecuación

$$750 + 8x + 150 > 1\,200$$

$$8x > 1\,200 - 750 - 150$$

$$8x > 300$$

$$x > \frac{300}{8} = 37{,}5$$

Respuesta

La solución de la inecuación son los números reales mayores que 37,5 pero, como x representa el número de lotes vendidos, x ha de tomar valores enteros mayores que 37,5; es decir, 38, 39, 40…

Por lo tanto, el representante vendió un mínimo de 38 lotes.

Comprobación

Consideramos un número entero mayor o igual que 38, por ejemplo, $x = 38$.

Se cumple:

$$750 + 8 \cdot 38 + 150 = 1\,204$$

Por lo tanto, en caso de que el representante vendiera 38 lotes percibiría un sueldo de $ 1 204, que supera los $ 1 200.

Actividades

53 ¿Entre qué valores puede estar la longitud de la base de un rectángulo cuyo perímetro no supera los 24 cm si su altura mide la tercera parte de su base?

54 Un comerciante quiere obtener como mínimo un 30 % de beneficio en la venta de 300 calculadoras que ha adquirido a $ 10 cada una. ¿A qué precio deberá vender cada una de ellas?

55 La diferencia de edad entre dos hermanos es de 8 años. Si entre los dos suman más de 20 años, ¿qué edad puede tener como mínimo el menor?

56 Determina qué valores puede tener el perímetro de un rectángulo si uno de sus lados mide 12 cm y su área es menor que 360 cm^2.

57 Al lanzar ordenadamente dos dados, la suma de las puntuaciones obtenidas es 7 puntos, y la diferencia entre la puntuación del primer dado y la del segundo es menor que 3. ¿Qué puntuaciones podemos haber sacado en cada uno de los dados?

58 En una sala de cine con capacidad para 350 personas se obtuvo una recaudación superior a los $ 1 460 un día en que se proyectó una película de estreno. Si el precio de cada entrada era de $ 4,5, ¿cuántas butacas quedaron vacías como máximo?

59 Escribe el enunciado de un problema que se resuelva mediante la siguiente inecuación:

$$65x + 250 \leq 625$$

— Halla su solución.

9 Diagrama de tallo y hojas

Después de haber recolectado los datos de algún experimento o fenómeno estadístico, es necesario analizarlos, para lo cual podemos utilizar una representación gráfica de los valores obtenidos.

Una herramienta útil para interpretar algunos tipos de datos es el diagrama de tallo y hojas. Agrupamos los datos según su valor numérico, para interpretar características como:

- Alrededor de qué punto están agrupados los datos.
- Cuán dispersos están los valores.
- Saber si los datos están distribuidos de forma simétrica.

Con el siguiente ejemplo, vamos a construir un diagrama de tallo y hojas.

MUCHO OJO

El diagrama de tallo y hojas te permite una representación visual de un conjunto de datos.

ejemplo **22**

Una empresa de seguros, entre sus servicios, ofrece el pago por arreglo mecánico en caso de accidente. Juan, uno de los empleados de la compañía, tiene a su cargo reunir información de los costos de un arreglo en caso de un daño leve. Ha visitado 23 talleres de reparaciones y consiguió la siguiente información, en dólares: 102,105, 97, 120, 138, 115, 111, 104, 107, 109, 113, 114, 114, 115, 118, 118, 124, 125, 124, 127, 129, 127, 118.

El jefe de Juan ha solicitado organizar la información en grupos de valores que difieran máximo en cinco dólares. Para mayor facilidad de visualización, Juan usa un diagrama de tallo y hojas, pero al entregar su esquema de organización su jefe no puede entender lo presentado y le pide ayuda.

Tallo	Hojas
9;	7;
10;	2; 4;
10;	5; 7; 9;
11;	1; 3; 4; 4;
11;	5; 5; 8; 8; 8;
12;	0; 4; 4;
12;	5; 7; 7; 9
13;	8;

Veamos su explicación:

He ubicado los costos de arreglos separando las decenas (tallo) de las unidades (hojas), con esto no repito la información de las decenas; por ejemplo, en la quinta fila, los valores que están a la derecha: 5; 5; 8; 8; 8, en realidad, representan los datos: 115, 115, 118, 118, 118.

Pero, ¿qué ventajas tiene esta organización de los datos, aparte de ahorrar la escritura de unos cuantos números?

Esta disposición de los datos, en este esquema, me facilita tener claros los datos originales y exactos; además que refleja, a primera vista, las mismas impresiones que un histograma de frecuencias, sin necesidad de elaborar el dibujo. En cuanto a medidas de tendencia central, a partir del diagrama de tallo y hojas, la mediana y la moda se identifican con mucha facilidad (siempre que las hojas estén clasificadas, ordenadamente) sobre sus tallos.

Encontremos entonces la media, la mediana y la moda para los datos de esta tabla.

Si se introduce los datos en una calculadora, se suma todas las cantidades (escribiéndolas del tallo a las hojas) y se divide entre 23 para obtener la media, así:

$$\text{media} = \frac{2\,674}{23} \approx 16{,}26 \text{ dólares.}$$

En este caso n = 23 (n número impar), de manera que la mediana es igual al dato ubicado en el puesto decimosegundo, en orden. Contando las hojas, se puede observar que este es el segundo elemento del tallo cinco. Entonces:

mediana = 115 dólares.

Si se examina la tabla, se observa que el valor 118 apareció tres veces y que ningún otro valor tuvo esa frecuencia, de modo que

moda = 118 dólares.

ejemplo 23

Utilizando un diagrama de tallo y hojas, compara los tiempos obtenidos por un estudiante al nadar 100 metros, en dos días diferentes de la misma semana.

Primer día (segundos)			Segundo día (segundos)		
113	113	105	93	113	98
98	115	111	99	111	99
115	099	113	99	97	97
112	111	098	103	91	101

a) Primero, formamos el diagrama para registrar los datos del primer día. Luego, copiamos a la izquierda el diagrama para el segundo día, usando los mismos tallos del primero.

Hojas segundo día	Tallo	Hojas primer día
99; 99; 99; 98; 97; 97; 93; 91	0	98; 98; 99;
13; 11; 03; 01	1	05; ; 11; 11; 12; 13; 13; 13; 15; 15

b) Podemos concluir que en el segundo día los datos obtenidos fueron menores, pues hay una mayor cantidad de hojas junto al tallo de menor valor.

c) Encontremos la media, la mediana y la moda para los datos de los tiempos obtenidos por el deportista.

Actividades

60 Selecciona en forma aleatoria (puedes usar una calculadora para elegir números) a grupos de compañeros/as:

a) Diez (incluido tú) para investigar las edades de hermanos y padres. (primera encuesta)

b) Once (incluido tú) para que investigues la talla del calzado que usan tus compañeros/as seleccionados y sus padres. (segunda encuesta)

Con los datos obtenidos en cada una de las actividades, organiza en un diagrama de tallo y hojas, calcula la media aritmética, determina la mediana y la moda en cada uno de los grupos de datos. Finalmente, reflexiona sobre la siguiente pregunta: ¿por qué las personas que confeccionan calzado no usan el valor de la media para realizar su producción?

Cómo resolver problemas

Estrategia: Ensayo-error

Esta estrategia de resolución de problemas consiste en experimentar con posibles soluciones hasta dar con la correcta. Seguimos los pasos siguientes:

— Elegimos un valor (resultado u operación posible).

— Probamos si este valor escogido satisface las condiciones del problema.

— Modificamos el valor inicial en función del resultado obtenido y repetimos el proceso hasta encontrar la solución.

Antes de iniciar el ensayo, conviene analizar el resultado y tantear, si es posible, entre qué valores estará la solución. La calculadora y el computador resultan muy útiles como complementos de este método, ya que permiten efectuar las operaciones con mayor rapidez.

El área de un rectángulo es 600 m^2. Calcula su base y su altura sabiendo que son dos números naturales consecutivos.

▶ Comprensión del enunciado

— Lee de nuevo el enunciado.

— Averigua, en el caso de que no lo sepas, el significado de la expresión números *consecutivos.*

— Recuerda la fórmula del área de un rectángulo de base *b* y altura *h*:

$$A_{\text{rectángulo}} = b \cdot h$$

▶ Planificación de la resolución

Se trata de encontrar dos números naturales consecutivos cuyo producto sea 600.

Seguiremos estos pasos:

— Tomaremos dos números naturales consecutivos cualesquiera y calcularemos su producto.

— Si el producto calculado es mayor que 600, probaremos con otro par de números consecutivos más pequeños; si ahora el producto es menor que 600, tomaremos un par de números consecutivos mayores.

— Repetiremos el proceso hasta encontrar la solución.

▶ Ejecución del plan de resolución

— Tomamos dos números consecutivos, por ejemplo 21 y 22. Calculamos su producto:

$$21 \cdot 22 = 462$$

— El producto es menor que 600. Probamos con 26 y 27:

$$26 \cdot 27 = 702$$

— Ahora, el producto es mayor que 600. Tomamos 24 y 25:

$$24 \cdot 25 = 600$$

Así, las dimensiones son 24 m y 25 m.

Algunas veces, como en este caso, el análisis del enunciado nos permite adelantar en torno a qué valores puede estar la solución, lo cual nos da una pista para empezar el ensayo. Al tratarse de dos números consecutivos, su producto se encontrará próximo al cuadrado de uno de ellos.

▶ Revisión del resultado y del proceso seguido

Comprobamos que efectivamente los números hallados son naturales consecutivos y que su producto es igual a 600.

Actividades

Pon en práctica la estrategia anterior para resolver estos problemas.

61 Calcula un número diferente a la unidad cuyo quíntuplo excede en 4 unidades a su cuadrado.

62 Cuatro números enteros consecutivos suman -2. Averigua qué números hemos sumado.

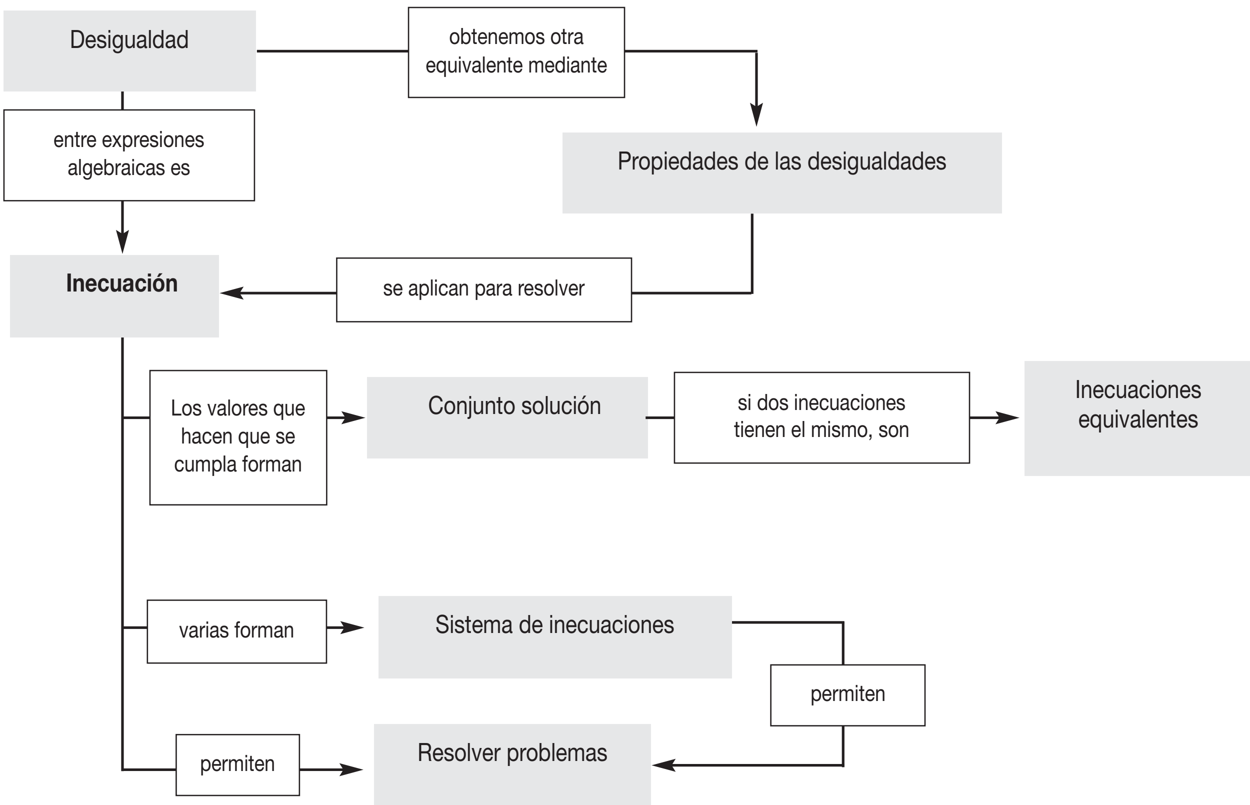
En resumen

- Una **expresión algebraica** es una serie de números y letras unidos mediante los signos de las operaciones aritméticas.
- El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número obtenido al sustituir las letras por números y efectuar las operaciones indicadas.
- Cada uno de los sumandos de una expresión algebraica se denomina **término.**

  Cada término consta de dos partes: una numérica, llamada **coeficiente,** y otra formada por las letras con sus exponentes, que se denomina **parte literal.**

  Términos semejantes son aquellos que tienen la misma parte literal.
- Con las expresiones algebraicas, igual que con los distintos tipos de números, podemos efectuar diversas operaciones: *suma, resta* y *multiplicación.* También podemos aplicar la *propiedad distributiva* y sacar *factor común.*
- Unas expresiones algebraicas utilizadas frecuentemente son los **productos notables** como el *cuadrado de una suma,* el *cuadrado de una diferencia* y la *suma por diferencia.*
- Una **identidad** es una igualdad que se verifica para cualquier valor numérico de las letras que aparecen en ella.
- Una **ecuación** es una igualdad que se verifica para algunos valores numéricos de las letras que aparecen en ella. La letra (o letras) que aparece en la ecuación se denomina **incógnita.**

  El valor o valores numéricos de la incógnita que hacen cierta la igualdad es la **solución** de la ecuación. **Resolver** una ecuación es hallar la **solución.** Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.
- El método general de resolución de ecuaciones consta de tres pasos: **transposición** de términos, **reducción** de términos semejantes y **despeje** de la incógnita.



Ejercicios y problemas integradores

Un grupo de estudiantes de noveno año de EGB decide realizar una pequeña investigación para aplicar los conocimientos de Estadística aprendidos en clases de Matemática.

Inician un lunes por la mañana. En la puerta de ingreso a su colegio, eligen en forma aleatoria a 40 estudiantes. A cada uno se pide estimar un cálculo aproximado del número de horas dedicadas a preparar sus evaluaciones en dos semanas.

El siguiente listado contiene las respuestas obtenidas en esta investigación.

60, 45, 44, 36, 72, 25, 29, 23, 58, 32, 14, 33, 20, 24, 40, 44, 15, 22, 31, 17,

12, 55, 45, 24, 26, 30, 62, 16, 31, 29, 36, 55, 52, 26, 39, 47, 18, 41, 29, 38.

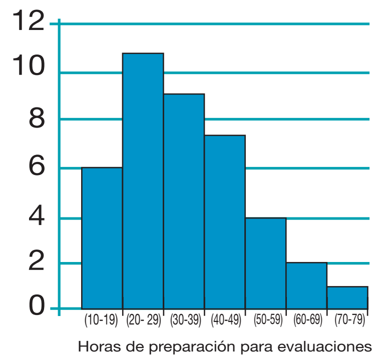
Con estos datos construyen una tabla de distribución de frecuencias, pero como la información tiene un rango muy amplio, deciden formar grupos o clases. Para esto, es necesario que cada dato forme parte de uno de los grupos y que estos tengan un mismo tamaño (extensión), uno de los investigadores recordó que había leído que es conveniente usar de 5 a 12 clases.

El rango nos indica que los datos van desde un mínimo de 12 hasta un máximo de 72, es decir, Rango = 60, pues 60 = 72 - 12.

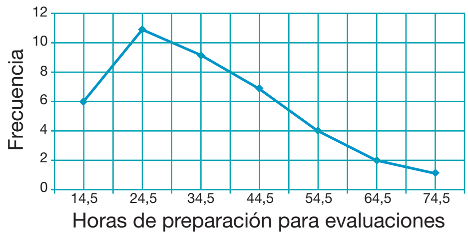
Para incluir dentro de las clases a todos los datos, deciden formar siete intervalos como muestra la tabla:

Tiempo dedicado a estudio para las evaluaciones			
Límite de clases	Tarjas o marcas	Frecuencia f_i	Frecuencia acumulada F_i
[10 - 19]	~~IIII~~ I	6	6
[20 - 29]	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	11	17
[30 - 39]	~~IIII~~ IIII	9	26
[40 - 49]	~~IIII~~ II	7	33
[50 - 59]	IIII	4	37
[60 - 69]	II	2	39
[70 - 79]	I	1	40

Con la información así organizada es posible realizar los diagramas estadísticos que conoces, por ejemplo: el Histograma de frecuencias, para ellos puedes ubicar en el eje horizontal los límites de las clases y obtener el siguiente gráfico:



Es posible representar los datos de la tabla usando las **marcas de clase**. Recuerda que estos son los valores intermedios de cada intervalo. El gráfico que se obtiene es el siguiente:



En general, luego de determinar las frecuencias de los datos las tarjas o marcas se desechan. Esto impide reconocer la forma de distribución, pues si te fijas en la tabla de datos, con una rotación de menos 90° en la columna de las tarjas se puede observar un esquema de distribución semejante a los representados en los gráficos anteriores.

La tabla de datos se suele presentar en la siguiente forma:

Horas dedicadas al estudio para las evaluaciones				
Límite de clases	Frecuencia fi	Frecuencia acumulada Fi	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
[10 - 19]	6	6	6/40=0,15	0,15
[20 - 29]	11	17	11/40=0,275	0,425
[30 - 39]	9	26	9/40=0,225	0,65
[40 - 49]	7	33	7/40=0,175	0,825
[50 - 59]	4	37	4/40=0,10	0,925
[60 - 69]	2	39	2/40=0,05	0,975
[70 - 79]	1	40	1/40=0,025	1

Las frecuencias relativas permiten hacer análisis de porcentajes de diferentes datos, por ejemplo, podemos afirmar que menos del 20 % de los estudiantes encuestados dicen dedicar más de 50 horas en preparar sus evaluaciones.

Pero esta tabla nos impide tener presentes los valores originales obtenidos en la encuesta, es entonces que el uso del diagrama de tallo y hojas cobra importancia, pues este esquema te permite saber con precisión todo el tiempo, cuáles fueron los datos obtenidos inicialmente.

Horas dedicadas al estudio para las evaluaciones (Diagrama de tallo y hojas)	
1	2 4 5 6 7 8
2	0 2 3 4 4 5 6 6 9 9 9
3	0 1 1 2 3 6 6 8 9
4	0 1 4 4 5 5 7
5	2 5 5 8
6	0 2
7	2

Se observa con facilidad que los datos resumidos en este tipo de esquema son similares a los que se observaron en el histograma de frecuencias. Una de las ventajas de este diagrama es que te permite establecer con cierta facilidad el valor de la mediana, pues si cuentas, rápidamente ubicas los datos en la posición 20 y 21 de cuyo promedio obtienes el valor de la mediana. Me = $\frac{31+32}{2}$ = 31,5 horas.

De la misma manera, el valor de la mediana es reconocido con facilidad, moda = 29

Practica

- Forma un grupo con tres de tus compañeros y, usando como base el ejemplo anterior, realicen una pequeña investigación, escojan el tema de la pregunta y realicen la tabulación de datos, las tablas de frecuencias, los gráficos estadísticos que se han estudiado y calcula los valores de media, mediana y moda de los datos encontrados.

  Las preguntas pueden relacionarse con las notas de alguna prueba de matemática, distancias recorridas para llegar a la institución educativa, tiempo dedicado a ver televisión, número de mensajes de texto enviados por celular diariamente, etc.

Ejercicios y problemas

Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

Ecuaciones

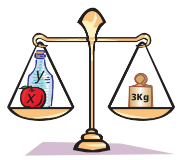
63 Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Ecuación	Incógnita	1.er miembro	2.º miembro	Solución
$7a - 15 = 2a$				
$8 = 2b + 3$				
$2x - 3 = 5x + 2$				
$8y + 4 = 2(3y + 2)$				

64 En este cuadro mágico, la suma de las filas, de las columnas y de las diagonales es 15. Formen grupos de tres alumnos y hallen el valor de x y el valor de y.

$x - 1$	$y + 7$	$2x - 2$
$2y + 3$	5	$3(x - 2)$
$2(y + 1)$	$x - 2$	8

65 Observa estas balanzas en equilibrio.



¿Sabrías hallar el valor de x? ¿Y el de y?

66 Indica si estas afirmaciones sobre las igualdades algebraicas son ciertas o falsas.

a) $5x + 2 = 3x + 2x$ No tiene solución.

b) $3x - 6 = -5x + 2$ Tiene una única solución que es $x = -1$.

c) $3(x - 2) = 3x - 6$ Tiene infinitas soluciones.

d) $\dfrac{3 + 7x}{3} = 2(x + 2)$ Tiene por solución $x = 9$.

67 Halla un número tal que el doble de su tercera parte aumentado en 5 unidades es igual a 23. Utiliza el método del razonamiento inverso para encontrarlo.

68 Emplea la calculadora para averiguar, por el método de ensayo-error, la solución de la ecuación $2^x = 256$.

69 Escribe una ecuación equivalente a ésta: $2x + 5 = x + 3$. Comprueba su equivalencia.

— Multiplicamos los dos miembros por el mismo número; por ejemplo, 3.

$$3 \cdot (2x + 5) = 3 \cdot (x + 3)$$

$$6x + 15 = 3x + 9$$

— Para comprobar que son equivalentes, resolvemos las dos ecuaciones.

$$2x + 5 = x + 3 \qquad 6x + 15 = 3x + 9$$

$$2x - x = 3 - 5 \qquad 6x - 3x = 9 - 15$$

$$x = -2 \qquad 3x = -6$$

$$x = \frac{-6}{3} = -2$$

— Las dos ecuaciones tienen la misma solución; por lo tanto, son equivalentes.

70 Escribe una ecuación equivalente a cada una de las siguientes y demuestra la equivalencia.

a) $2x - 5 = 5x + 2$

b) $4(x - 1) = 3(x + 2)$

c) $3(x - 1) - 20 = 7$

d) $2(x + 3) + 5 = 9$

e) $\dfrac{2x - 3}{3} = \dfrac{x + 5}{2}$

f) $\dfrac{x + 2}{4} - \dfrac{x + 1}{6} = 2$

71 Halla la solución de cada una de estas ecuaciones.

a) $5x + 8 = -2$

b) $4 - 2x = 8$

c) $10 = 2x + 6$

d) $-16 = 2 - 9x$

e) $3 - 2x = 2 - 3x$

f) $-6x = 24$

g) $\dfrac{5x}{2} - 7 = \dfrac{1}{2}$

h) $\dfrac{6x}{5} - 7 = \dfrac{-x}{5}$

72 Resuelve estas ecuaciones.

a) $2x + 5 - 3x + 7 = 4(2x + 3)$

b) $2(3 + 3x) - 3(1 - 3x) = -2$

c) $5(3 - 2x) - 10 = 4(2 - 3x) + 6$

d) $2(3 + 3x) - 3(1 - 3x) - 7(3 - 3x) = 0$

e) $8(3 - 3x) - 12 - 9(5 - x) = 12$

73 Resuelve estas ecuaciones planteándote una breve pregunta.

a) $2x - 3 = 15$ c) $\frac{2x}{3} = 8$

b) $9 = x + 1$ d) $3x = 39$

74 Clasifica las siguientes igualdades en identidades y en ecuaciones, y resuelve estas últimas.

a) $4a + 8b = 4(a + 2b)$ c) $2x = 26$

b) $5(x + y) = 5x + 5y$ d) $x + 8 = 12$

75 Comprueba si cada uno de los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes.

a) $5x = 15$; $2x - 6 = 0$

b) $x - 6 = 14 - x$; $x - 14 = 6 - x$

76 Completa estas ecuaciones con un mismo número para que sean equivalentes.

$7x - 8 = -2x + \ldots\ldots$; $5x + \ldots\ldots = 3x + 3$

77 Completa la siguiente ecuación para que tenga por solución $x = -7$.

$$8 + x = \ldots\ldots + 4$$

78 Resuelve:

a) $3x + 2 = x - 6$ d) $1 + x = 5 - x$

b) $-y - 1 = 5 + y$ e) $z - 2 = -3z - 10$

c) $x + 8 + 3x - 3 = 2x - 3$ f) $\frac{x + 8}{2} = x$

79 Calcula la solución de cada una de estas ecuaciones.

a) $2 - 3x = \frac{-x - 5}{6}$ d) $\frac{-8 + x}{2} = \frac{4x - 5}{6}$

b) $\frac{2x - 1}{5} = \frac{x}{3}$ e) $\frac{x}{7} = \frac{2(x + 3)}{3}$

c) $\frac{3x + 4}{4} = \frac{2x - 8}{3}$ f) $\frac{x}{6} = 2 + \frac{4x + 1}{3}$

g) $\frac{-x + 4}{2} - \frac{2x + 3}{6} + \frac{4x - 1}{5} = \frac{x + 1}{8}$

h) $\frac{-3x + 4}{2} - \frac{x + 1}{3} + \frac{x + 6}{5} = 2 - \frac{3x}{7}$

Desigualdades

80 Intercala el signo < o > entre los siguientes pares de números.

a) 5 y 3 c) 3 y -7

b) 2 y 8 d) $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$

81 Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones.

$$\frac{1}{3}\ ;\ -\frac{1}{3}\ ;\ \frac{3}{7}\ ;\ \frac{7}{6}\ ;\ -\frac{5}{2}$$

82 Si multiplicamos, miembro a miembro, desigualdades del mismo sentido, ¿la desigualdad resultante conserva el mismo sentido?

— Escribe algún ejemplo.

83 Indica si las siguientes frases son ciertas o falsas.

a) Si $a < b$, entonces $a - b < 0$.

b) Si $a < b$, entonces $-a > -b$.

c) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$.

d) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a > c$.

84 Si $a < b$, ¿se cumple siempre que $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$? Escribe algún ejemplo.

Inecuaciones

85 Comprueba si $x = 5$ es solución de las siguientes inecuaciones.

a) $3x < 20$ d) $x^2 - 3x < 4x$

b) $3x + 2 \leq 17$ e) $\frac{3}{4}(x - 1) > 5$

c) $-7 < -x$ f) $2^2 \leq x^2 - \frac{36}{5}$

86 Calcula mentalmente tres soluciones de cada una de estas inecuaciones.

a) $3x - 2 \leq 5$ b) $3(5 - x) > 1$ c) $y \geq -2x$

87 Determina los conjuntos solución de estas inecuaciones.

a) $3x < 9$ b) $-2x > 14$ c) $-x \leq 9$ d) $-2x \geq 6$

88 Representa gráficamente las soluciones de cada una de las inecuaciones del ejercicio anterior.

89 Determina el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones.

a) $0x \leq 3$ b) $0x < -2$ c) $0x > 0$ d) $3x \geq 0$

90 Escribe dos inecuaciones cuyo conjunto solución sea el representado en la recta.

— ¿Cómo son estas dos inecuaciones?

91 Contesta justificando la respuesta.

a) ¿Puede ser $\mathbf{S} = (-2, 6)$ el conjunto solución de una inecuación de primer grado con una incógnita?

b) ¿Puede ser el intervalo $(-2, +\infty)$ el conjunto solución de un sistema de inecuaciones de primer grado?

92 Resuelve estas inecuaciones y representa gráficamente las soluciones.

a) $5x - 3 \leq 2x + 9$

b) $2(x - 3) < 21$

c) $4(3 - x) < x + 12$

d) $2(7x - 1) - 8x < 3(2x - 1)$

e) $2x - 3(5x - 1) < 3 - (13x + 8)$

f) $3(4 - x) - (2x + 1) \geq 5x + 1$

g) $1 - 5x > 3(7 - x) - 2x$

h) $5(x - 3) + 6 < 5x - 9$

i) $\dfrac{5}{3} - 7x < \dfrac{1}{2} + \dfrac{4x}{5}$

j) $\dfrac{5 - x}{3} - \dfrac{2 + x}{2} \leq \dfrac{4 - 7x}{6}$

k) $\dfrac{1}{4}(x - 3) \leq \dfrac{1}{3}(2x + 5)$

l) $\dfrac{x - 3}{2} - \dfrac{x + 1}{5} \leq 3 - \dfrac{3x - 1}{10}$

93 @ En la página http://www.quickmath.com/www02/pages/modules/inequalities/index.shtml encontrarás una herramienta para calcular inecuaciones. Utilízala para resolver las inecuaciones *f*), *g*), *h*) e *i*) del ejercicio anterior.

94 Determina si el par $(x, y) = (2, -1)$ es solución de cada una de las siguientes inecuaciones.

a) $2x - 3y > 5$ b) $4x + 3y < 0$

95 Determina en el plano dos puntos cuyas coordenadas sean solución de estas inecuaciones.

a) $3x - 2y \geq 7$ b) $5x - y > 1$

Sistemas de inecuaciones

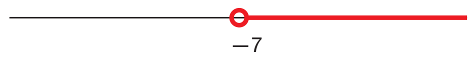
96 ¿Cuáles de estos valores son solución de este sistema: $x = -1$, $x = 3$, $x = -5$, $x = 4$?

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 8 > 5 \\ 2x + 3 \leq 9 \end{array}\right\}$$

97 Escribe un sistema de inecuaciones cuyo conjunto solución corresponda al representado en cada uno de los apartados siguientes.

a)

b)



98 Halla gráficamente las soluciones de estos sistemas de inecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{l} x < \dfrac{-1}{3} \\ x > -10 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x \geq 5 \\ x > -1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} x < 3 \\ x \leq 7 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} x \geq \dfrac{3}{5} \\ x < 19 \end{array}\right\}$

99 Resuelve estos sistemas de inecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{l} x < -3 \\ x - 1 \leq 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x > 6 \\ 5(x - 1) < 2x + 7 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} x + 3 > -2 \\ 5x - 3 \leq 7x + 9 \end{array}\right\}$

d) $5 < 3x - 1 \leq 8$

Aplicación en la práctica

100 En una campaña de recogida de alimentos se han reunido 1 200 kg. La cantidad de arroz es el doble que la de azúcar, que a su vez es el triple que la de pasta. Calcula cuántos kilogramos de cada alimento se han recogido.

101 Un coche tiene un consumo medio de 7,6 litros de gasolina cada 100 kilómetros.

a) Escribe una expresión algebraica que indique su consumo al cabo de x kilómetros.

b) Aproximadamente, ¿cuántos litros consume al recorrer 150 kilómetros? ¿Y al recorrer 180 kilómetros?

102 Una empresa de alquiler de vehículos cobra $ 18 diarios por el alquiler de un automóvil más $ 0,75 por kilómetro recorrido.

a) Escribe mediante una expresión algebraica el precio que debe pagarse por alquilar el automóvil durante x días y recorrer y kilómetros.

b) Halla el precio que debe pagarse por alquilar un automóvil 3 días y recorrer 523 kilómetros.

103 El número de libros de la biblioteca de un colegio es igual al triple de alumnos del centro más 150. El número de alumnos que asisten, entre los dos turnos, es el doble de la capacidad de las aulas, que es de 200 personas. ¿Cuántos libros hay en la biblioteca?

104 Entra en Internet en la página http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/Revista/Ingenioso2/Alkhwarizmi.htm e indica a quién se conoce como padre del álgebra, y su lugar y su fecha de nacimiento.

105 En la página http://aula.elmundo.es/aula/laminas/lamina1079950514.pdf aparece otro significado de la palabra *álgebra*. Comprueba si es cierto en el diccionario.

106 Formen grupos de trabajo y escriban ecuaciones equivalentes que tengan por solución el día de hoy y en las que los distintos coeficientes de la incógnita sean los días de nacimiento de los componentes del grupo.

107 Halla tres números consecutivos tales que, al sumar el triple del segundo con el doble del tercero, se obtenga 22.

108 Un pintor tarda 2 horas en pintar una pared y otro tarda 3 horas en pintar la misma pared. ¿Cuánto tiempo tardarían en pintar dicha pared los dos pintores a la vez?

109 En una librería hemos comprado 12 esferográficos. Si nos hubiesen hecho un descuento de $ 2 por cada uno, hubiésemos podido comprar 3 más.

a) ¿Cuánto nos ha costado cada esferográfico?

b) ¿Cuánto dinero hemos gastado?

110 Un bus sale a las 8 de la mañana de Quito con dirección a Guayaquil a una velocidad constante de 90 km/h. A las 10 de la mañana un auto parte en la misma dirección a una velocidad de 120 km/h.

a) ¿A qué hora se encontrarán?

b) ¿Qué distancia habrán recorrido?

111 Durante su tiempo libre, Inti nada, lee y sale con sus amigos. En la última semana ha dispuesto de 18 h de tiempo libre y ha dedicado a la lectura la mitad del tiempo que ha destinado a la natación y a la natación la tercera parte del tiempo establecido para salir con sus amigos. ¿Cuánto tiempo ha dedicado a cada una de las actividades?

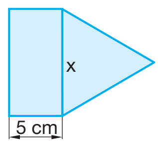
112 Calcula las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo cuya área es 10 cm^2 si sabes que son dos números consecutivos.

113 Resuelve la siguiente ecuación: $1 - 3x = 2x - 9$. A continuación, entra en la página web http://descartes.cnice.mecd.es/1y2_eso/Resolucion_geometrica_ecuaciones y comprueba su resolución gráfica de dicha ecuación.

114 Entra en la página http://suanzes.iespana.es/diofanto.htm y busca información sobre Diofanto de Alejandría y sobre las ecuaciones diofánticas.

115 Obtén los números tales que si a su doble le sumamos 7 unidades resulta un número mayor que el obtenido al restar a su triple 5 unidades.

116 Averigua para qué valores de *x* el perímetro del triángulo equilátero de la figura es menor que el del rectángulo.



117 La diferencia de edades entre un padre y un hijo es 24 años. ¿A partir de qué momento la edad del padre será menor o igual que el triple de la edad del hijo?

118 Mónica y Víctor reúnen más de $ 18 para comprar un regalo. Si Mónica aporta $ 4,8 más que Víctor, ¿cuál habrá sido como mínimo la aportación de Mónica?

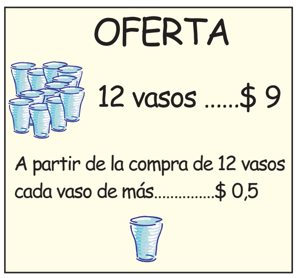
119 Las condiciones que dos empresas informáticas ofrecen a sus comerciales son las siguientes:

Empresa A: $ 900 fijos al mes más $ 60 por cada computadora vendido.

Empresa B: $ 600 fijos al mes mas $ 100 por cada computadora venido.

¿Cuántas computadoras debe vender como mínimo un vendedor de la empresa B para que sus ingresos mensuales superen a los de un vendedor de la empresa A?

120 En la preparación de una fiesta necesitamos comprar vasos y nos fijamos en la siguiente oferta.



Calcula el número mínimo de vasos que deben comprarse para que el precio de cada vaso no supere $ 0,6.

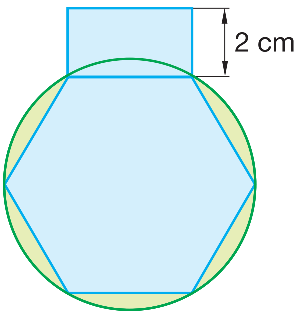
121 En un centro comercial todas las camisas tienen el mismo precio. Si con

$ 60 puedo comprar dos camisas pero con $ 120 no puedo comprar cinco, ¿cuál puede ser el precio de una camisa?

122 Las notas obtenidas por un estudiante en dos pruebas son 6 y 7. ¿Qué nota puede haber obtenido en la tercera prueba si su nota media está comprendida entre 6,5 y 7,5?

123 Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 16 cm y su área está comprendida entre 80 y 96 cm^2. ¿Cuánto puede medir el otro cateto?

124 Si el perímetro del rectángulo señalado en la figura ha de ser mayor que la longitud de la circunferencia, ¿cuánto puede medir el lado desconocido de dicho rectángulo?



125 Para efectuar una mudanza, se nos ofrecen dos transportistas. El primero cobra $ 50 para distancias inferiores a 20 km y aumenta el precio en $ 0,6 por cada kilómetro que exceda de los 20 km. El segundo transportista cobra un fijo de $ 25 y $ 0,8 por kilómetro, sea cual sea la distancia que ha de recorrer. ¿A partir de qué distancia es preferible contratar al primer transportista?

126 Formen grupos de 3 o 4 miembros, elijan una característica por la que puedan clasificar a sus compañeros y compañeras (estatura, número de calzado, número de hermanos...), y elaboren una tabla con ellas.

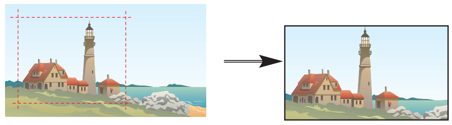
A partir de los resultados y utilizando las inecuaciones, planteen un problema que los demás puedan resolver.

127 En un taller artesanal de Ibarra, se han vendido los siguientes pares de zapatos en septiembre. Con estos datos realiza un diagrama de tallo y hojas.

3	11	7	5	9	10
9	7	8	7	11	9
7	9	7	11	8	7
5	6	12	10	7	8
9	11	9	7	8	9

Más a fondo

128 Recortamos alrededor de una lámina rectangular de 20 cm de base unas tiras de 3 cm de ancho y su área disminuye 174 cm^2.



¿Cuál era la altura de la lámina antes de recortarla?

129 Halla alguna solución para las ecuaciones siguientes.

) $x^2 = 0$) $(1-3x)^2 = 0$

) $x^2 = 1$) $2(2-x)^2 = 0$

) $2(1+x) - 3(1+x) - 7(1+x)^2 = 0$

130 Silvia trabaja clasificando diversos minerales y cajas. Si coloca 5 minerales en cada caja, queda una vacía y si coloca 4, queda un mineral sin caja. ¿Cuántos minerales y cajas tiene Silvia?

131 Dados los números *a, b, c* y *d,* que verifican las relaciones $a < b$ y $c < d$.

a) Comprueba que: $a + c < b + d$

b) ¿Se cumple siempre que $a - c < b - d$? Pon un ejemplo.

132 Los números cuyo valor absoluto es menor o igual que un número $a \geq 0$ son, por definición, los valores de x que cumplen el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} x \leq a \\ -x \leq a \end{array}\right\}$$

Obtén los números cuyo triple disminuido en 2 unidades tenga un valor absoluto menor o igual que 12.

133 Halla los valores de x para los que se cumplen estas desigualdades, y represéntalos gráficamente.

a) $|x| < 5$ c) $|x+1| \leq 3$

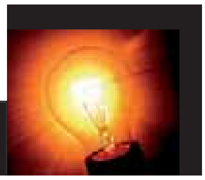
b) $|x| > 1$ d) $|x+5| \geq 4$

Recuerda que la notación $|x|$ significa valor absoluto de x.

134 Un fondista corre a una velocidad de 6 km/h. Averigua cuánto deberá aumentarla para recorrer una distancia de 4 km en menos de 30 min.

135 Ana dispone de 1 l de zumo de naranja y 45 cl de zumo de durazno para elaborar un refresco. ¿De qué volumen de zumo de naranja deberá prescindir para que su contenido represente entre el 60 % y el 65 % del total de litros del refresco?

Demuestra tu ingenio



Mensajes cifrados

Te presentamos un código para enviar mensajes secretos.

En las teclas de un teléfono móvil, a cada número del 2 al 9 le corresponde un grupo de letras.

Cada número del mensaje se asocia a la primera letra de la tecla que contiene dicho número; pero si está precedido de un signo negativo, se asocia a la segunda letra, y precedido de un 0, a la tercera. Además, el 6, el 7 y el 9 precedidos de un 1, indican, respectivamente, la «ñ», la «s» y la «z».

Di a qué compositor de música clásica se refiere este mensaje.

1704–2–30504–817

¿Cómo se escribe tu nombre con este código?

Consigue un gran resultado

¿Cuál es el mayor valor posible, superior al millón, que puede escribirse utilizando sólo tres números del 0 al 9?

Con cuatro 4

¿Eres capaz de escribir los números desde el 1 hasta el 12 con cuatro 4 (no puedes utilizar ni más ni menos)? Como muestra te damos los tres primeros.

$$1 = \frac{44}{44} \qquad 2 = \frac{4+4}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}$$

$$3 = \frac{4+4+4}{4}$$

¿Qué números son?

Averigua el valor de tres números distintos tales que su producto es 16 y su suma es –7.

Buen Vivir

Trabajo y seguridad social

El trabajo y la seguridad social están contemplados de manera expresa en la Constitución actual, sin embargo, todavía existen rezagos de desigualdad en estos ámbitos en la sociedad ecuatoriana.

Las leyes laborales exigen igualdad de género, inclusión de los grupos vulnerables y respeto a los derechos de los trabajadores. Por este motivo, las grandes empresas e instituciones públicas están obligadas a contratar personas con diversas capacidades, de diferentes etnias, tanto hombres como mujeres, entre otros aspectos. Así mismo, todos los trabajadores deben recibir al menos el salario mínimo vital, las compensaciones de ley, el derecho a vacaciones y la seguridad social. Estos significativos avances de inclusión tanto en las instituciones privadas como públicas permiten que otras entidades como las bancarias, universidades y empresas trasnacionales, están abriendo sus puertas a la fuerza laboral tradicionalmente marginada. Estas experiencias, aunque todavía insuficientes, alientan a que las ecuatorianas y ecuatorianos puedan profesionalizarse y aspirar a un empleo, trato y salarios dignos.

Actividades

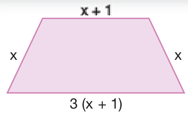
1. Investiguen con los datos del último censo poblacional 2010, cifras acerca de la inclusión de la mujer, de las personas con capacidades especiales y de personas de diversas etnias en el mercado laboral.
2. Comenten en clase: ¿por qué la generación de fuentes de trabajo debe ser una preocupación del estado y de las empresas privadas?, ¿cómo influye el trabajo en el país?
3. ¿Cómo pueden las instituciones educativas fomentar el hábito del trabajo?, ¿cómo puede hacerlo cada uno desde sus tareas y responsabilidades?

Autoevaluación

Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

1. El perímetro del siguiente trapecio es 28 cm. Halla la longitud de cada uno de sus lados.



2. Escribe la ecuación correspondiente a este enunciado y resuélvela por el método de ensayo-error.

   El cuadrado de un número positivo más su doble es igual a 288.

3. Si $a \leq b$, indica cuál de las siguientes desigualdades es incorrecta.

   a) $a + c \leq b + c$, para todos los valores de c.

   b) $a \cdot c \geq b \cdot c$, cuando $c > 0$.

   c) $a \cdot c \geq b \cdot c$, cuando $c < 0$.

4. Indica para cuál de las siguientes inecuaciones el valor $x = 3$ es solución.

   a) $5\,(2x - 3) > 4x + 7$

   b) $3 - x < \dfrac{4x}{3} - 4$

   c) $\dfrac{7\,(2x - 1)}{5} \geq \dfrac{3x - 1}{2}$

5. El producto del número anterior a otro natural por su siguiente es 399. ¿De qué número se trata?

1. Resuelvan las ecuaciones siguientes.

   a) $12 - 33x = 30 - 15x$

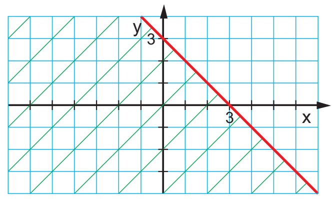
   b) $2(3 - x) + x - 5 = 12 - 3x$

   c) $12 - x = \dfrac{-2x - 5}{3} - 5x$

2. ¿Cuál de las siguientes inecuaciones es equivalente a la inecuación $10x - 12 > 4x + 8$?

   a) $6x \geq 10$ b) $5x < 2x + 10$ c) $3x > 10$

3. Señalen cuál de estas inecuaciones tiene como solución la región rayada en la figura de la derecha.



   a) $3 - x \leq y$ b) $3 + x > y$ c) $3 - x \geq y$

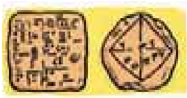
4. Realicen un diagrama de tallo y hojas con las edades de estos niños.

12	7	13	7	12	7	10
8	10	12	9	9	11	8
9	11	11	10	14	13	6

Historia

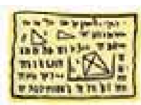
Sección de historia

En el siglo XVII a. C., los matemáticos de Mesopotamia y de Babilonia ya sabían resolver ecuaciones de primero y segundo grado.



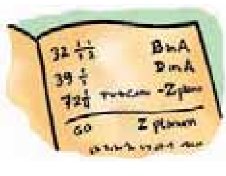
Alrededor del siglo II a. C., los matemáticos chinos escribieron el libro *Jiu zhang suan shu,* (Nueve capítulos del arte matemático), en el que plantearon métodos para resolver ecuaciones de primero y segundo grado.

En el siglo VII, los hindúes habían desarrollado ya las reglas algebraicas fundamentales para manejar números positivos y negativos.



En el siglo IX, el matemático y astrónomo musulmán Al-Jwarizmi escribió acerca de los procedimientos algebraicos para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones. La palabra *álgebra* deriva del título de su obra *Al-jabr wal muqabala.*

En el siglo XVI, el matemático francés François Viète desarrolló una notación algebraica muy cómoda; representaba las incógnitas con vocales y las constantes con consonantes.



En el siglo XVII, el matemático francés René Descartes inventó la notación algebraica moderna, en la cual las constantes están representadas por las primeras letras del alfabeto, *a, b, c…,* y las variables o incógnitas por las últimas, *x, y, z.*

Crónica matemática

En enero de 2007, la NASA anunció que en todas sus futuras operaciones y misiones a la Luna utilizará el Sistema Métrico Decimal en sus ecuaciones.

La evolución de la notación

Las expresiones algebraicas que llamamos ecuaciones se han expresado de distinta forma a lo largo de los siglos. En el siguiente ejemplo se muestra cómo distintos matemáticos escribirían una misma ecuación.

Matemático actual: $3x - 7 = 0$

Descartes (s. XVII): $3x - 7 = 0$

Stevin (s. XVI): 3 ① – 7 · = 0

Viete (s. XVI): 3 in A plano -7 aequator 0

Regiomontano (s. XV): Demptis 7 et 3 rebus aequator 0

Chuquet (s. XV): 3’ m 7 aequalis 0

¿Cómo habrían escrito estos matemáticos la ecuación $-2x + 5 = 0$?

Johann Müller Regiomontano

La ecuación, según Newton

Este fragmento corresponde a la obra *In Algebram Gerardi Kinchkhuysen Observationes,* de Isaac Newton (1642-1727), en la que aportaba sus investigaciones en forma de comentarios al libro de álgebra de Kinckuysen:

«Todo aquel que esté preparado para resolver algún problema deberá siempre tener en mente que se puede tener una ecuación a través de la cual hallar la cantidad buscada. Una ecuación es un conjunto de cantidades tal que una parte de las cuales iguala la otra o que todas juntas se igualan a 0. Por ejemplo, $x + a = b$, o $x + a - b = 0$; esto es, $x + a$ es igual a b o $x + a - b$ es igual a 0. Con la marca = se designa la igualdad de las cantidades entre las cuales está colocada.»

Las ecuaciones se consideran de dos modos especiales: o como últimas conclusiones alcanzadas al resolver problemas, o como medios con cuya ayuda se logran las ecuaciones finales. Una ecuación del primer tipo no es sino la fusión de una única cantidad desconocida mezclada con otras conocidas, siempre que el problema esté definido y se esté buscando algo cierto. Pero aquellas del último tipo involucran varias cantidades desconocidas, y por esta razón deben compararse una con otra de modo que de la unión entre ellas emerja por fin una sola ecuación nueva, en la que hay una única cantidad que buscar, entremezclada con otras conocidas. A partir de entonces, para obtener esa cantidad de la forma más fácil, dicha ecuación generalmente debe transformarse de varias maneras hasta que sea lo más simple posible…

Las TIC y la Matemática

http://www.jpl.nasa.gov

Las ecuaciones y sus unidades

Al sustituir las variables de una ecuación por sus valores numéricos hay que estar atento a las unidades utilizadas.

En 1999, la sonda robótica Mars Climate Observer, enviada por la NASA para que se mantuviera en órbita alrededor de Marte y estudiara su clima, se estrelló en la superficie de ese planeta. El fallo de la misión se debió a que el proveedor había facilitado los datos para activar el propulsor expresándolos en el sistema inglés de unidades pero sin especificarlo. El laboratorio que calculaba las órbitas utilizaba el Sistema Internacional en sus ecuaciones y tomó los valores del proveedor sin realizar la conversión de unidades. ¡Se insertaron en las ecuaciones valores erróneos!

Módulo 6

Bloques: Geométrico. Medida

Buen Vivir: Conservación del patrimonio natural

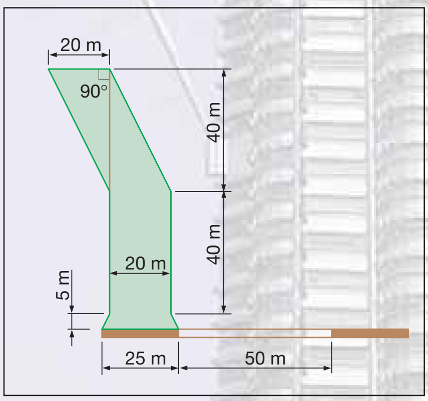
http://portalevlm.usal.es

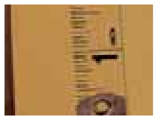
Imagina que debes confeccionar el plano de dos edificios simétricos situados uno a cada lado de la calle de una ciudad como en varios edificios de condominios que hay en nuestro país.

Observa la figura de la derecha que representa el plano de uno de los edificios y la calle de la ciudad.

Dibuja el plano en tu cuaderno modificando sus dimensiones para que la escala sea 1 : 2 000.

A continuación, dibuja el segundo edificio valiéndote de la simetría entre ambos. Ten en cuenta que la base del segundo edificio debe quedar situada en el otro extremo de la calle.



Líneas de simetría
Áreas
Medidas en grados de ángulos notables

En este módulo *ampliarás* tus conocimientos sobre transformaciones de figuras planas: traslaciones, simetrías y áreas. También *aprenderás* sobre las medidas en grados de los ángulos notables.

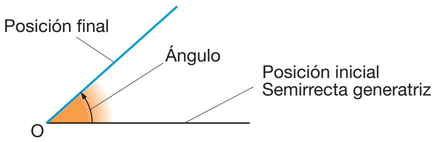
DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Reconocer líneas de simetría en figuras geométricas.
- Aplicar traslaciones y simetrías a figuras en el plano en casos sencillos.
- Construir pirámides y conos a partir de patrones en dos dimensiones.
- Calcular áreas laterales de prismas y cilindros en la resolución de problemas.
- Reconocer medidas en grados de ángulos notables en los cuatro cuadrantes con el uso de instrumental geométrico.
- Afrontar problemas geométricos con confianza en las propias capacidades.

Prerrequisitos

Recuerda

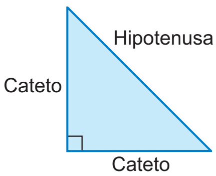
- Un ángulo es la región del plano barrida por una semirrecta al girar respecto de su origen desde una posición inicial hasta una posición final. Esta semirrecta que gira se denomina semirrecta generatriz.



- Los **polígonos regulares** son los que tienen todos sus lados y ángulos iguales.
- Un **triángulo rectángulo** es aquel que tiene un ángulo recto. Sus lados reciben nombres especiales:

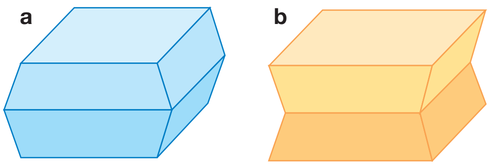
  Hipotenusa: lado opuesto al ángulo recto.

  Catetos: cada uno de los lados que forman el ángulo recto.

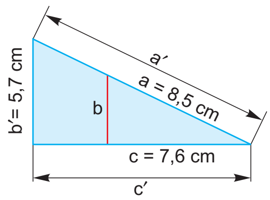


Evaluación diagnóstica

- Describe un procedimiento para trazar rectas paralelas con la regla y la escuadra.
- Dibuja un segmento *AB* y traza su mediatriz. ¿Qué propiedad cumplen los puntos de la mediatriz?
- Representa los siguientes ángulos valiéndote del graduador de ángulos: 30°, 45°, 90°, 130° y 270°.
- Observa los ángulos poliedros de estos cuerpos e indica cuál de ellos es convexo y cuál es cóncavo.



- Escribe las fórmulas que permiten calcular las áreas de las figuras planas sencillas.
- Calcula el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 25 cm y 32 cm.
- Enuncia los criterios de semejanza de triángulos.
  — ¿Cómo se enuncian estos criterios en el caso de triángulos rectángulos?
- Calcula las medidas que faltan en la figura de la derecha.



Conservación del patrimonio natural

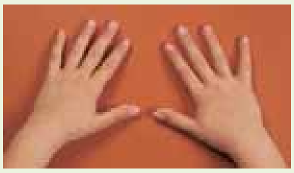
Art. 404.- El patrimonio natural del Ecuador único e invaluable comprende, entre otras, las formaciones físicas, biológicas y geológicas cuyo valor desde el punto de vista ambiental, científico, cultural o paisajístico exige su protección, conservación, recuperación y promoción.

Constitución de la República del Ecuador, 2008.

FÍJATE

Transformación **isomórfica:** se mantiene la forma.

Transformación **isométrica:** se mantienen las distancias y, por ello, también la forma.



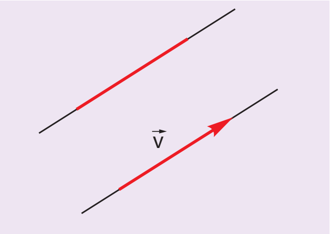


Fig. 1

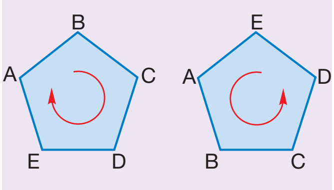


Fig. 2

1 Transformaciones isométricas o movimientos

Diremos que hemos aplicado una **transformación geométrica** si a partir de un punto obtenemos otro aplicando una regla precisa.

Si aplicamos esta transformación a todos los puntos de una figura, obtendremos una nueva figura llamada figura transformada.

Si al aplicar la transformación la figura transformada conserva las dimensiones, y por ello, la forma y el tamaño, habremos aplicado una *transformación isométrica*.

> Una **transformación isométrica**, o **movimiento,** es aquélla en que la figura transformada conserva las dimensiones de la figura original.

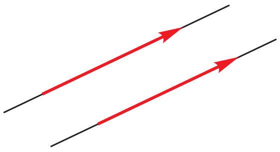
Antes de describir los movimientos en el plano, definiremos el concepto de *vector* y el *sentido de una figura plana*.

En la figura 1 puedes observar dos segmentos de igual longitud con la misma dirección.

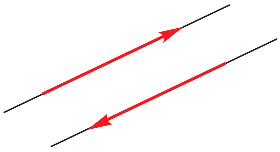
Fíjate en que uno de ellos tiene una punta de flecha que indica su sentido. Se trata de un vector y se representa mediante una letra con una flechita encima, $\vec{v}$.

> Un **vector** es un **segmento orientado.**

Observa que dos vectores pueden tener la misma dirección y mismo sentido o la misma dirección pero sentido contrario.



Misma dirección y mismo sentido



Misma dirección y sentido contrario

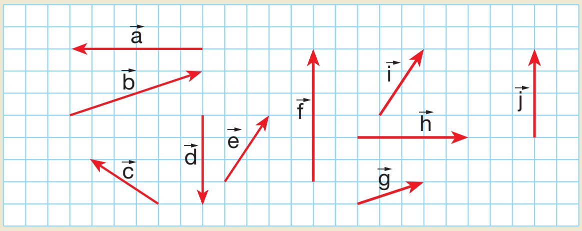
Fíjate en cómo se establece el sentido de una figura plana.

Si nombramos consecutivamente los vértices de un pentágono, le proporcionamos una ordenación, es decir, un sentido.

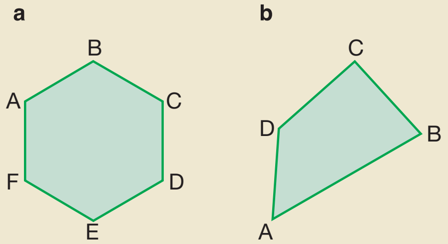
En la figura 2 se observa que en el plano podemos considerar el sentido de las manecillas del reloj (horario) o el sentido contrario (antihorario).

Actividades

1 Indica cuáles de los siguientes vectores tienen la misma dirección y el mismo sentido, y cuáles cuentan con la misma dirección y el sentido contrario.



2 Indica el sentido de los vértices de cada una de estas figuras planas.



1.1. Simetrías

A continuación, estudiaremos dos tipos de simetría: la *simetría central* y la *simetría axial*.

Simetría central

Observa la figura 3. Fíjate en que los vértices homólogos equidistan del centro *O* y están alineados con éste. Por lo tanto, diremos que los triángulos *ABC* y *A′B′C′* son simétricos respecto al punto *O,* llamado centro de simetría. Luego:

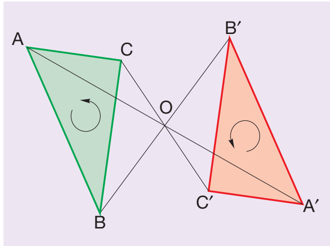
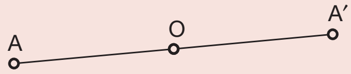


Fig. 3

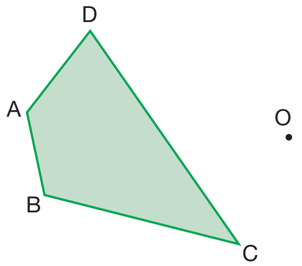
Una **simetría central** de centro ***O*** es un movimiento en el plano que transforma un punto *A* en otro *A′* alineado con *O* y *A,* de modo que *OA* = *OA′*.



Aprende con el ejemplo siguiente un procedimiento para construir la figura simétrica a otra respecto a un punto.

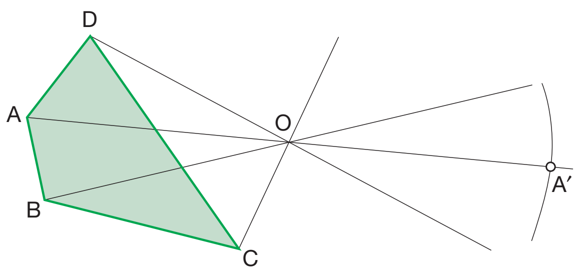
ejemplo 1

Construye el cuadrilátero simétrico de ABCD *considerando el punto* O *como centro de simetría.*



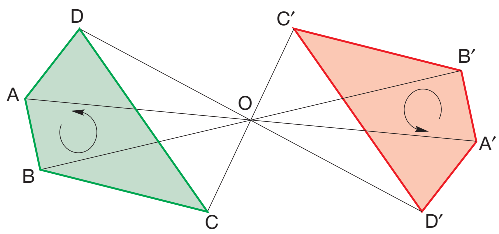
— Trazamos, con origen en cada uno de los vértices, las semirrectas que pasan por el centro *O*.

Sobre la semirrecta con origen en el vértice *A* determinamos el vértice *A′*, homólogo de *A,* al otro lado del centro *O* y a una distancia de *O* igual que la distancia de *O* a *A*.



— Repetimos el proceso con los otros vértices, *B*, *C* y *D,* y determinamos sus homólogos, *B′*, *C′* y *D′*.

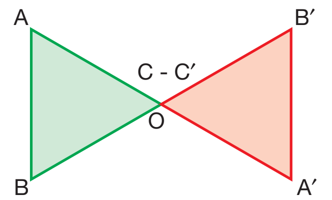
— Unimos dichos puntos y obtenemos el cuadrilátero *A′B′C′D′* simétrico u homólogo del cuadrilátero *ABCD*, respecto al punto *O*.



En una simetría central se cumple que:

- Toda recta determinada por dos puntos homólogos pasa por el centro de simetría.
- Las rectas que contienen segmentos homólogos son paralelas.
- El sentido de las figuras se conserva, luego decimos que la simetría central es un *movimiento directo* del plano.

Observa el triángulo *ABC* de la derecha y fíjate en que si le aplicamos la simetría central con centro en el punto *C,* este punto de la figura se transforma en sí mismo. Diremos, entonces, que es un punto invariante o un *punto doble*.



FÍJATE

El cuadrado *ABCD* es invariante por una simetría central con centro en el punto *O*. Observa, sin embargo, que sus vértices no son puntos dobles pues no se transforman en ellos mismos.

$A' = C$

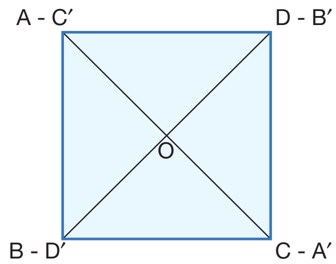
$B' = D$

$C' = A$

$D' = B$

Un **punto** es **invariante** o **doble** si éste se transforma en sí mismo.

A continuación, observa el cuadrado *ABCD* y fíjate en que si le aplicamos la simetría central con centro en el punto *O,* la figura se transforma en sí misma. Diremos, entonces, que es una *figura invariante* y que el centro *O* es el centro de simetría de dicha figura.

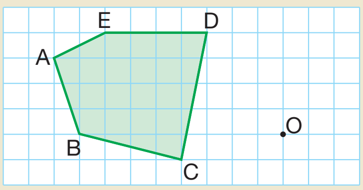


Una **figura** es **invariante** si ésta se transforma en sí misma.

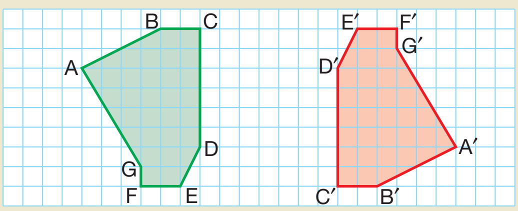
- Observa, a continuación, diferentes objetos invariantes por una simetría central.

Actividades

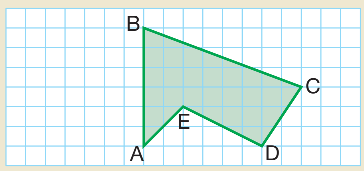
3 Dados el pentágono *ABCDE* y el punto *O,* construye el pentágono simétrico considerando el punto *O* como centro de simetría.



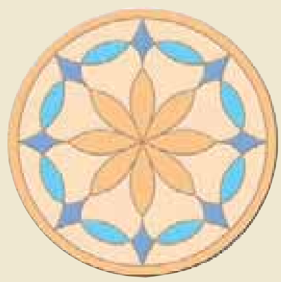
4 ¿Dónde debería situarse el centro de la simetría central que nos permite pasar de la figura de la izquierda a la de la derecha?



5 Construye la figura simétrica del pentágono *ABCDE,* si queremos que el punto *D* se mantenga invariante.



6 Indica, si existe, el centro de simetría de cada una de estas figuras.



a

b

Simetría axial

Observa la figura 4. Fíjate en que los vértices homólogos equidistan del eje *e* y se encuentran sobre rectas perpendiculares a éste. Por lo tanto, los triángulos *ABC* y *A′B′C′* son simétricos respecto a la recta *e*, llamada *eje de simetría*. Luego:

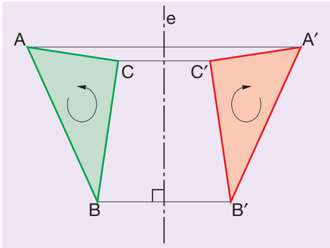
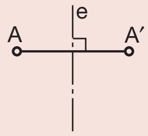


Fig. 4

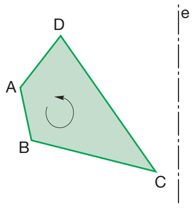
Una **simetría axial** de eje ***e*** es un movimiento en el plano que transforma un punto *A* en otro *A′* situado a la misma distancia del eje y de modo que la recta *AA′* es perpendicular al eje.



Aprende con el ejemplo siguiente un procedimiento para construir la figura simétrica a otra respecto a un eje.

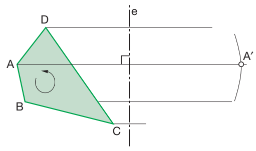
ejemplo 2

Construye el cuadrilátero simétrico a ABCD *considerando la recta* e *como eje de simetría.*



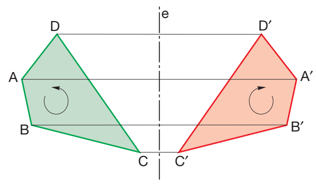
— Trazamos, con origen en cada uno de los vértices, las semirrectas perpendiculares al eje *e*.

Sobre la semirrecta con origen en el vértice *A* determinamos el vértice *A′*, homólogo de *A*, al otro lado del eje *e* y a una distancia de *e* igual que la distancia de *A* a *e*.



— Repetimos el proceso con los otros vértices, *B*, *C* y *D*, y determinamos sus homólogos, *B′*, *C′* y *D′*.

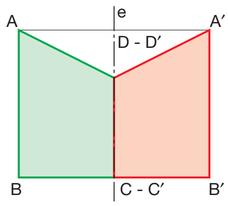
— Unimos dichos puntos y obtenemos el cuadrilátero *A′B′C′D′* simétrico u homólogo del cuadrilátero *ABCD* respecto al eje *e*.



En una simetría axial se cumple que:

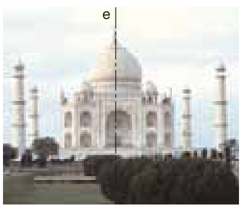
- El eje de simetría es la mediatriz de cada uno de los segmentos que unen puntos homólogos o simétricos.

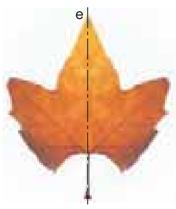
Observa el cuadrilátero *ABCD* de la derecha y fíjate en que si le aplicamos la simetría axial con eje de simetría en la recta *e*, los puntos de la figura situados sobre esta recta se transforman en sí mismos. Se trata, por lo tanto, de una *recta invariante*.



Un **recta** es **invariante** si ésta se transforma en sí misma.

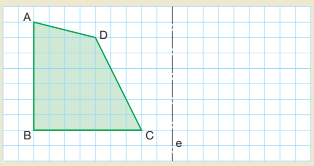
- Observa, a continuación, diferentes elementos invariantes por una simetría axial.



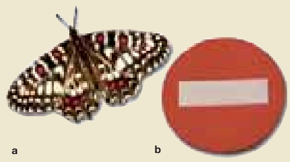


Actividades

7 Dados el cuadrilátero *ABCD* y el eje *e*, construye el cuadrilátero simétrico considerando el eje *e* como eje de simetría.



8 Traza todos los ejes de simetría de los siguientes elementos.



2 Áreas

Como ya sabes, el **área** de un cuerpo geométrico es la medida de la superficie que lo delimita.

Hay cuerpos geométricos, como la pirámide o el prisma, que tienen varias caras laterales y una o dos bases. En estos casos se distinguen el *área lateral* y el *área total.*

- El **área lateral** se obtiene sumando las áreas de todas las caras laterales.
- El **área total** se obtiene sumando el área lateral y el área de la base o bases.

Si recortamos el cuerpo geométrico de la figura 5 por las aristas indicadas en rojo y lo desplegamos hasta hacerlo coincidir con un plano, obtenemos su **desarrollo plano.** Observa que el área del desarrollo plano coincide con el área del cuerpo geométrico.

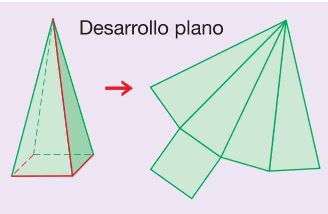
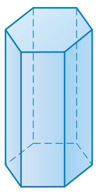
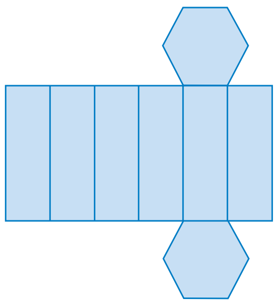
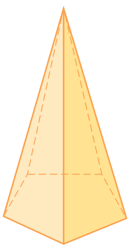
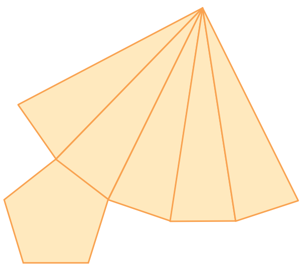
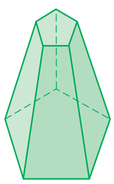
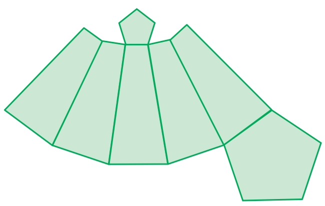


Fig. 5

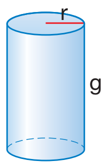
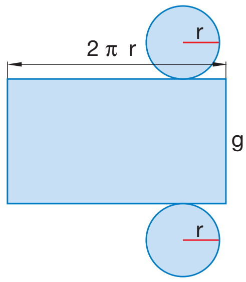
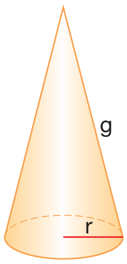
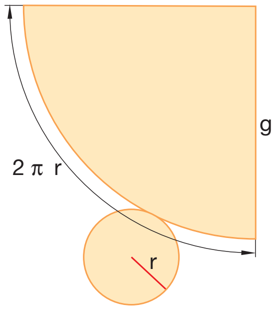
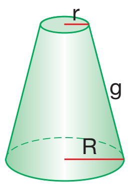
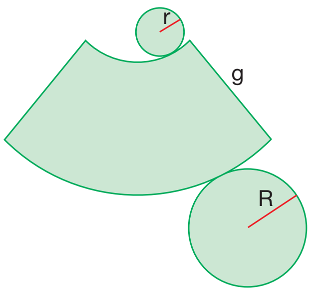
2.1. Áreas de prismas, pirámides y troncos de pirámide

Veamos cómo calcular el área lateral y el área total de un prisma, de una pirámide y de un tronco de pirámide a partir de sus patrones planos.

Figura	Desarrollo plano	Área lateral y área total
 **Prisma**		• **Área lateral:** la superficie lateral está formada por paralelogramos. $A_{\text{lateral}} = \text{Área de sus caras laterales}$ • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de las dos bases. $A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}}$
 **Pirámide**		• **Área lateral:** la superficie lateral está formada por triángulos. $A_{\text{lateral}} = \text{Área de sus caras laterales}$ • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de la base. $A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}}$
 **Tronco de pirámide**		• **Área lateral:** la superficie lateral está formada por trapecios. $A_{\text{lateral}} = \text{Área de sus caras laterales}$ • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de las dos bases. $A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{b_1} + A_{b_2}$

2.2. Áreas de cilindros, conos y troncos de cono

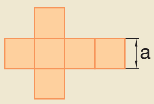
Veamos cómo calcular el área lateral y el área total de un cilindro, de un cono y de un tronco de cono a partir de sus patrones planos.

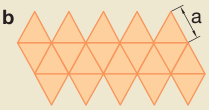
Figura	Desarrollo plano	Área lateral y área total
 **Cilindro**		• **Área lateral:** la superficie lateral es un rectángulo de base la longitud de la circunferencia de la base y de altura la generatriz del cilindro. $A_{\text{lateral}} = 2\pi r \cdot g$ • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de las dos bases. $A_{\text{total}} = 2\pi r \cdot g + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot (g + r)$
 **Cono**		• **Área lateral:** la superficie lateral es un sector circular de radio la generatriz del cono y de longitud de arco la longitud de la circunferencia de la base. $A_{\text{lateral}} = \cancel{2}\,\pi r \dfrac{g}{\cancel{2}} = \pi r \cdot g$ • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de la base. $A_{\text{total}} = \pi r \cdot g + \pi r^2 = \pi r \cdot (g + r)$
 **Tronco de cono**		• **Área lateral:** la superficie lateral es un trapecio circular. $A_{\text{lateral}} = \dfrac{(2\pi R + 2\pi r) \cdot g}{2} = \pi g \cdot (R + r)$ • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de las dos bases. $A_{\text{total}} = \pi g \cdot (R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$

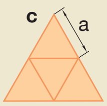
Actividades

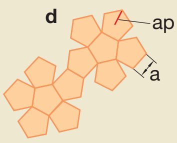
9 Relaciona cada poliedro regular con su desarrollo plano y con la fórmula que permite calcular su área.

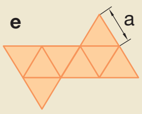
dodecaedro octaedro cubo
icosaedro tetraedro

a 

b 

c 

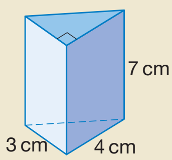
d 

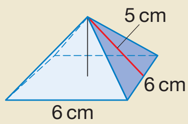
e 

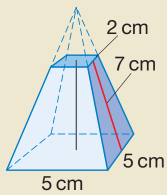
$A = 5\sqrt{3}\,a^2$ $A = 30\,a \cdot ap$ $A = 2\sqrt{3}\,a^2$

$A = 6a^2$ $A = \sqrt{3}\,a^2$

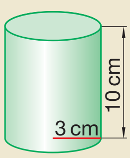
10 Calcula el área lateral y el área total de cada uno de estos poliedros.

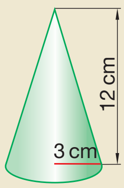

a

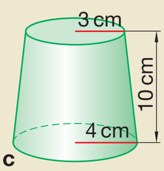

b


c

11 Calcula las áreas laterales y las áreas totales de estos cuerpos de revolución.


a


b


c

3 Medidas en grados de ángulos notables en los cuatro cuadrantes

Un ángulo es la abertura entre dos semirrectas unidas en un punto llamado vértice.

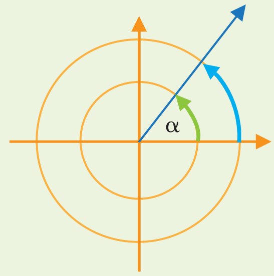
En el primer cuadrante del plano cartesiano podemos graficar un ángulo tomado como vértice al punto (0, 0) y como recta de origen el eje de las abscisas.

Para encontrar la segunda semirrecta, usamos un graduador y contamos los grados de abertura del ángulo. Luego, unimos este punto con el origen del plano, así se forma la segunda semirrecta.

Se puede encontrar algunos ángulos que son múltiplos y submúltiplos de otros, por ejemplo, para hallar el ángulo de 135° es posible sumar tres veces el ángulo de 45°. Observa:

FÍJATE

El ángulo central subtendido por un arco es el mismo, independiente del radio de la circunferencia.

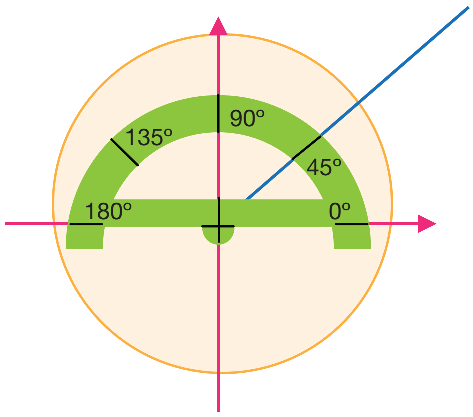


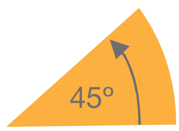
Material concreto

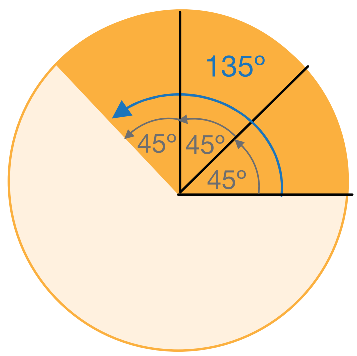
Primero, graficamos círculos de cualquier radio en dos cartulinas.

Después, dibujamos planos cartesianos con su origen, en el centro de los círculos.

Con un graduador, medimos la longitud de un ángulo de 45° y recortamos la porción del círculo con este ángulo, formando así una plantilla.







Finalmente, trasladamos la sección de círculo desde el lado origen, del segundo círculo, hasta completar el ángulo que deseemos.

Con el método indicado anteriormente podemos construir ángulos que sean múltiplos y submúltiplos de cualquier ángulo construido en el primer cuadrante. También podemos graficar ángulos en los cuatro cuadrantes, usando como lado origen el eje de las abscisas y una plantilla.

Actividades

12 Grafica estos ángulos usando plantillas y un graduador.

a. 30° b. 60° c. 45° d. 90°

13 Grafica, a mano alzada, los ángulos: 270°, 120° y 360°. Compara tus dibujos con otros que realices utilizando el graduador.

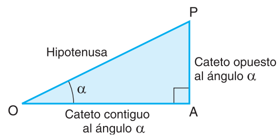
14 Dibuja en los cuatro cuadrantes los siguientes ángulos.

a. 30° b. 60° c. 270° d. 150°

3.1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

En un triángulo rectángulo pueden establecerse ciertas relaciones entre un ángulo agudo y sus lados. La **trigonometría** es la parte de las matemáticas que trata de la relación entre las longitudes de los lados y las amplitudes de los ángulos de un triángulo.

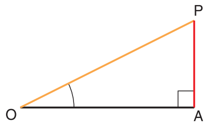
Fíjate en el ángulo agudo α que hemos indicado del triángulo rectángulo *OAP* de la figura de la derecha. Los cocientes entre las longitudes de dos lados cualesquiera de este triángulo se denominan **razones trigonométricas** de α.



Seno

La **razón** entre la longitud del **cateto opuesto** al ángulo α y la de la **hipotenusa** se llama **seno** del ángulo α y se escribe **sen** α.

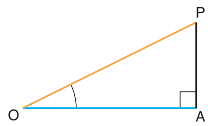
$$\textbf{sen}\ \alpha = \frac{AP}{OP}$$



Coseno

La **razón** entre la longitud del **cateto contiguo** al ángulo α y la de la **hipotenusa** se llama **coseno** del ángulo α y se escribe **cos** α.

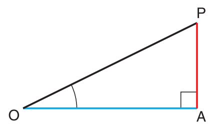
$$\textbf{cos}\ \alpha = \frac{OA}{OP}$$



Tangente

La **razón** entre la longitud del **cateto opuesto** al ángulo α y la del **cateto contiguo** se llama **tangente** del ángulo α y se escribe **tan** α.

$$\textbf{tan}\ \alpha = \frac{AP}{OA}$$

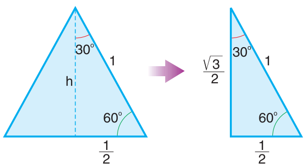


Razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º y 60º

Existen tres ángulos agudos cuyas razones trigonométricas pueden obtenerse a partir de construcciones geométricas sencillas. Son los ángulos de 30º, 45º y 60º.

Razones trigonométricas de los ángulos de 30º y 60º

Consideremos un triángulo equilátero de lado la unidad. La altura lo divide en dos triángulos rectángulos iguales, cuyos ángulos agudos miden 30º y 60º.



Aplicamos el teorema de Pitágoras a uno de esos triángulos para hallar el valor de *h*.

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Así pues, las razones trigonométricas del ángulo de 30º son:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Y, las razones trigonométricas del ángulo de 60º son:

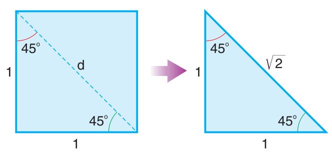
$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Razones trigonométricas del ángulo de 45º

Consideremos un cuadrado de lado la unidad. La diagonal del cuadrado lo divide en dos triángulos rectángulos iguales cuyos ángulos agudos miden 45°.



Aplicamos el teorema de Pitágoras a uno de estos triángulos para hallar el valor de *d*.

$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Así pues, las razones trigonométricas del ángulo de 45º son:

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

4 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

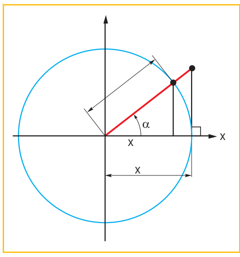
Una vez definidas las razones trigonométricas de un ángulo agudo, veamos cómo podemos definir las razones trigonométricas de otros ángulos.

Representamos el ángulo α en un sistema de coordenadas cartesianas y consideramos un punto cualquiera P de su lado extremo.

En particular, podemos considerar un punto P de su lado extremo situado sobre una circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas (fig. 6). Esta circunferencia recibe el nombre de **circunferencia goniométrica.**

Vamos a ver cómo la circunferencia goniométrica nos permite obtener gráficamente de forma sencilla las razones trigonométricas de cualquier ángulo.

Seno	Coseno	Tangente
$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = \boldsymbol{y}$ El seno del ángulo coincide con la ordenada del punto del lado extremo del ángulo cuya distancia al origen vale 1.	$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = \boldsymbol{x}$ El coseno del ángulo coincide con la abscisa del punto del lado extremo del ángulo cuya distancia al origen vale 1.	$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{y}{x} = \frac{y}{1} = \boldsymbol{y}$ La tangente del ángulo coincide con la ordenada del punto del lado extremo del ángulo cuya abscisa vale 1.



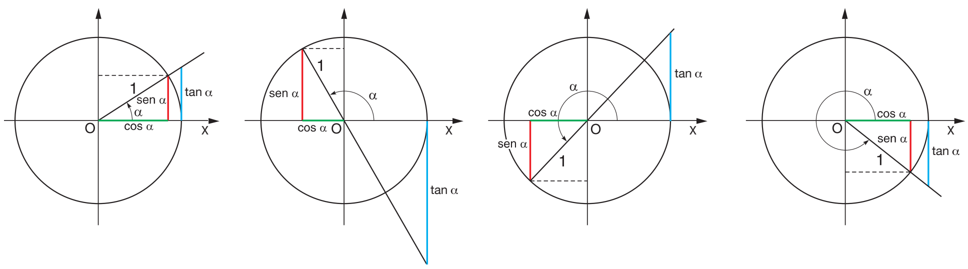
Veamos que estas definiciones no dependen del punto P escogido.

En efecto, si consideramos otro punto P del lado extremo del ángulo α, obtenemos el triángulo $OP\,A$ semejante al OPA (fig. 7); entonces se verifica:

$$\frac{y'}{r'} = \frac{y}{r} = \text{sen}\,\alpha \qquad \frac{x'}{r'} = \frac{x}{r} = \cos\alpha \qquad \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x} = \tan\alpha$$

Es decir, el valor de las razones trigonométricas no varía.

La figura siguiente muestra cómo podemos obtener segmentos representativos del seno, del coseno y de la tangente de ángulos de cualquier cuadrante.



Actividades

15 Indica sobre una circunferencia goniométrica los segmentos representativos del seno, del coseno y de la tangente del ángulo de 150°.

16 Sabiendo que las coordenadas de un punto P del lado extremo de un ángulo son P (–4, –6), calcula el valor de las razones trigonométricas de dicho ángulo.

FÍJATE

La forma en que hemos definido las razones trigonométricas en este apartado coincide con las dadas anteriormente en el caso de un ángulo agudo, ya que si $P(x, y)$ es un punto del lado extremo de un ángulo agudo, el origen de coordenadas O, el punto P y la proyección de P sobre el eje de abscisas son los vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden x e y, y cuya hipotenusa mide r.

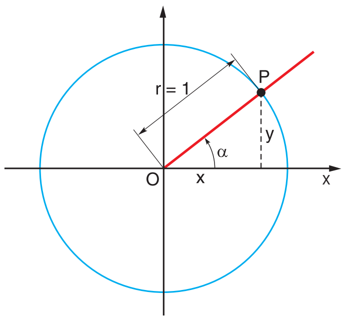


Fig. 6

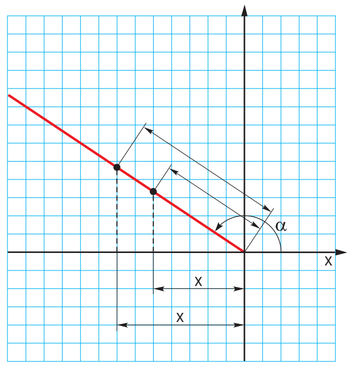


Fig. 7

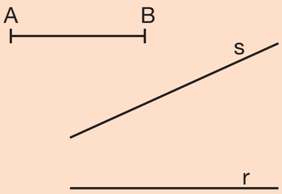
Ángulo	sen	cos	tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	-

Tabla 1. A partir de las definiciones de esta página, podemos hallar las razones trigonométricas de 0° y 90° para completar la tabla.

Cómo resolver problemas

A

Dados el segmento *AB* y dos rectas secantes, *r* y *s*, sitúa un triángulo equilátero *ABC*, de modo que el lado *AB* se encuentre sobre la recta *r* y el vértice *C* sobre la recta *s*.



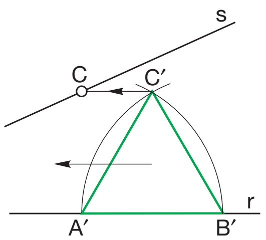
▶ Comprensión del enunciado

Lee atentamente el enunciado e imagina la posible solución del problema.

▶ Planificación de la resolución

— Existen muchos triángulos equiláteros cuyo lado *AB* se encuentra sobre la recta *r*. Construimos uno cualquiera, *A′B′C′*.

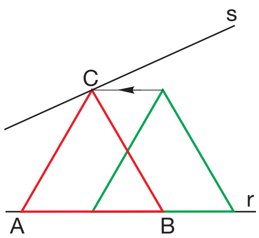
— El vértice *C′* no se halla sobre la recta *s,* pero observa que si trasladamos el triángulo *A′B′C′*, según la dirección de la recta *r,* obtendremos la solución del problema.



▶ Ejecución del plan de resolución

Procedemos tal y como lo hemos planificado. Así pues, desplazamos el triángulo *A′B′C′* hasta situar el vértice *C′* sobre la recta *s*.

Obtenemos el triángulo *ABC*, que es la solución del problema.

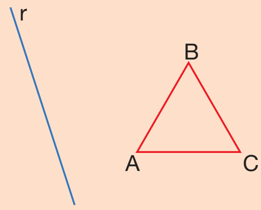


▶ Revisión del resultado y del proceso seguido

Comprobamos que, efectivamente, el triángulo construido cumple las condiciones del enunciado.

B

Dados el triángulo *ABC* y una recta *r,* sitúa el triángulo de modo que el lado *AB* se encuentre sobre la recta *r.*



▶ Comprensión del enunciado

Lee atentamente el enunciado e imagina la posible solución del problema.

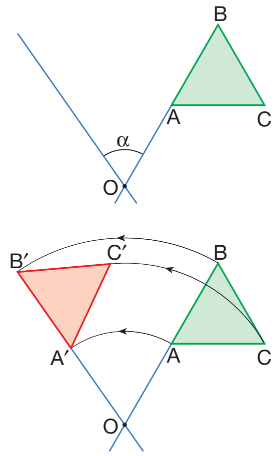
▶ Planificación de la resolución

— Para situar el triángulo *ABC* sobre la recta *r* utilizaremos un giro.

— Para realizar el giro será necesario determinar el centro de giro *O* y el ángulo de giro α. Para ello, prolongaremos el lado *AB* hasta que se corte con la recta *r*. El punto de corte *O* será el centro de giro y el ángulo que forma la recta *r* con el lado prolongado es el ángulo de giro α.

▶ Ejecución del plan de resolución

Procedemos tal y como lo hemos planificado. Así pues, prolongamos el lado *AB* hasta que se corte con la recta *r,* medimos el ángulo α que forma y realizamos finalmente el giro del triángulo *ABC*. Obtenemos el triángulo *A′B′C′* que es la solución del problema.

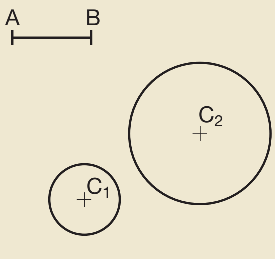


Revisión del resultado y del proceso seguido

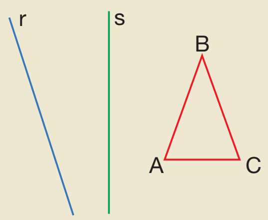
Comprobamos que, efectivamente, el triángulo cumple las condiciones del enunciado.

Actividades

17 Dados las dos circunferencias C_1 y C_2 y el segmento *AB*, sitúa un segmento igual al dado con sus extremos sobre cada una de las circunferencias.



18 Dados el triángulo *ABC* y dos rectas secantes, *r* y *s,* sitúa el triángulo de modo que el lado *AB* se encuentre sobre la recta *r* y el vértice *C* sobre la recta *s*.



En resumen

Una **transformación en el plano** es la relación que se establece entre los puntos de dos figuras de modo que a cada punto de la figura original le corresponde un único punto de la figura final.

Una **transformación isométrica** o **movimiento** es aquélla en que la figura transformada conserva las distancias de la figura original.

Los *movimientos en el plano* son:

- Una **traslación** de vector $\vec{v}$ es un movimiento en el plano que transforma un punto A en otro A', de modo que el vector $\overrightarrow{AA'}$ tiene la misma longitud, dirección y sentido que el vector $\vec{v}$.
- Una **simetría central** de centro O es un movimiento en el plano que transforma un punto A en otro A' alineado con O y A, de modo que $OA = OA'$.
- Una **simetría axial** de eje e es un movimiento en el plano que transforma un punto A en otro A' situado a la misma distancia del eje y de modo que la recta que pasa por A y A' es perpendicular al eje.

El **área** de un cuerpo geométrico es la medida de la superficie que lo delimita.

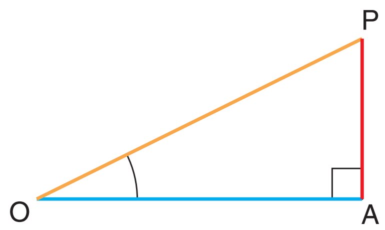
Si recortamos un cuerpo geométrico por las aristas adecuadas y lo desplegamos, obtenemos su **desarrollo plano.** El área del desarrollo plano coincide con el área del cuerpo geométrico.

Áreas	
Prisma	Cilindro
$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2\,A_{\text{base}}$	$A_{\text{lateral}} = 2\,\pi\,r \cdot g$
	$A_{\text{total}} = 2\,\pi\,r \cdot (g + r)$

La unidad de medida que utilizamos habitualmente para medir ángulos es el **grado sexagesimal** (°). Se define como el ángulo obtenido al dividir el ángulo recto en 90 partes iguales.

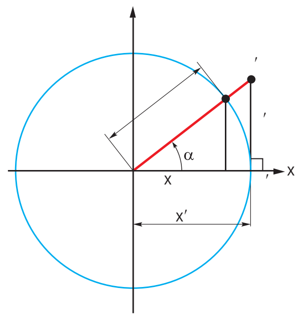
La **trigonometría** nos permite relacionar las longitudes de los lados y las amplitudes de los ángulos de un triángulo.

Consideramos las siguientes **razones trigonométricas** de un ángulo agudo:



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{AP}{OP} \qquad \cos\alpha = \frac{OA}{OP} \qquad \tan\alpha = \frac{AP}{OA}$$

La circunferencia de radio 1 y centrada en el origen de coordenadas, que nos permite representar gráficamente el valor de las razones trigonométricas de cualquier ángulo, recibe el nombre de **circunferencia goniométrica**.



La circunferencia goniométrica nos permite obtener gráficamente las razones trigonométricas de cualquier ángulo.

$$\text{sen}\,\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \tan\alpha = y'$$

Polígonos iguales (triángulos, cuadriláteros...) → las operaciones del plano que permiten comparar figuras planas son las → Transformaciones en el plano

Transformaciones en el plano → si conservan las propiedades métricas, es decir, la forma y el tamaño → **Movimientos en el plano** → denominados también *transformaciones isométricas*, distinguimos →

- Traslación
- Simetría central
- Simetría axial

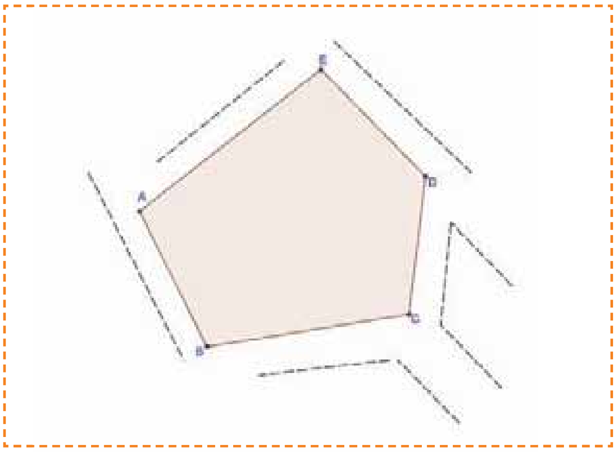
Cuadratura de un polígono

Vamos a llamar cuadratura al proceso de encontrar un cuadrado de igual área a la del polígono dado.

El área que está destinada a ser un parque, tiene la forma de un pentágono irregular, como muestra la figura.

Traza en tu cuaderno un pentágono irregular (no importan las medidas, procura que no sean muy grandes para que los trazos no sobrepasen el papel)

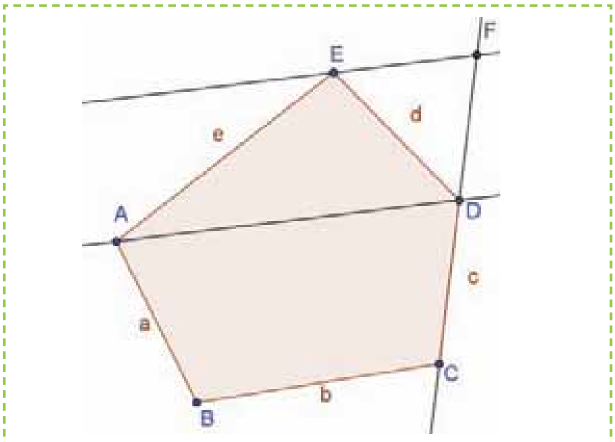
Escala 1 : 1 000



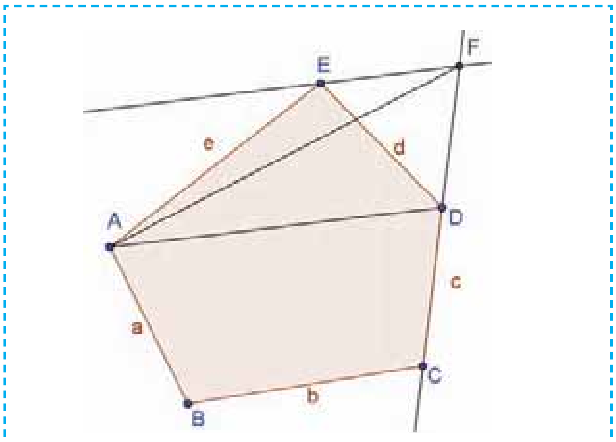
Queremos determinar una aproximación al área del mismo, realizando el menor número de operaciones aritméticas que sea posible.

Vamos a ir transformando al pentágono poco a poco en un cuadrado.

Fíjate en los trazos que se hacen sobre el plano del terreno.



Trazamos la diagonal AD, y por el punto E una recta paralela a la diagonal. Prolongamos el lado CD y encontramos el punto de intersección F. A continuación trazamos el segmento AF y formamos el triángulo ADF el mismo que tiene igual área que el triángulo ADE. ¿Por qué tienen igual área?

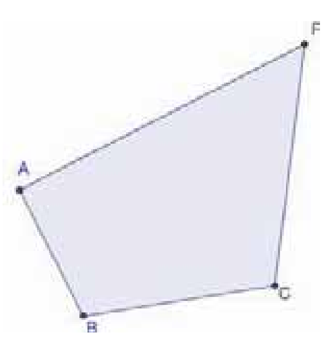


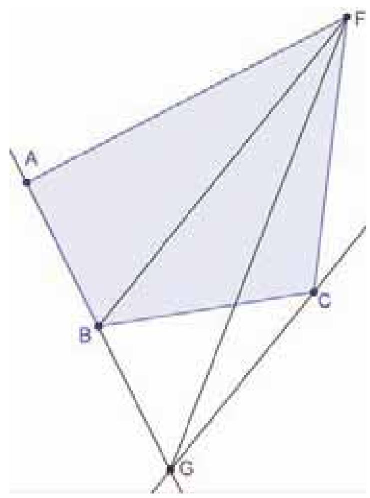
Dos triángulos tienen igual área si tienen la misma base y altura.

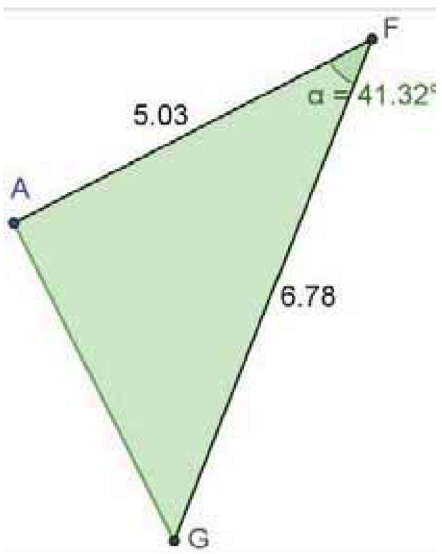
Ahora tienes el cuadrilátero ABCF, que tiene igual valor de área que el pentágono inicial.

Vamos a eliminar otro lado usando el mismo proceso.

Trazamos la diagonal BF y la paralela correspondiente por el punto C, luego el segmento FG.







En este momento tenemos un triángulo de igual área que el pentágono inicial.

Por la escala del plano se sabe que los lados de los cuales se conocen las medidas, representarían 503 y 678 metros y el ángulo comprendido 41,32°.

En este momento, si conoces la medida de dos lados del triángulo y el ángulo comprendido entre ellos, ¿puedes calcular el área del mismo?

Con las fórmulas que hasta ahora conoces para el cálculo del área de un triángulo no lo puedes hacer. Pero existe una fórmula que con los datos proporcionados te ayuda a realizar ese cálculo.

$A = \frac{1}{2} ab \cdot sen\, F$, donde a y b son los lados adyacentes al ángulo F.

Realiza este cálculo y coméntalo con tus compañeros/as.

Continuamos con la cuadratura del pentágono, el triángulo AFG es rectángulo, ¿cómo obtener a partir de este triángulo, gráficamente un cuadrado de igual área para llegar al terreno de forma pentagonal del inicio del problema?

Continúa con el proceso con la ayuda de tu profesor/a.

Practica

Traza en tu cuaderno un hexágono irregular y realiza su cuadratura.

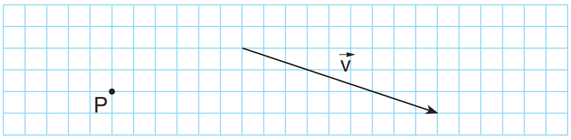
Ejercicios y problemas

Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

Transformaciones isométricas

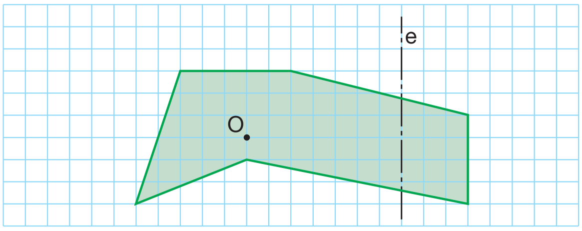
19 Cita qué elementos son invariantes en las siguientes transformaciones geométricas: traslación, simetría central y simetría axial.

20 Traza un vector que tenga como origen el punto *P* y que tenga la misma dirección, la misma longitud y diferente sentido que el vector $\vec{v}$.

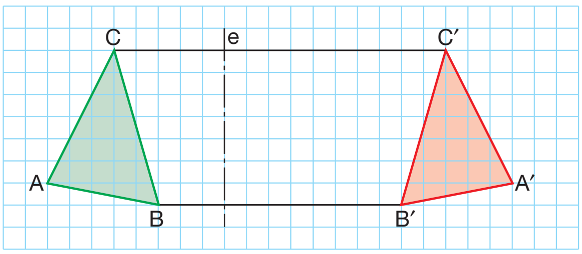


21 Construye un cuadrilátero *ABCD* y aplícale una traslación de vector $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

22 Construye la figura simétrica del hexágono respecto al centro *O* y respecto al eje *e*.

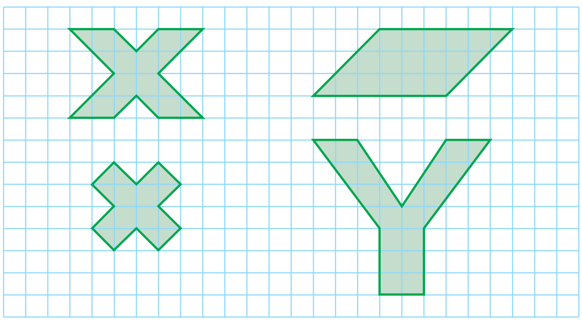


23 Razona por qué los triángulos *ABC* y *A′B′C′* de la figura siguiente no son simétricos respecto al eje *e*.



— ¿Dónde debería situarse el eje de simetría para que fueran simétricos?

24 Indica, si existen, el centro y los ejes de simetría de cada una de estas figuras.

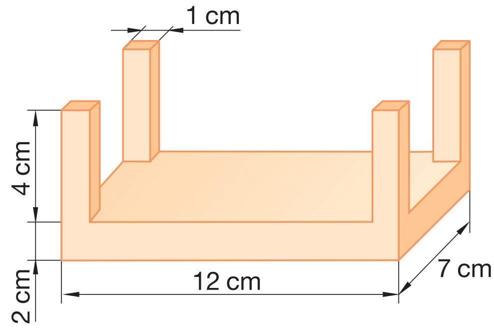


Áreas

25 ¿Cómo podemos calcular el área de un cubo si conocemos la arista?

26 ¿Qué relación satisfacen el área de una esfera y la de un círculo máximo?

27 Obtén el área del cuerpo geométrico representado en la figura.



28 Calcula las áreas de estos poliedros regulares:

a) Tetraedro de 4 cm de arista.

b) Octaedro de 5 cm de arista.

c) Icosaedro de 6 cm de arista.

d) Cubo de 7 cm de arista.

e) Dodecaedro de 1,8 cm de arista y 1,24 cm de apotema.

29 Calcula el área de un cubo de 10 cm de diagonal.

30 ¿Cuánto miden las aristas de un tetraedro y las de un octaedro si el área de cada uno de ellos es de 240 cm^2?

31 La base de un prisma recto es un trapecio isósceles de 20 cm de altura cuyas bases miden 10 cm y 15 cm. Calcula el área lateral y el área total del prisma si su altura es de 30 cm.

32 La base de una pirámide recta es un cuadrado cuya diagonal mide 15 cm. Calcula el área lateral y el área total de la pirámide si su altura es de 17 cm.

33 Calcula el área lateral y el área total de un cilindro generado por un cuadrado de 6 cm de lado al girar 360° sobre uno de sus lados.

34 Calcula las áreas de estos cuerpos de revolución:

a) Cilindro de 2 cm de radio y 7 cm de generatriz.

b) Cono de 3 cm de radio y 4 cm de altura.

c) Tronco de cono que resulta al cortar el cono anterior con un plano que dista 2 cm de su base.

Medida de ángulos

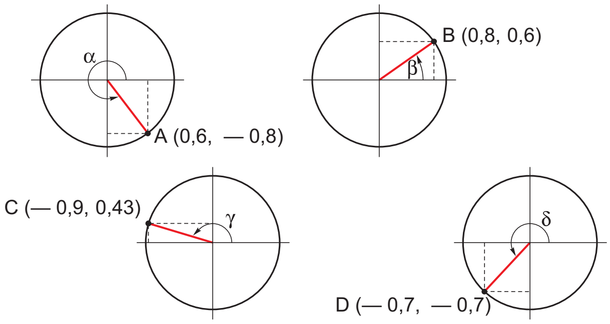
35 ¿Qué significado tiene el signo de un ángulo?

— Representa gráficamente los siguientes ángulos.

a) –15° b) –60° c) 30° d) –90° e) 150°

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

36 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos representados a continuación.



37 Halla las razones trigonométricas de los ángulos siguientes, utilizando para ello, un compás, una regla graduada y un graduador.

a) 62° b) 168° c) 257° d) 355°

— Comprueba los resultados que has obtenido con los de tu calculadora.

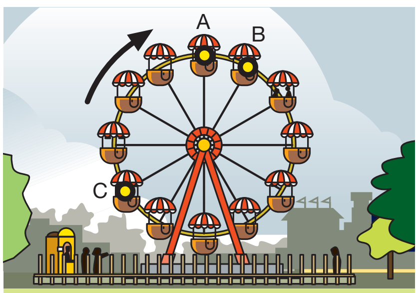
38 Relaciona las razones trigonométricas de los ángulos siguientes con las de un ángulo del primer cuadrante.

a) 126° b) 248° c) 350° d) –110°

Aplicación en la práctica

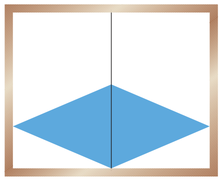
39 En un parque de atracciones hay una rueda moscovita como la de la ilustración.

¿Qué ángulo debe girar la rueda para que la cesta que se encuentra en *A* ocupe el lugar de la que se halla en *B*? ¿Y para que ocupe el lugar de la que se halla en *C*?

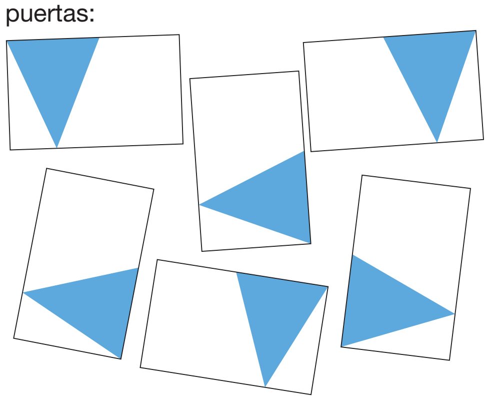


40 Al mirarte en un espejo observas que detrás de ti hay un reloj colgado en una pared. ¿Podrías decir aproximadamente qué hora es?

41 Se han diseñado las puertas de un armario combinando los colores blanco y azul.

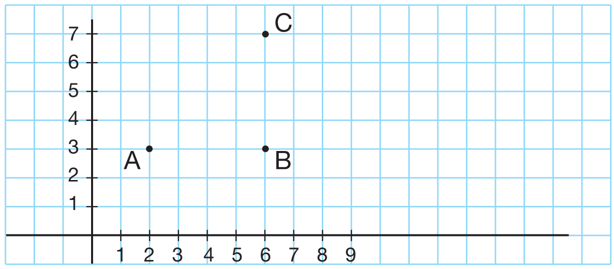


Si en este momento sólo se dispone de las siguientes puertas:



¿A cuántos armarios se les pueden poner puertas?

Más a fondo



42 Las coordenadas de tres de los vértices de un cuadrado son *A*(2,3), *B*(6,3) y *C*(6,7).

Halla las coordenadas del cuarto vértice y las coordenadas de las figuras transformadas del cuadrado por los siguientes movimientos:

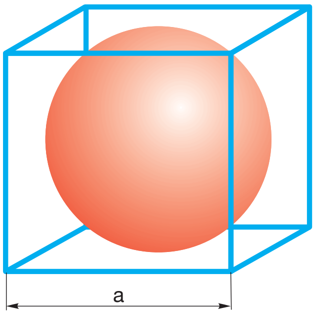
a) Una traslación en la que el homólogo del vértice *A*(2,3) es el vértice *C*(6,7).

b) Una simetría considerando el origen de coordenadas *O*(0, 0) como centro de simetría.

c) Una simetría considerando el eje de ordenadas como eje de simetría.

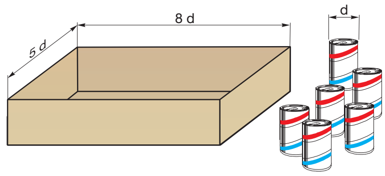
La esfera en el cubo

Se tiene una esfera completamente inscrita en el interior de un cubo de arista *a*. ¿Cuál es el máximo valor para la razón entre el volumen de la esfera y el del cubo?



Las latas de refrescos

Para promocionar un nuevo refresco, se reparten cajas de cartón de altura *h,* longitud igual a 8*d* y anchura igual a 5*d* en las que deben ponerse las latas de refresco. Cada lata tiene forma de un cilindro de altura *h* y diámetro *d*. A todos los que coloquen el máximo número de latas en una caja sin rebasar la altura de ésta se les regala la caja con las latas contenidas. Varios chicos consiguen el premio al colocar 41 latas en la caja. ¿Cómo lo han logrado?



Construyendo un cilindro

Dispones de una hoja de papel de longitud *b* y anchura *a*. Quieres construir un cilindro (sin sus bases) doblando el papel y uniendo dos de sus lados entre sí. Para conseguir el cilindro de volumen máximo, ¿debes juntar los dos lados cortos o los dos lados largos?

¡A pintar!

Quieres pintar el techo y tres de las paredes de tu habitación con unos botes de pintura plástica de 5 kilogramos que te han regalado. Tu habitación tiene la forma de un cubo de 3 metros de arista. Si sabes que para cubrir una superficie de 8 metros cuadrados necesitas aproximadamente un kilogramo de pintura plástica, ¿cuántos botes gastarás?

Buen Vivir

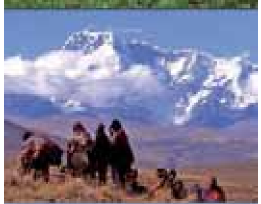
Conservación del patrimonio natural

Se denomina patrimonio natural a las formaciones físicas, biológicas o geológicas con valor universal desde el punto de vista estético o científico. En nuestro país, el patrimonio natural es la diversidad de plantas que constituyen la décima parte de las especies de todo el planeta, las variedades de pájaros que representan la quinta parte del mundo, las decenas de ecosistemas a lo largo y ancho del territorio nacional, la confluencia de corrientes marinas que convierten al Ecuador en una región prodigiosa donde conviven tortugas gigantes, lobos marinos, piqueros de patas azules, iguanas volcánicas y otros, por lo que, buena parte del territorio cuenta con zonas y áreas protegidas por ser patrimonio natural.

Pero el ser humano, en su desenfrenada búsqueda del desarrollo, es el responsable de la sobreexplotación de los recursos naturales cada vez que tala un bosque, cuando desaparece un manglar, el momento que una especie se extingue al despojarle de su hábitat, cuando el petróleo se derrama y se contaminan los ríos. Solo entonces, las personas nos damos cuenta de nuestro deber de conservar el patrimonio natural como única forma de garantizar nuestra propia existencia.

Actividades

1. Visiten un parque botánico, área protegida o algún lugar donde haya árboles originarios (endémicos) de su zona.
2. Reflexionen acerca de la relación de los árboles con otras especies vivas de la zona. También sobre la relación con los elementos abióticos.
3. Organicen una mesa redonda en clase para analizar por qué somos un país que puede considerarse patrimonio natural de la humanidad. Planteen alternativas viables para el cuidado de la naturaleza y practíquenlas.



Autoevaluación Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no se cumple en una traslación?

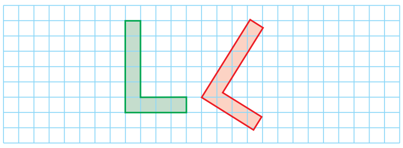
a) La dirección de la recta determinada por dos puntos homólogos es la misma que la del vector que define la traslación.

b) La distancia entre dos puntos homólogos coincide con la longitud del vector de traslación.

c) Las rectas que contienen segmentos homólogos son paralelas.

d) El sentido de las figuras no se conserva, luego decimos que la traslación es un movimiento inverso del plano.

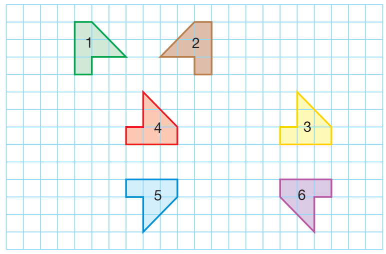
2. Indica qué transformación geométrica se ha aplicado a la letra L.



a) un giro b) una simetría c) una traslación

3. Reduce estos ángulos al primer giro.
a) 414° b) 1 095° c) 905° d) –402°

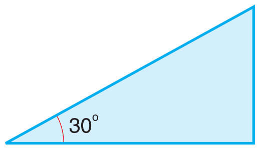
1. Indica qué transformación geométrica permite obtener cada una de las figuras a partir de la anterior.

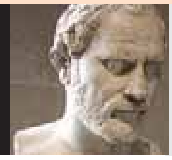


2. ¿Son las diagonales de un rectángulo y de un rombo ejes de simetría de éstos? Trata de explicar por qué.

3. Dos cilindros tienen la misma área lateral y sus radios miden 3 cm y 5 cm. La generatriz del primero es 12 cm. ¿Cuánto mide la generatriz del segundo?

4. Averigua, con los datos de la figura, cuál es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo.

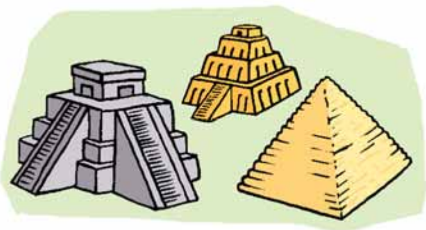




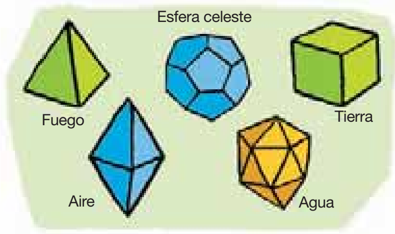
Historia

Sección de historia

Desde la Antigüedad, el ser humano se ha interesado por los cuerpos geométricos con caras planas, sobre todo para la construcción de edificios.



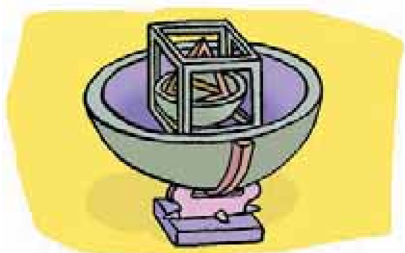
Los griegos pitagóricos se dieron cuenta de que sólo existen cinco poliedros regulares y los identificaron con los constituyentes de la naturaleza.



Los discípulos de Platón intentaron conocer los cuerpos celestes mediante el estudio de los cuerpos sólidos.

Euclides sistematizó y amplió los conocimientos de su época sobre sólidos en los libros XI, XII y XIII de los *Elementos.*

En el Renacimiento, J. Kepler describió las órbitas de los cuerpos celestes a partir de esferas inscritas o circunscritas en los poliedros regulares.



Actualmente, los cuerpos geométricos son formas habituales en nuestro entorno.

Crónica matemática

http://lh3.ggpht.com

MAURITS CORNELIS ESCHER (1898-1972)

«Con frecuencia me siento más próximo a los matemáticos que a mis colegas los artistas.»

Escher nació el 17 de junio de 1898 en Leeuwarden (Holanda). Se especializó en técnicas gráficas en la Escuela de Arquitectura y Diseño Ornamental de Haarlem.

Encontró una de sus fuentes de inspiración de su obra cuando visitó la Alhambra de Granada y la mezquita de Córdoba; ya que en ese momento el rumbo de su obra cambió, pasando de pintar representaciones de paisajes a pintar los dibujos matemáticos que tan famoso lo han hecho.

Gracias a su gran visión abstracta, realizó una gran obra en la que mezcla el arte y la matemática de una manera espléndida y asombrosa.

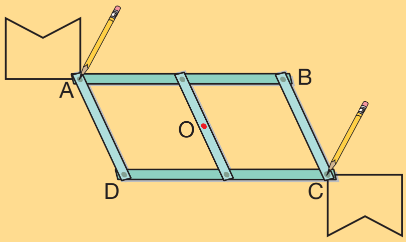
Escher murió el 27 de marzo de 1972 en Baarn (Holanda).

http://aixa.ugr.es

Mosaico de Escher

http://www.icarodigital.com.ar

Observa en la figura de la derecha un mecanismo que se utiliza para realizar simetrías centrales. Este mecanismo está constituido por cinco barras, no importa la longitud de cada una de ellas siempre que tres tengan la misma longitud y las otras dos también sean iguales pero un poco más largas que las otras tres. Las barras exteriores se unen formando un paralelogramo *ABCD* y la del centro se sitúa uniendo los puntos medios de las dos barras más largas.



El punto *O* queda fijo en el papel, el extremo libre *A* lleva una punta con la que recorreremos la figura original que queremos reproducir, y en el vértice *C* se coloca un lápiz. Al recorrer la figura original con la punta del extremo *A,* el lápiz dibuja la figura simétrica respecto del punto *O*.

Construye este mecanismo y comprueba que la figura que traza el lápiz al repasar una dada es simétrica respecto del punto *O*.

@ Conéctate a la siguiente página de Internet y amplía tus conocimientos de los frisos y los mosaicos. http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/geometria/movimientos/movimientos.html

Módulo 1 Números racionales Medidas de tendencia central

Ejercicios y problemas

61. Positivas : $\frac{3}{8}, \frac{-2}{-3}, \frac{3}{11}$ Negativas : $\frac{-3}{5}, \frac{4}{-7}, -\frac{5}{9}$

$\frac{4}{-7} = \frac{-4}{7}, \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

63. $-\frac{11}{20}; \frac{6}{11}; -\frac{41}{120}; \frac{7}{19}$

65. Respuesta abierta.

67. $A = \frac{2}{5}; B = \frac{-3}{5}; C = \frac{-6}{5}; D = \frac{7}{5}$

69. a) $\frac{-23}{28}$; b) $\frac{-16}{60} = \frac{-4}{15}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{41}{15}$

71. a) $\frac{-29}{12}$

b) $-\frac{171}{40}$

73.

$\left(\frac{2}{3}\right)^6$	$\left(\frac{2}{3}\right)^7$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$
$\left(\frac{2}{3}\right)^1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$	$\left(\frac{2}{3}\right)^9$
$\left(\frac{2}{3}\right)^8$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$

75. Limitados: 2,34; 5,4123 Ilimitados: 1,23232323...; $-0,0\widehat{3}$; $2,1\widehat{3}$; 0,034034034...

77.

Fracción irreducible	Expresión decimal	Clasificación del número decimal
$\frac{1}{3}$	$0,\widehat{3}$	Decimal ilimitado periódico puro
$\frac{17}{6}$	$2,8\widehat{3}$	Decimal ilimitado periódico mixto
$\frac{22}{5}$	4,4	Decimal limitado
$\frac{38}{15}$	$2,5\widehat{3}$	Decimal ilimitado periódico mixto

79. a) 0,7631; b) 1,352; c) 30,9225; d) 2,1714285

81. $-1,\widehat{3} = \frac{-12}{9} = \frac{-4}{3}$; $8,\widehat{34} = \frac{826}{99}$;

$2,1\widehat{16} = \frac{2095}{990} = \frac{419}{198}$; $0,\widehat{007} = \frac{7}{999}$;

$12,3\widehat{45} = \frac{1222}{990} = \frac{679}{55}$

83. El resultado de las operaciones es el siguiente:
a) 23,5178 b) 157,1928 c) 9,3361
El error dependerá de la estimación realizada.

85. a) La población son los alumnos de Bachillerato. Puesto que la población es pequeña no es necesario seleccionar una muestra.
b) La población son los estudiantes de EGB de la provincia. En este caso es necesario seleccionar una muestra.
c) La población son los ecuatorianos/as. En este caso, se debe elegir una muestra.
d) La población son los jugadores del equipo de fútbol. Puesto que la población es pequeña no es necesario seleccionar una muestra.

87. Aparecen cuatro variables estadísticas: temperatura máxima en A, en B, en C y en D.

89. a) Treinta alumnos.
b) Cinco. Lo han obtenido el 23,3 % de la clase.
c) $\frac{11}{30}100 = 36,67$ %

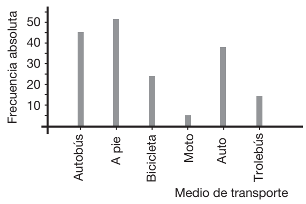
91. Población: Ecuador; Variable estadística: número de ventas de los distintos medicamentos que se comercializan en Ecuador.
Verdadero; verdadero, ya que es el que alcanza un mayor número de ventas (24,6 millones de unidades); falso, ya que el más utilizado es el ácido acetilsalicílico, y además, la amoxicilina es un antibiótico, no calmante.

95. Calculamos la media aritmética:

$$\bar{x} = 22 \cdot \frac{2}{5} + 21 \cdot \frac{3}{5} = 21,4 \text{ años}$$

La media aritmética de la edad de los concursantes es 21,4 años.

97. **Diagrama de barras**



Polígono de frecuencias

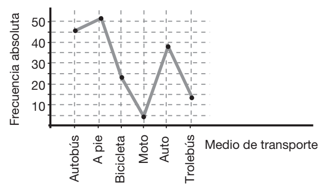
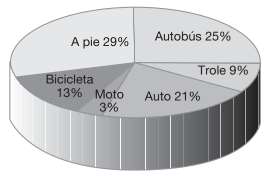
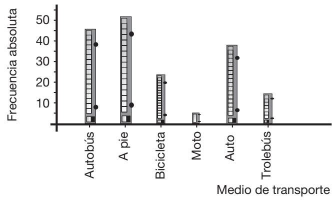


Diagrama de sectores



Pictograma



99.

	Espectadores	Frecuencia absoluta acumulada
Primer día	92 341	92 341
Segundo día	81 429	173 770
Tercer día	85 031	258 801
Cuarto día	83 927	342 728

342 728 : 4 = 85 682 espectadores diarios de media.

101. a) $\frac{1}{6}$ de 48,12 = 8,02
48,12 − 8,02 = 40,10
Pagaremos por los pantalones $ 40,10.

b) $\frac{5}{6}$ de .... = 30,20 $\rightarrow \begin{cases} 30,20 \div 5 = 6,04 \\ 6,04 \cdot 6 = 36,24 \end{cases}$
El precio de la camisa era $ 36,24.

103. Al alinear las dos varillas la longitud total es 10,92 m. Si dividimos esta longitud en 7 partes iguales, 3 de estas partes corresponden a una varilla y las cuatro restantes a la otra. Por lo tanto, tenemos: 10,92 : 7 = 1,56; 1,56 · 3 = 4,68; 1,56 · 4 = 6,24. La longitud de las varillas es 4,68 cm y 6,24 cm.

105. En la primera reparación ha utilizado 36 m de cinta, en la segunda 12 m y en la tercera 8 m.

107. Los redondeos son: $ 6, $ 16 y $ 7. La suma es 29; por lo tanto, tendrán suficiente.

109. a) $\frac{-23}{28}$; b) $\frac{-16}{60} = \frac{-4}{15}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{41}{15}$

111. A partir de los datos obtenidos, cada alumno/a construiría una tabla de distribución de frecuencias y un diagrama de barras, de manera similar a como resolvieron la actividad 48.

— No sería adecuado un cartograma puesto que no hay referencias geográficas ni de posición espacial.

113. Llamamos $\bar{x}$ a la media aritmética de los últimos cinco corredores.

$$\frac{20 \cdot 1{,}25 + 5 \cdot \bar{x}}{20 + 5} = 1{,}3$$

$$25 + 5 \cdot \bar{x} = 25 \cdot 1{,}3$$

$$\bar{x} = 1{,}5$$

115. Calculamos la fracción que representa la cantidad de refresco con la que llenamos la jarra.

$0{,}5 \div 3 = 0{,}1\widehat{6}$

$0{,}1\widehat{6} = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

$2{,}5 \div 6 = 0{,}41\widehat{6}$

$0{,}41\widehat{6} = \frac{416-41}{900} = \frac{375}{900} = \frac{5}{12}$

$\frac{1}{6} + \frac{5}{12} = \frac{2}{12} + \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

Calculamos la capacidad de la jarra: $\frac{7}{12} \cdot 6 = \frac{42}{12} = 3{,}5$

La capacidad de la jarra es 3,5 l.

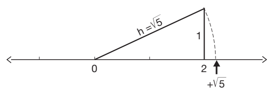
Módulo 2 Números fraccionarios

Ejercicios y problemas

39. Porque el resultado de sumar y dividir racionales es siempre un número racional.

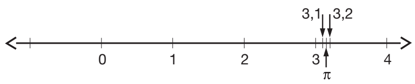
43. a) racional; b) racional; c) racional;
d) irracional; e) racional; f) irracional.

45. a)

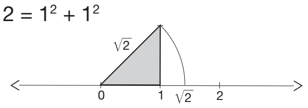


b) $+\sqrt{4} = 2$

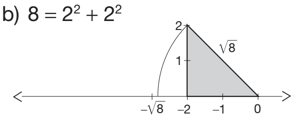
c) Sólo puede representarse de forma aproximada, marcando intervalos cada vez más pequeños que lo contengan.



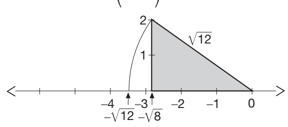
47.a) $2 = 1^2 + 1^2$



b) $8 = 2^2 + 2^2$



c) $12 = 2^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2$



49. Respuesta abierta.

51. a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{\frac{2}{7}}$; c) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$

53. a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\frac{8}{\sqrt{2}}$; d) $\sqrt{2}$

55. $\frac{\sqrt{3}}{5} + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{5} - 2x\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$

59. $A = 0{,}0105\ m^2$.

61. a) $2{,}6\ dam = 26\ m$; $A = \frac{26 \cdot 8}{2} = 104\ m^2$

b) $80\ cm = 0{,}8\ m$ $\quad 23\ dm = 2{,}3\ m$

$A = \frac{0{,}8 \cdot 2{,}3}{2} = 0{,}92\ m^2$

63. a) $A = \frac{9 \cdot 6{,}5}{2} = 29{,}25\ cm^2$

b) $A = \frac{10{,}5 \cdot 4}{2} = 21\ cm^2$

c) $\sqrt{6^2 - 5{,}2^2} = 2{,}99 \Rightarrow b = 5{,}98\ cm$

$A = \frac{5{,}98 \cdot 5{,}2}{2} = 15{,}5\ cm^2$

d) $h = \sqrt{31{,}7^2 - 7{,}5^2} = 30{,}8\ cm$

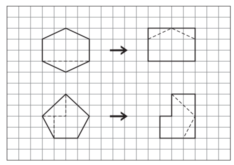
$A = \frac{15 \cdot 30{,}8}{2} = 231\ cm^2$

65. Se trata de un hexágono y de un pentágono. No son polígonos regulares, puesto que no tienen iguales ni los lados ni los ángulos.

$P_{hexágono} = 12{,}94\ km$

$P_{pentágono} = 12{,}13\ km$

Para calcular el área descomponemos las figuras y las reagrupamos de la siguiente manera:



$A_{hexágono} = 3 \cdot 4 = 12\ km^2$

$P_{pentágono} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 10\ km^2$

67. $P = 20{,}8\ m$

$A = A_{rectángulo} - A_{triángulo\ rectángulo} = 14{,}2\ m^2$

69. Jorge espera recorrer 17 km.

73. a) El perímetro disminuye y el área aumenta.
b) El perímetro aumenta y el área diminuye.
c) El perímetro y el área aumentan.
d) El perímetro y el área disminuyen.

75. 130 cm

77. $\sqrt{0{,}6} = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}774...\ m$

Obtenemos un número irracional.

79. Diagonal del circuito: $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Desde un vértice al otro vértice de los que son los extremos de la diagonal, el primer corredor recorre 2 hm y el segundo, $\sqrt{2}$ hm.

Puesto que $\frac{2}{\sqrt{2}}$ es un número irracional, teóricamente los dos co rredores no se encontrarán.

81. No, la primera tiene una superficie de 500 dm^2 y la segunda de 625 dm^2; 625 baldosas.

83. 6,2625 ha

85. — $P_{real} = 25 \cdot P = 25 \cdot 60 = 1\,500\ cm = 1\,5\ m$
$A_{real} = 25^2 \cdot A = 25^2 \cdot 150 = 93\,750\ cm^2 = 9{,}375\ m^2$

87. El perímetro de una cadena de *n* pentágonos será $20\,n + 5$, por lo tanto: 20 ·;50 + 5 = 1 005 cm.

89. a) Sí; b) Sí c) El cuadrado de un número irracional sí que puede ser un número racional.

91. Las zonas rayadas son triángulos rectángulos de área:

$$A = \frac{1}{2}\frac{3}{4}40^2 = 600\ \text{m}^2$$

Como sabemos que la base del triángulo es 40 m y su área 600 m², podemos obtener su altura:

$$h = \frac{2A}{b} = \frac{1200}{40} = 30\ \text{m}$$

La longitud de la calle es la medida de la hipotenusa del triángulo. Para obtenerla aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{30^2 + 40^2} = 50\ \text{m}$$

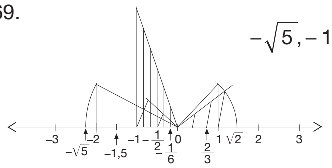
Si consideramos que se empiezan a poner postes de luz en el extremo de la calle, se tiene que en cada acera se colocan: 50 : 6,25 + 1 = 9 postes de luz. Por tanto, en las dos aceras se colocan 18 postes de luz.

Módulo 3 Números reales Polinomios

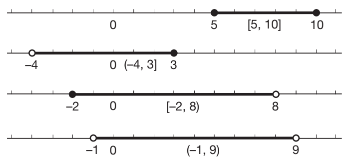
65. Una vez representados los números racionales e irracionales sobre la recta, ésta queda llena por completo, de ahí el nombre de recta real.

67. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

69. $-\sqrt{5}, -1,50, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, 3$



71.



73. [–7, 11]

75. Aproximaciones por defecto: 15,6; 15,69; 15,692; 15,6924; 15,69241

Aproximaciones por exceso: 15,7; 15,70; 15,693; 15,6925; 15,69242

77. a) Décimas de kilogramo; b) kilómetros; c) décimas de milímetro; d) centésimas de segundo.

79. a) 1,10. Cota del error absoluto: 0,003
b) 0,74. Cota del error absoluto: 0,001
c) 3,29. Cota del error absoluto: 0,004
d) 0,03. Cota del error absoluto: 0,003
e) 30,02. Cota del error absoluto: 0,005

81. $3x^2 + 5x$

83.

a	b	$(a+b)^2$	$(a-b)^2$	a^2-b^2
–6	4	4	100	20
$\frac{1}{2}$	–1	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{-3}{4}$
0,2	–2,2	4	5,76	–4,8

85. a) $2x^3y^2$; b) $20a^3b^3$; c) $-14x^2y^2z$; d) $5x^5y^5$

87. $a^2 - b^2$

Las áreas de las dos figuras son iguales.

89. a) 14; b) $(3+5)^2$; c) $(4-8)^2$; d) $(5+7)\cdot(5-7)$

91. Por ejemplo: $9x^4 - 3x + x$

93. La relación que se establece entre las figuras geométricas y las expresiones de sus áreas es la siguiente: Figura A - b; Figura B - a; Figura C - d; Figura D - c.

95. No, el producto de dos polinomios de grado 5 será un polinomio de grado 10.

97. a) $P(x) + Q(x) = -7x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + 2$

b) $-3\,R(x) = -3\,(x^3 + 7x^2 - x + 3) = -3x^3 - 21x^2 + 3x - 9$

$P(x) - 3\,R(x) = x^4 - 3x^3 - 18x^2 + x - 2$

c) $P(x) + Q(x) = -7x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + 2$

$P(x) + Q(x) - R(x) = -7x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 1$

d) $2\,P(x) = 2\,(x^4 + 3x^2 - 2x + 7) = 2x^4 + 6x^2 - 4x + 14$

$2\,P(x) - Q(x) = 10x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 5x + 19$

$2\,P(x) - Q(x) - R(x) = 10x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x + 16$

99. a) $2x + 6$
b) $C = x - 3$; $R = 4x - 8$
c) $x + 5$
d) $C = x$; $R = 7$
— Las divisiones son exactas en los apartados *a)* y *c)*.

101. a) Cociente: $x^2 + x - 6$; Resto; –14

b) Cociente: $x^2 - 12x + 19$; Resto: 5

103. El divisor es $x^2 - 2x + 1$

105. El valor numérico del polinomio para $x = 3$ es 24.

El valor numérico del polinomio para $x = -3$ es 0.

107. El polinomio es divisible por $x - 1$, lo que nos indica que $x = 1$ es una raíz.

El polinomio es divisible por $x - 2$, lo que nos indica que $x = 2$ es una raíz.

Como que el segundo cociente obtenido es $x - 3$, $x = 3$ es una raíz.

109. a) $2x^3 - 6x^2 + 8$ es divisible por $2x - 4$.
b) $x^3 - 2x^2$ es múltiplo de $2x - 4$.
c) $2x^2 + 6x - 4$ no es múltiplo de $2x - 4$.
d) $x^2 + 3x - 2$ no es múltiplo de $2x - 4$.

111. a) M.C.D. $= (x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$
m.c.m. $= x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$
b) M.C.D. $= (x-2)^2(x+1) = x^3 - 3x^2 + 4$
m.c.m. $= 2\,(x-2)^2(x+1) = 2x^3 - 6x^2 + 8$
c) M.C.D. = 1
m.c.m. $= x^6 - 2x^5 - 19x^4 + 28x^3 + 80x^2 - 120x$

113. a) $a\,(12 - a)$; b) $(x + y)(z - 1)$; c) $(x + 1)(2 - a)$; d) $(x + 1)(3y - x)$; e) $b^2(1 + b)(1 - b)$; f) $-x \cdot (x - 5)^2$; g) $(a + 9)^2$; h) $z^2(2z + 3)(2z - 3)$; i) $(z - 1)(3z - 4)$; j) $a\,(a - 2)^2$

115. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

117. a) $xy(y + 1)$; b) $x + y - 3$; c) $3c\,(a + b)(a - b + 3)$; d) $-4\,(a + b)(a - b)$

119. a) $x^2 - 8x + \mathbf{16} = (x - \mathbf{4})^2$; b) $\mathbf{x^2} - 25 = (x - 5)(x + \mathbf{5})$; c) $4x^2 + 4x + + \mathbf{1} = (\mathbf{2x} + 1)^2$

121. a) $K = -1$

123. $K = -9$

125. Por lo tanto, $P(x) = \frac{10}{3}x^2 - \frac{1}{3}$.

127. El polinomio que expresa el área de la figura es

$$A(x) = 9x^2 + \frac{35}{2}x - \frac{3}{2}.$$

129. a) $10x^2 + 27xy + 18y^2$
b) $2x^2 + 27xy + 18y^2$
c) $8x^2$

131. a) $\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 2$

b) $x^3 - \frac{11}{2}x^2 - \frac{8}{3}x + 2$

133. a) $\frac{2x}{3y}$ b) $2m + 1$ c) v d) $p + 2$ e) $\frac{2x^2}{3y}$ f) $\frac{m}{2}$ g) $\frac{1}{v}$ h) $\frac{p+3}{3}$

i) $\frac{x-3}{x+3}$ j) $\frac{m-2}{m+2}$ k) $\frac{u+2}{u+v}$ l) $\frac{p-2}{p+q}$

135. a) $\frac{7x-2}{5x^2}$ b) $\frac{3m+1}{2m^2}$ c) $\frac{4u-2}{2u-1}$ d) $\frac{6p+1}{3p}$

e) $\frac{y-1}{x^2}$ f) $\frac{12m-n}{4n}$ g) $\frac{6-u}{3u}$ h) $\frac{2-y}{y}$

Módulo 4 Números reales
Patrones de crecimiento lineal

17. a) $(+2)^3\,(+2)^{-4}\,(+2)^4 = (+2)^{3-4+4} = (+2)^3$

b) $(+7)^{-2}\,(+7)^9\,(+7)^4 = (+7)^{-2+9+4} = (+7)^{11}$

19. a) $\dfrac{1}{12^5}$ b) $\dfrac{1}{(a-1)^3}$ c) $\left(\dfrac{3}{8x}\right)^2$

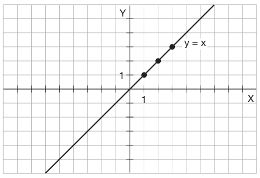
21. a) $\dfrac{-2x}{3}$; b) $3x - y$; c) $-2ab$

23. a) $\dfrac{y}{2} + 1$; b) $\dfrac{3}{x}$; c) $\dfrac{1}{3x} - 2$; d) $2x - 1$

25. Lineal: *d;* Afín no lineal: *a;* constante: *b;* no es función: *c.*

27. a)

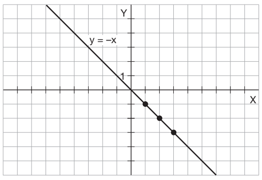
x	1	2	3
y	1	2	3



Pendiente: 1

b)

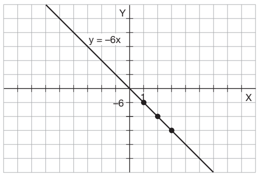
x	1	2	3
y	–1	–2	–3



Pendiente: –1

c)

x	1	2	3
y	–6	–12	–18



Pendiente: –6

29. Sí, puesto que una lista de números es un conjunto ordenado de números que se corresponden con los números naturales.

31. a) $a_n = n^2 + 2$

b) $a_{100} = 100^2 + 2 = 10\,002$

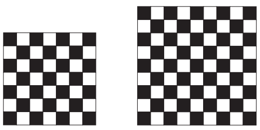
33. La altura del rectángulo es de $\sqrt{13}$ cm y el área, $4\sqrt{91}\,\text{cm}^2$.

35. a) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3 = \dfrac{4}{3}\pi 5^2 = \dfrac{100}{3}\pi\ \text{cm}^3$

b) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow 36\pi = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^3 = \dfrac{3 \cdot 36\pi}{4\pi} = 27 \Rightarrow r = \sqrt[3]{27} = 3$ cm

37. a)



b)

Figura	1	2	3	4	5
Cuadrados blancos	0	4	12	24	40
Cuadrados negros	1	5	13	25	41
Número total de cuadrados	1	9	25	49	81

c) Observamos que el número total de cuadrados es la sucesión de los cuadrados de los números impares. Por tanto, no habrá ninguna figura del tipo de las anteriores que tenga 10^2 cuadrados.

d) $121 = 11^2$. El número de cuadrados blancos será 60 y el de cuadrados negros, 61.

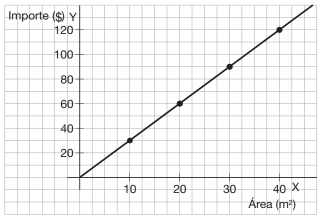
39. $a_1 = 1$; $a_n = 30$

$S = \dfrac{(1+30)\cdot 30}{2} = 465$

La longitud total es de 465 cm.

41. a)

Área pared en m² *(x)*	10	20	30	40
Importe del papel en $ *(y)*	30	60	90	120



b) $40 \cdot 3 = 120$

El papel necesario para empapelar toda la habitación cuesta $ 120.

43. a)

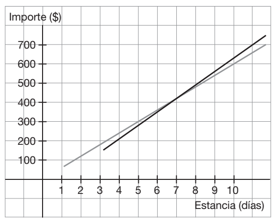
Número de días	Importe Hotel La Laguna ($)	Importe Hotel El Mar ($)
1	(0)	(60)
2	(70)	120
3	(140)	180
4	(210)	240
5	280	300
6	350	360
7	420	420
8	490	480
9	560	540
10	630	600

Los valores entre paréntesis indican la estancia mínima en cada uno de los hoteles.

b) Hotel La Laguna: $y = 70x - 70$.

Hotel El Mar: $y = 60x$.

c)



d) Importe en dólares del Hotel La Laguna al cabo de 5 días: 280 dólarres

Importe en dólares del Hotel El Mar al cabo de 5 días: 300 dólares

e) El Hotel El Mar resulta más económico al cabo de los 8 días de estancia.

f) Ha estado en el Hotel El Mar 8 días.

45. a) $2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$; b) $2^2 + 3^2 = 13$; $2^3 + 3^3 = 35 \rightarrow x = 3$;

c) $4 \cdot 3^x + 3^x = 405$; $5 \cdot 3^x = 405$; $3^x = 81 = 3^4 \rightarrow x = 4$.

47. $a_1 = 2 \quad r = \dfrac{1}{2}$

La suma de los términos de esta progresión geométrica decreciente o suma ilimitada es:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

Por tanto, no logrará recorrer los 5 m.

Módulo 5 Ecuaciones e inecuaciones de primer grado Diagramas de tallo y hojas

Ejercicios y problemas

63.

Ecuación	Incógnita	1.er miembro	2.º miembro	Solución
$7a - 15 = 2a$	a	$7a - 15$	$2a$	3
$8 = 2b + 3$	b	8	$2b + 3$	$\frac{5}{2}$
$2x - 3 = 5x + 2$	x	$2x - 3$	$5x + 2$	$\frac{-5}{3}$
$8y + 4 = 2(3y + 2)$	y	$8y + 4$	$2(3y + 2)$	0

65. El valor de x es 1 kg y el valor de y es 2 kg.

67. El número buscado es $x = 27$.

71. a) $x = -2$; b) $x = -2$; c) $x = 2$; d) $x = 2$;
e) $x = -1$; f) $x = -4$; g) $x = -3$; h) $x = 5$

73. a) 9; b) 8; c) 12; d) 13.

75. a) $x = 3$. Sí; b) $x = 10$. Sí.

77. -3

79. a) $x = 1$; b) $x = 3$; c) $x = -44$; d) $x = -19$;
e) $x = \dfrac{-42}{11}$; f) $x = -2$; g) $x = \dfrac{141}{19}$; h) $x = \dfrac{182}{253}$

81. $-\dfrac{5}{2} < -\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{3} < \dfrac{3}{7} < \dfrac{7}{6}$

83. a) Cierta. b) Cierta. c) Falsa. d) Falsa. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

85. a) Es solución; b) Es solución; c) No es solución; d) No es solución; e) No es solución; f) Es solución.

87. a) $x < \dfrac{9}{3} = 3 \Rightarrow \mathbf{S} = (-\infty, 3)$
b) $x < \dfrac{14}{-2} = -7 \Rightarrow \mathbf{S} = (-\infty, -7)$
c) $x \geq -9 \Rightarrow \mathbf{S} = [-9, +\infty)$
d) $x \leq \dfrac{6}{-2} = -3 \Rightarrow \mathbf{S} = (-\infty, -3]$

89. a) $\mathbf{S} = \mathbb{R}$; b) $\mathbf{S} = \varnothing$; c) $\mathbf{S} = \varnothing$;
d) $x \geq \dfrac{0}{3} = 0 \Rightarrow \mathbf{S} = [0, +\infty)$.

91. a) No,
b) La solución del sistema de inecuaciones es:
$\mathbf{S} = (-2, +\infty)$

97. Respuesta sugerida:
a) $\left.\begin{array}{l} x > -4 \\ 2x \leq 20 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x + 3 > 8 - 12 \\ -2x \leq 14 \end{array}\right\}$

99. a) Primera inecuación:
$x < -3 \Rightarrow \mathbf{S_1} = (-\infty, -3)$
Segunda inecuación:
$x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 5 \Rightarrow \mathbf{S_2} = (-\infty, 5]$
b) Primera inecuación:
$3x > 6 \Leftrightarrow x > \dfrac{6}{3} = 2$
$\mathbf{S_1} = (2, +\infty)$
Segunda inecuación:
$5(x - 1) < 2x + 7 \Leftrightarrow x < \dfrac{12}{3} = 4$
$\mathbf{S_2} = (-\infty, 4)$
c) Primera inecuación:
$x + 3 > -2 \Leftrightarrow x > -5$
$\mathbf{S_1} = (-5, +\infty)$
Segunda inecuación:
$5x - 3 \leq 7x + 9 \Leftrightarrow x \geq -6$
$\mathbf{S_2} = [-6, +\infty)$
d) $5 < 3x - 1 \leq 8 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 5 < 3x - 1 \\ 3x - 1 \leq 8 \end{array}\right\}$
Primera inecuación:
$5 < 3x - 1 \Leftrightarrow x > \dfrac{-6}{-3} = 2$
$\mathbf{S_1} = (2, +\infty)$
Segunda inecuación:
$3x - 1 \leq 8 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{9}{3} = 3$
$\mathbf{S_2} = (-\infty, 3]$

101. a) La expresión algebraica del consumo es $0{,}076x$.
b) Al recorrer 150 km consume aproximadamente 11,4 l y al recorrer 180 km 13,68 l.

103. Alumnos: 400 Libros: 1 350 Hay 1 350 libros.

105. Restaurar, insertar. En el diccionario: *arte de restituir a su lugar los huesos dislocados.*

107. Los tres números consecutivos son 3, 4 y 5.

109. a) El precio de un esferográfico es \$ 10.
b) Hemos gastado \$ 120.

111. Ha dedicado 12 horas a salir con sus amigos.
Ana ha dedicado 2 horas a la lectura, 4 horas a la natación y 12 horas a salir con sus amigos.

113. $x = 2$.

115. $2x + 7 > 3x - 5$
$x < 12$

Los números menores de 12 cumplen la condición del enunciado.

117. La edad del padre será menor o igual al triple de la edad de su hijo a partir del momento en que el hijo cumpla 12 años.

119. El vendedor debe vender como mínimo 8 computadoras.

121. La solución del sistema de inecuaciones es: $S = (24, 30]$. Es decir, el precio de una camisa es mayor que \$ 24 y menor o igual que \$ 30.

123. Solución del sistema de inecuaciones: $S = (10, 12)$. Es decir, el otro cateto puede medir más de 10 cm y menos de 12 cm.

125. Es preferible contratar al primer transportista si la distancia a recorrer es mayor de 65 km.

$$2x + 2 \cdot 2 > 2\pi \cdot x \Rightarrow 2x(\pi - 1) < 2 \cdot 2 \Rightarrow x < \frac{2}{\pi - 1}$$

127.

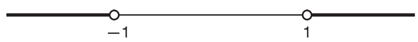
Hojas Ibarra	Tallo
6; 5; 5; 3	0,
9; 9; 9; 9; 9; 9; 9; 8; 8; 8; 8; 7; 7; 7; 7; 7; 7; 7;7	0,
2; 1;1; 1; 1; 0; 0;	1,
	1,

129. Todas las soluciones son:
a) $x = 0$; b) $x = 1$, $x = -1$; c) $x = \dfrac{1}{3}$;
d) $x = 2$; e) $x = -1$, $x = \dfrac{-8}{7}$

131. a) Dado que $a < b$ y $c < d$, se tiene:
$\left.\begin{array}{l} a + c < b + c \\ c + b < d + b \end{array}\right\} \Rightarrow a + c < b + d$
b) En este caso tenemos:
$\left.\begin{array}{l} a - c < b - c \\ -c > -d \end{array}\right\}$

133. a) Conjunto solución: $S = (-5, 5)$

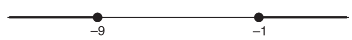
b) Conjunto solución: $S = (-\infty, -1) \cap (1, +\infty) = \varnothing$



c) Sistema de inecuaciones:

Conjunto solución: $S = [-4, 2]$

d) Sistema de inecuaciones:
Conjunto solución: $S = (-\infty, -9] \cap (-1, +\infty) = \varnothing$

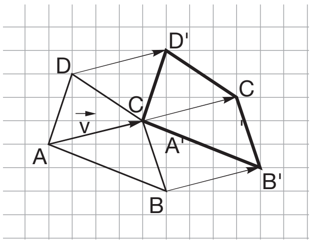


135. Tendrá que prescindir de más de 0,164 l de zumo de naranja, pero de menos de 0,325 l.

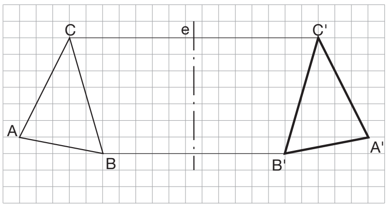
Ejercicios y problemas

19. Traslación: las rectas paralelas al vector de traslación.
Simetría central: el centro de simetría y las rectas que pasan por el centro de simetría.
Simetría axial: el eje de simetría y las rectas perpendiculares a dicho eje.

21.



23. Porque los vértices homólogos no equidistan del eje *e*.
— Sobre la mediatriz del segmento que une dos vértices homólogos.



25. $A = 6a^2$
27. El área del cuerpo es de 308 cm^2.
29. El área del cubo es de 200 cm^2.
31. El área lateral del prisma es de 1 959,60 cm^2 y el área total, de 2 459,60 cm^2.
33. El área lateral del cilindro es de 226,08 cm^2 y el área total, de 452,16 cm^2.
35. Al considerar los ángulos como giros, el signo del ángulo indica si el sentido de giro es el de las agujas del reloj o si es el contrario.
37. Los resultados obtenidos deben aproximarse a
a) sen 62º = 0,88;
cos 62º = 0,47;
tan 62º = 1,88
b) sen 168º = 0,21;
cos 168º = −0,98;
tan 168º = −0,21
39. — El ángulo para que la cesta se encuentre en *B* es de 360°: 12 = 30°.
— El ángulo para que la cesta se encuentre en *C* es de 30° · 8 = 240°.
41. Se pueden poner puertas a 2 armarios, ya que tenemos 2 puertas
43. Hallamos el área lateral de una lata:

$A_{lateral} = 2\pi\, r \cdot g = 2\pi\, 7 \cdot 20 = 879{,}65\ cm^2$

El área lateral de las 100 latas será:

$879{,}65 \cdot 100 = 87\,965\ cm^2$

Por tanto, se necesitan 87 965 cm^2 de papel.

Hallamos el volumen de una lata.

$V_{cilindro} = \pi\, r^2 \cdot h = \pi \cdot 7^2 \cdot 20 = 3\,078{,}76\ cm^3$

El volumen de las 100 latas será:

$3\,078{,}76 \cdot 100 = 307\,876\ cm^3$

La masa de aceite que ocupa este volumen es:

$307\,876\ cm^3 \cdot 0{,}92\ g/cm^3 = 283\,246\ g$

Necesitaremos 283 246 g o 283,246 kg.

Simbología

$\{x_1, x_2, ...\}$	conjunto con elementos, $x_1, x_2, ...$
$n\,(A)$	número de elementos en el conjunto finito A
$\{x:\}$ o $\{x/\}$	el conjunto de todas las x tal que … ; pertenece a
$\in$	… es un elemento de … ; no pertenece a
$\notin$	… no es elemento de … .
$\varnothing$	conjunto vacío
U	conjunto universal o universo
$\mathbb{N}$	números Naturales, {0, 1, 2, 3, …}
$\mathbb{Z}$	números Enteros, {…, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, …}
$\mathbb{Z}^+$	números Enteros positivos, {+1, +2, +3, …}
$\mathbb{Z}^-$	números Enteros negativos, {…, –3, –2, –1}
$\mathbb{Q}$	números Racionales, $\{x: x =$, $b \neq 0,\ a,\ b \in \mathbb{Z}\}$
$\mathbb{R}$	números Reales
$\mathbb{R}^+$	números Reales positivos $\{x: x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$
$\cup$	unión de conjuntos
$\cap$	intersección de conjuntos
$\subset$	… es subconjunto de … .
$\subseteq$	… es subconjunto de o es igual a … .
A'	el complemento del conjunto A
$A \times B$	el producto cartesiano de los conjuntos A y B, $A \times B = \{(a, b) / a \in A,\ b \in B\}$
a/b	a dividido para b; $b \neq 0$
$a^{1/n}$, $\sqrt[n]{a}$	potencia $\frac{1}{n}$ de a o raíz enésima de a ; $n \neq 0$ y $n \neq 1$
$a^{½}$, $\sqrt{a}$	potencia $\frac{1}{2}$ de a o raíz cuadrada de $a \geq 0$

Glosario

Absoluto: lo que no tiene relación, limitación o dependencia. Así se habla en matemática del valor absoluto de un número, en estadística la frecuencia absoluta, etc.

Aleatorio: depende de algún suceso fortuito, casual.

Axial: referente a un eje. En geometría es la simetría alrededor de un eje.

Constante: valor fijo en un determinado proceso de cálculo.

Contiguo: que está tocando a otra cosa

Criterio: en matemática es un modelo para conocer la formación de una sucesión.

Dispersión: en estadística es las distribución de un conjunto de valores.

Generatriz: en matemática son las fracciones comunes que dan origen a un decimal periódico.

Homólogos: correspondencia entre los lados de dos figuras geométricas semejantes.

Igualdad: dos figuras geométricas son iguales si son coincidentes en cada uno de sus puntos. Dos figuras iguales siempre son congruentes, pero no siempre las figuras congruentes son iguales.

Isométrica: de igual medida.

Isomórfica: de igual forma.

Postulado: proposición aceptada como cierta, no evidente por sí misma. La Matemática lo considera sinónimo de axioma.

Probabilidad: razón entre el número de casos favorables en la realización de un suceso y los casos posibles, cuando todos los casos son igualmente posibles.

Progresión: sucesión de números que se derivan unos a otros según una cierta ley.

Propiedad: atributo esencial

Rango: amplitud de la variación de datos entre un límite menor y uno mayor.

Razón: es la relación entre 2 números o cantidades de la misma especie e indica el número de veces que la una contiene a la otra.

Relativo: no absoluto

Serie numérica: suma indicada de términos, dicha suma no se puede calcular exactamente más que en algunos casos particulares, pero sí encontrar un valor aproximado mediante una fórmula.

En la serie: $1 + 2 + 3 + \ldots + n$

La suma de n términos es: $\dfrac{n\,(n+1)}{2}$

Simetría: correspondencia de posición de las partes o puntos similares de un todo.

Sucesión: conjunto ordenado de números según cierta ley, dichos números son los términos de la sucesión.

Trigonometría: estudio de los elementos del triángulo y el cálculo de los mismos.