Álgebra Básica

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADISTICA
GEOGRAFIA E INFORMATICA

1. Teoría de conjuntos.

A continuación haremos un estudio intuitivo elemental de la llamada Teoría de Conjuntos, creación del matemático alemán Georg Cantor en el siglo XIX en el trabajo titulado «Grundlagen zu einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehere».

Al construir una teoría matemática, no es posible definir todos los conceptos que en ella aparecen y, por lo tanto, tendremos los llamados *conceptos no definidos* (de intentar definir todos los conceptos de una teoría, caeríamos pronto en definiciones circulares); en la teoría de conjuntos introducimos como concepto no definido el *conjunto*, del cual es claro que poseemos nociones intuitivas tales como: colección, agrupación, montón de entes u objetos, a los cuales llamaremos *elementos del conjunto*.

En adelante representaremos los conjuntos por letras latinas mayúsculas (A, B, C, etc.) y a los entes que formen el conjunto considerado, los representaremos por letras latinas minúsculas (a, b, c, etc.)

Cuando queremos indicar que un elemento «*a*» pertenece a un conjunto A anotamos:

$a \in A$

($\in$ es el símbolo de pertenencia).

Si queremos indicar que el elemento «*a*» no pertenece a un conjunto A,

anotamos:

$a \notin A$

($\notin$ es el símbolo de no pertenencia).

Sobre las formas de representar conjuntos, usaremos los siguientes convenios.

1. Si un conjunto está formado por un número finito de elementos, lo llamaremos «conjunto finito». Ejemplo: El conjunto de los países de América.

2. Si un conjunto está formado por un número infinito de elementos, lo llamaremos «conjunto infinito». Ejemplo: El conjunto de los números naturales.

Para representar en forma explícita (exhibir) los elementos de un conjunto, son habituales dos formas:

i) forma enumerativa o tabular:
Todos los elementos que pertenecen al conjunto se escriben entre llaves y separados por comas o bien se expresan en una tabla. Así, por ejemplo, si denotamos por A al conjunto de las vocales, tendremos como representación enumerativa del mismo:
$A = \{a, e, i, o, u\}$

ii) forma descriptiva:
Valiéndonos de las proposiciones podemos representar conjuntos en la forma:
$A = \{ x \mid P(x) \}$
usando la letra «x» como variable que representa a todos aquellos elementos que hacen la proposición $P(x)$ verdadera.[1]

Ejemplos:
1. $A = \{ x \mid x = \text{vocal del alfabeto latino} \}$
es decir:
$A = \{ a, e, i, o, u \}$
2. $B = \{ y \mid y = \text{color primario} \}$
es decir:
$B = \{ \text{rojo, amarillo, azul} \}$.
Consideremos un conjunto cualquiera A. Seleccionando elementos de A, podemos asociar al conjunto A un nuevo conjunto B al que llamaremos subconjunto de A; y escribimos en forma simbólica:
$B \subset A$
El símbolo $\subset$ se lee: «contenido en», y significa que todos los elementos de B pertenecen a A.
Una expresión equivalente a $B \subset A$ es $A \supset B$.
El símbolo $\supset$ se lee «contiene a».
El símbolo $\not\subset$ significa «no contenido en».
Ejemplo:
$A = \{a, b, c, d, e, f\}$
Algunos subconjuntos de A son :
$B_1 = \{a\}$
$B_2 = \{c, f\}$

[1] Nota: La barra vertical usada en la notación anterior:(|) significa «tales que». El conjunto A se lee entonces: el conjunto de los x tales que ...

$B_3 = \{a, b, c, d\}$, etc.
La formación de subconjuntos de un conjunto dado, se puede hacer valuando una proposición en el conjunto en cuestión y formando un conjunto con aquellos elementos que hagan la proposición verdadera.

Ejemplo:
A = {verde, rojo, violeta, amarillo, azul, café }
$P(x) = x$ es color primario.
Valuando $P(x)$ en A tenemos:

Verde es color primario	FALSO
Rojo es color primario	VERDADERO
Violeta es color primario	FALSO
Amarillo es color primario	VERDADERO
Azul es color primario	VERDADERO
Café es color primario	FALSO

De acuerdo con lo anterior, el conjunto B formado por los elementos «x» del conjunto A que hacen $P(x)$ verdadera es:
B = {rojo, amarillo, azul}
y escribimos $B \subset A$, es decir B es un subconjunto de A.

Una definición más precisa de subconjunto es la siguiente:

Definición 1.1

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que ***B* es un subconjunto de A** si y sólo si, la proposición
$x \in B \Rightarrow x \in A$
es verdadero para todos los elementos del conjunto B.

Aplicando esta definición al ejemplo anterior tenemos:
A = {verde, rojo, violeta, amarillo, azul, café }
B = {rojo, amarillo, azul}
Rojo $\in B$: verdadero
Rojo $\in A$: verdadero $\quad V \Rightarrow V \;\}\; V$
Amarillo $\in B$: verdadero
Amarillo $\in A$: verdadero $\quad V \Rightarrow V \;\}\; V$
Azul $\in B$: verdadero
Azul $\in A$: verdadero $\quad V \Rightarrow V \;\}\; V$
$\therefore$ por definición 1.1: $B \subset A$.

Definición 1.2

Dados dos conjuntos A y B, decimos que ***A* es un subconjunto propio de *B*** si, y sólo si, se cumple que:
$A \subset B$ y $A \neq B$.

Ejemplo:
Dado el conjunto $M = \{1, 5, 7\}$, son subconjuntos propios de M:
$\{1\}, \{1, 7\}, \{1, 5\}, \{5\}, \{5, 7\},\{7\}$.

Teorema 1.3

Todo conjunto es un subconjunto de sí mismo
$A \subset A$.

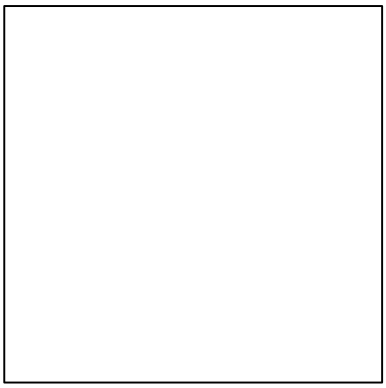
Demostración.

Efectivamente, todo elemento de A es de A, luego $A \subset A$ para cualquier conjunto A.¦

Diagramas de Venn

Para fijar la idea intuitiva de la contención, es conveniente asociar a cada conjunto una figura geométrica arbitraria (círculo, rectángulo, triángulo, etc.), que es lo que se denomina diagrama de Venn. Asociándole al conjunto A un círculo y al conjunto B un rectángulo, tendríamos para $B \subset A$ el diagrama de Venn:

A



B

el cual nos indica claramente que todo elemento de B pertenece a A pero no viceversa.

Como se advirtió al principio de este tema, el término conjunto no está definido y la idea intuitiva más aproximada es la de una colección de elementos sin embargo, esta idea intuitiva presenta dificultades en la definición siguiente:

Definición 1.4

Se le llama **conjunto vacío** al conjunto que no tiene elementos. Este conjunto estará representado por el símbolo ϕ.

Teorema 1.5

El conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto.

Demostración.

Tenemos que demostrar que para cualquier conjunto A se tiene:
$\phi \subset A$
Por definición de la contención debemos demostrar que
$x \in \phi \Rightarrow x \in A$
Por definición del conjunto vacío se tiene.
$x \in \phi$ es falso, pues ϕ no tiene elementos y como sabemos toda proposición compuesta formada por el conectivo condicional, es siempre verdadera en el caso que el antecedente sea falso; por lo tanto tendremos:
$x \in \phi$ (F) $\Rightarrow x \in A$ (F)   (VERDADERO)
$x \in \phi$ (F) $\Rightarrow x \in A$ (V)   (VERDADERO)
$\therefore \phi \subset A$. ¦

Ejemplo:
Sea $A = \{a, b, c\}$
$A_1 = \phi$
$A_2 = \{a\}$
$A_3 = \{b\}$
$A_4 = \{c\}$
$A_5 = \{a, b\}$
$A_6 = \{a, c\}$
$A_7 = \{b, c\}$
$A_8 = \{a, b, c\}$.[2]

[2] NOTA: En este ejemplo el conjunto A tiene 3 elementos y el número de subconjuntos es 8, es decir 2^3. Por inducción matemática podemos demostrar que el número de subconjuntos de un conjunto con «n» elementos es 2^n.

Definición 1.6
Sean A y B dos conjuntos. Diremos que **los dos conjuntos son iguales ($A = B$)**, si y sólo si, están formados exactamente por los mismos elementos.

Una definición de igualdad equivalente a la anterior es:
$A = B \iff A \subset B$ y $B \subset A$
dos conjuntos A y B son iguales, si y sólo si, todo elemento de A es también elemento de B y todo elemento de B lo es de A. Esta definición tiene mucha importancia pues, como veremos más adelante, el procedimiento general para verificar si dos conjuntos son o no iguales, está basado en ella.

Ejemplo:
$A = \{a, b, c, d\}$
$B = \{b, d, a, c\}$
i) $A \subset B$
tomando elemento por elemento tenemos:
$a \in A$ (V) $\Rightarrow$ $a \in B$ (V) (V)
$b \in A$ (V) $\Rightarrow$ $b \in B$ (V) (V)
$c \in A$ (V) $\Rightarrow$ $c \in B$ (V) (V)
$d \in A$ (V) $\Rightarrow$ $d \in B$ (V) (V)
$\therefore A \subset B$
ii) $B \subset A$
razonando de la misma manera que en el caso anterior tenemos:
$b \in B$ (V) $\Rightarrow$ $b \in A$ (V) (V)
$d \in B$ (V) $\Rightarrow$ $d \in A$ (V) (V)
$a \in B$ (V) $\Rightarrow$ $a \in A$ (V) (V)
$c \in B$ (V) $\Rightarrow$ $c \in A$ (V) (V)
$\therefore B \subset A$
entonces:
$A \subset B$ y $B \subset A \Rightarrow A = B$.

Propiedades de la contención
La contención relaciona dos conjuntos indicándonos que un conjunto es parte de otro o sea que, un conjunto es subconjunto de otro.

Propiedad 1:

La relación de contención es reflexiva, es decir:
$A \subset A$
Todo conjunto es un subconjunto de sí mismo. (¡Demuéstrelo!)

Propiedad 2:
La relación de contención es antisimétrica, es decir:
$A \subset B$ y $A \neq B \Rightarrow B \not\subset A$
esta propiedad también puede expresarse así:
$A \subset B$ y $B \subset A \Rightarrow A = B$
y significa que si un conjunto está contenido en otro, este otro no puede a su vez estar contenido en el primero, a menos que ambos conjuntos sean iguales. (¡Demuéstrelo!)

Propiedad 3:

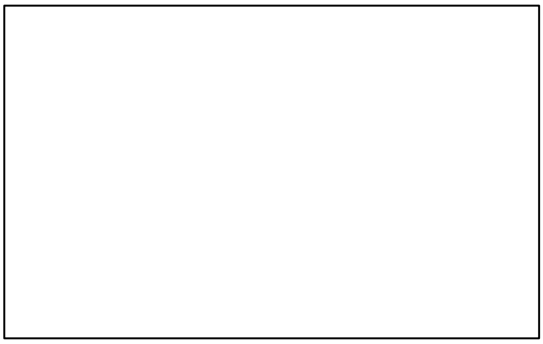
La relación de contención es transitiva, es decir:
$A \subset B$ y $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (¡Demuéstrelo!)

Propiedades de la igualdad (doble contención)
La igualdad relaciona dos conjuntos, estableciendo que ambos están formados por los mismos elementos.
Propiedad 1:
La relación de igualdad es reflexiva, es decir:
$A = A$.
Propiedad 2:
La relación de igualdad es simétrica, es decir:
$A = B \Rightarrow B = A$.
Propiedad 3:
La relación de igualdad es transitiva, es decir:
$A = B$ y $B = C \Rightarrow A = C$.

Operaciones entre conjuntos

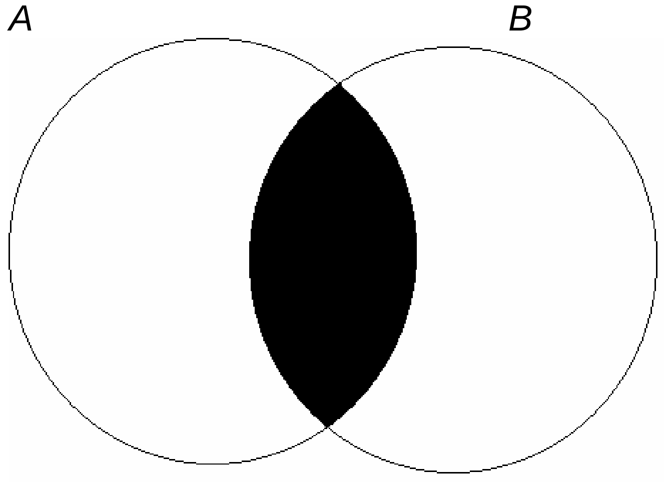
Ya establecidas las relaciones de igualdad y contención entre conjuntos, procedemos a continuación a estudiar la formación de nuevos conjuntos, a partir de dos o más conjuntos dados. Consideraremos las siguientes operaciones entre conjuntos: unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica.

i) *La operación «Unión» de conjuntos*
Sean A y B dos conjuntos.
Llamamos **unión de A con B (notación: $A \cup B$)**, al menor de todos los conjuntos que contenga a los conjuntos A y B.
Una definición equivalente a la anterior es: el conjunto unión de A con B, está formado por todos los elementos que están en A o en B, es decir:
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$.
Nótese que el «o» de la definición es inclusivo o sea que el conjunto unión de A con B, está formado por elementos que son de A, son de B o son de ambos y que en la notación de conjuntos, los elementos no aparecen repetidos.
Ejemplo:
$A = \{a, b, c\}$
$B = \{p, c, r, z\}$
$A \cup B = \{a, b, c, p, r, z\}$.
Es evidente que $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$.
Valiéndonos nuevamente de los diagramas de Venn tenemos para el conjunto unión:
A B



ii) *La operación «intersección» de conjuntos*
Sean A y B dos conjuntos.
Llamamos **intersección de A y B (notación: $A \cap B$)** al mayor de los conjuntos que está contenido en A y en B.
Una definición equivalente a la anterior es: El conjunto intersección de A con B, es el conjunto formado por los elementos que están en A y también en B, es decir:
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$.

Un diagrama de Venn que indica esta operación es



Ejemplos:

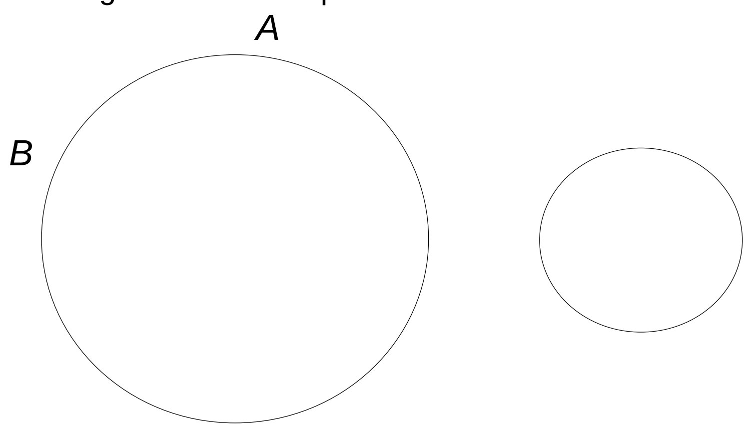
1. $A = \{a, b, c\}$
   $B = \{p, c, r, z\}$
   $A \cap B = \{c\}$
2. $A = \{1, 3, 5, 7\}$
   $B = \{2, 4, 6, 8\}$
   $A \cap B = \phi$.

DEFINICIÓN 1.7

Decimos que dos conjuntos A y B son **ajenos**, si y sólo si, no tienen elementos en común, es decir: que su intersección será un conjunto sin elementos, o sea, el conjunto vacío ya definido.

$A \cap B = \phi \Rightarrow A$ y B conjuntos ajenos.

Un diagrama de Venn para esta situación es:

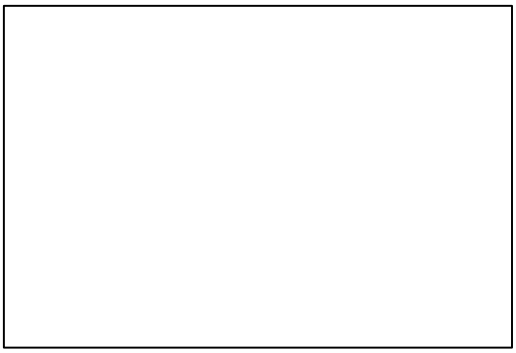


iii) *La operación «Diferencia» entre conjuntos*
Sean A y B dos conjuntos cualesquiera.
Llamaremos **diferencia de *A* con *B* (notación: *A* - *B*)** al conjunto formado por todos los elementos del conjunto A que no pertenecen al conjunto B es decir:
$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$.

Ejemplos:
1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 5, 7, 9\}$
   $A - B = \{1, ,2, 4\}$
   $B - A = \{7, 9\}$
2. $A = \{a, b, c\}$; $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
   $A - B = \phi$
   $B - A = \{d, f, g\}$.

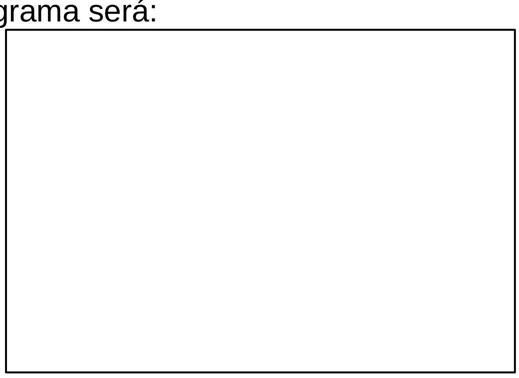
En un diagrama de Venn, tendremos para el conjunto diferencia entre A y B:

A



y para el caso $B - A$ el diagrama será:

A



De la definición de diferencia se deducen las propiedades siguientes:

Propiedad 1:
Para todo conjunto A se tiene que:
$A - A = \phi$.
Esto es, obvio, ya que la definición de diferencia en este caso nos da
$A - A = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \notin A\}$
no puede haber ningún elemento que al mismo tiempo sea y no sea de A. Por consiguiente:
$A - A = \phi$.

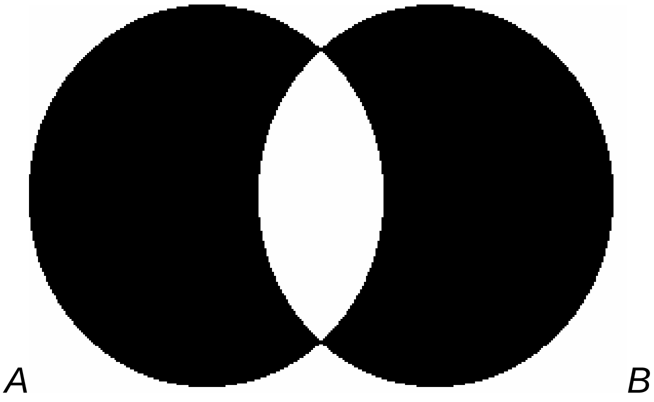
Propiedad 2:
Para todo conjunto A se tiene que:
$A - \phi = A$.

Propiedad 3:
Para todo conjunto A se tiene que:
$\phi - A = \phi$.

Propiedad 4:
Dados los conjuntos A y B se tiene que:
$A - B = B - A \Rightarrow A = B$.
Por definición de diferencia sabemos que:
$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$
$B - A = \{x \mid x \in B \text{ y } x \notin A\}$.
Si $A - B = B - A$, entonces todo elemento de $A - B$ será elemento de $B - A$ y todo elemento de $B - A$ será de $A - B$, pero a $A - B$ sólo pertenecen elementos de A y a $B - A$ sólo pertenecen elementos de B. Por consiguiente:
$A = B$.
iv) La operación «Diferencia simétrica» entre conjuntos
Sean A y B dos conjuntos.

Llamaremos **diferencia simétrica** de A y B (notación: $A \blacktriangle B$) al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto $A - B$ o al conjunto $B - A$, es decir:
$A \blacktriangle B = \{x \mid x \in A - B \text{ y } x \in B - A\}$
lo que equivale a decir
$A \blacktriangle B = (A - B) \cup (B - A)$.

En un diagrama de Venn tendremos, para el conjunto $A \blacktriangle B$:



Ejemplo:
$A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{b, c, m, n\}$
$A \blacktriangle B = \{a, d, m, n\}$

Definición 1.7

En cualquier aplicación de la teoría de conjuntos, todos los conjuntos que intervienen pueden considerarse como subconjuntos de un conjunto fijo. *A* este conjunto le llamamos **conjunto universal o universo** y lo denotamos por $\mathcal{U}$. El concepto de universo aquí definido tiene un sentido relativo; pueden escogerse universos arbitrarios.

v) Complemento de un conjunto
Sea $\mathcal{U}$ el conjunto universal de una teoría y sea *A* un subconjunto cualquiera de $\mathcal{U}$. Le llamamos **complemento del conjunto *A*** respecto del conjunto $\mathcal{U}$ (notación: A^c), el conjunto formado por todos los elementos que **no** pertenecen a *A* pero pertenecen a $\mathcal{U}$. Esta definición es equivalente a decir:
$A^c = \{x \mid x \in \mathcal{U} \text{ y } x \notin A\} = \mathcal{U} - A$.
El complemento de un conjunto es, entonces, la diferencia del conjunto $\mathcal{U}$ con el conjunto *A*. Siempre que se hable de complemento de un conjunto, se asume:

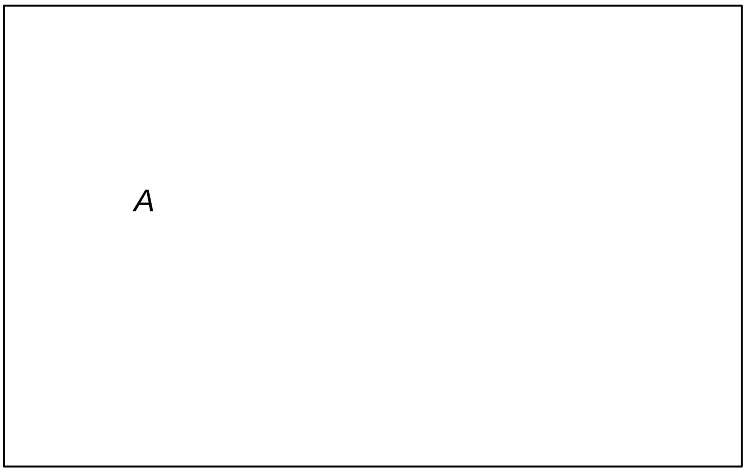
a) que se ha definido un universo,

b) que el o los conjuntos dados son subconjuntos del universo definido,

c) que un mismo conjunto puede tener diferentes complementos, según sea el universo en que se le considere incluido.

Haciendo uso de un diagrama de Venn, puede representarse al conjunto Universo por un rectángulo, y el complemento de un conjunto $A \subset \mathcal{U}$ será:

$\mathcal{U}$



Propiedades de la unión e intersección

Las siguientes son propiedades que cumplen las operaciones unión e intersección de conjuntos:

Asociatividad:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Conmutatividad:

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$.

Distributividad:

De la unión respecto de la intersección:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

de la intersección respecto de la unión:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$.

Idempotencia:

Para cualquier conjunto A, se tiene que

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$.

En la definición 1.6, se habló de la igualdad de conjuntos y se le definió como una doble contención; o sea:
$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ y $B \subset A$.
Dos conjuntos son iguales si y sólo si, uno está contenido en el otro y a su vez este otro está contenido en el primero.
Basándonos en esta propiedad puede encontrarse un procedimiento general para establecer si dos conjuntos dados son iguales o no lo son.
Usaremos la doble contención para demostrar una de las propiedades definidas en el inciso anterior: La distributividad de la unión respecto de la intersección.
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?
Uno de los conjuntos es $A \cup (B \cap C)$, el otro es $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Para probar que estos dos conjuntos son iguales, debe razonarse en dos partes:
i) $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$? (contención en un sentido)
y
ii) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$? (contención en el otro sentido)

Demostración.

i) $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$?
De ser cierta esta contención deberá cumplirse que todo elemento del conjunto $A \cup (B \cap C)$, pertenezca al conjunto $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, es decir:
$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cap C)$
(de acuerdo con la definición de contención)
ahora bien, si $x \in A \cup (B \cap C)$ quiere decir que x pertenece a la unión del conjunto A con el conjunto $B \cap C$ o sea:
$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ ó $x \in (B \cap C)$
(por definición de la operación Unión)
De esto surge otra implicación, pues en la segunda proposición dice $x \in B \cap C$, lo que significa: x pertenece a la intersección de B con C. Entonces:
$x \in B \cap C \Rightarrow x \in B$ y $x \in C$
(por definición de intersección)
Reuniendo todo lo deducido, tenemos entonces, como consecuencia de que $x \in A \cup (B \cap C)$, lo siguiente:
$x \in A$ ó $(x \in B$ y $x \in C)$ el «o» inclusivo y el conectivo «y» nos indican las 3 posibilidades siguientes:

1. que x sea un elemento de A y también de la intersección de B y C
$x \in A$ y $x \in B \cap C$
en este caso: $x \in A$ y $x \in B$ y $x \in C$, luego:
$x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$
$\therefore x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. que x sea un elemento de A pero no lo sea de la intersección de B y C
$x \in A$ y $x \notin B \cap C$
en este caso, por ser x un elemento de A, puede ser de la unión de A con cualquier otro conjunto, luego:
$x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$
entonces
$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3. que x no sea elemento de A pero sí de la intersección de B y C
$x \notin A$ y $x \in B \cap C$
en este caso, $x \notin A$ y $x \in B$ y $x \in C$, luego, por ser x un elemento de B lo será de $A \cup B$. Además, por ser x un elemento de C, lo será de $A \cup C$. Entonces
$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
De todo lo anterior se infiere que:
$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$
con lo cual se cumple la contención en un sentido:

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

[I]
Se procede ahora a demostrar la contención en el otro sentido:
ii) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$?
$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$
si x pertenece a $A \cup B$ y x pertenece a $A \cup C$, hay entonces 2 posibilidades:
$x \in A$ o bien $x \notin A$

1. Si $x \in A$, x sigue perteneciendo a la unión de A con cualquier conjunto, luego
$x \in A \cup (B \cap C)$.
2. Si $x \notin A$, entonces x deberá pertenecer a B (porque pertenece a $A \cup B$) y deberá pertenecer también a C (porque pertenece a $A \cup C$),
por tanto:
$x \in B \cap C$.

Si $x \in B \cap C$, seguirá siendo elemento de la unión de $B \cap C$ con cualquier otro conjunto, entonces:
$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$
con lo cual se cumple la contención en el otro sentido:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$$

[II]
como conclusión final, de [I] y [II]:
$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C) \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$
queda así demostrada la propiedad de distributividad de la unión, respecto de la intersección de conjuntos.

Fórmulas de De Morgan

Nos ocuparemos ahora de enunciar y demostrar dos igualdades de conjuntos, propuestas por el logístico inglés del siglo XIX De Morgan. Son ellas:
I. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
II. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.
Estas fórmulas pueden probarse para conjuntos cualquiera A y B por medio de la doble contención, igual que en demostración anterior. Demostraremos la fórmula I:
$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$?
El razonamiento que debe seguirse para probar la igualdad de los 2 conjuntos es el siguiente:
1. $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$ (contención en un sentido).
2. $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$ (contención en el otro sentido).

Demostración.

1. $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$?
$x \in (A \cup B)^C \Rightarrow x \notin A \cup B$.
Si x no pertenece a la unión de los conjuntos A y B, no podrá ser elemento de A ni de B:
$x \notin A$ y $x \notin B$.
$(x \notin A \Rightarrow x \in A^C$ y $x \notin B \Rightarrow x \in B^C) \Rightarrow x \in A^C \cap B^C$
es decir que $x \in (A \cup B)^C \Rightarrow x \in A^C \cap B^C$ o sea

$$(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$$

[I]
2. $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$?
$x \in A^C \cap B^C \Rightarrow x \in A^C \Rightarrow x \notin A$ y $x \in B^C \Rightarrow x \notin B$.
Si $x \notin A$ y $x \notin B$, entonces x no pertenecerá a $A \cup B$
$x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cap B)^C$

es decir: $x \in A^C \cap B^C \Rightarrow x \in (A \cup B)^C$ o sea

$$A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$$

[II]

como conclusión final de [I] y [II]:

$(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$ y $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C \Rightarrow (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

queda así demostrado que: el complemento de la unión de 2 conjuntos, es igual a la intersección de los complementos de dichos conjuntos.

Demostración de la fórmula II: Siguiendo el mismo procedimiento indicado anteriormente, tenemos:

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$?

Debe probarse que:

i) $(A \cap B)^C \subset A^C \cup B^C$

y

ii) $A^C \cup B^C \subset (A \cap B)^C$

i) $x \in (A \cap B)^C \Rightarrow x \notin A \cap B$ y por lo tanto:

$x \notin A$ ó $x \notin B$, es decir $x \in A^C$ ó $x \in B^C$, entonces:

$x \in A^C \cup B^C$.

En consecuencia:

$$(A \cap B)^C \subset A^C \cup B^C$$

[I]

ii) Sea $y \in A^C \cup B^C$

$y \in A^C \cup B^C \Rightarrow y \in A^C$ ó $y \in B^C$

la proposición $y \in A^C$ ó $y \in B^C$ induce 3 posibilidades:

1. Si $y \in A^C$.
2. Si $y \in B^C$.
3. Si $y \in A^C$ y $y \in B^C$.

Si $y \in A^C$ entonces $y \notin A \therefore y \notin (A \cap B) \therefore y \in (A \cap B)^C$.

Si $y \in B^C$, entonces $y \notin B \therefore y \notin (A \cap B) \therefore y \in (A \cap B)^C$.

Si $y \in A^C$ y $y \in B^C$, entonces $y \notin A$ y $y \notin B$, por lo tanto:

$y \notin A \cap B \therefore y \in (A \cap B)^C$.

Por todo lo anterior se concluye que:

$y \in A^C \cup B^C \Rightarrow y \in (A \cap B)^C$ o sea

$$A^C \cup B^C \subset (A \cap B)^C$$

[II]

Conclusión final de [I] y [II]:

$(A \cap B)^C \subset A^C \cup B^C$ y $A^C \cup B^C \subset (A \cap B)^C \Rightarrow (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

queda así demostrado: que el complemento de la intersección de dos conjuntos, es igual a la unión de los complementos de dichos conjuntos.

Ejercicios

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son finitos y cuáles infinitos?
a) Los meses del año.
b) {1, 2, 3, …,99, 100}.
c) Los habitantes de la Tierra.
d) $\{x \mid x$ es un número par$\}$
e) {1, 2, 3, 4, …}.
2. De los siguientes conjuntos, indicar cuáles son finitos y cuáles infinitos:
a) Los astros del sistema solar.
b) Los números enteros menores de 10.
c) Los glóbulos rojos en una persona.
d) $\{x \mid x$ es un número primo$\}$.
e) Las rectas del plano.
f) Los puntos de una recta.
3. ¿ Cómo escribiríamos usando la notación enumerativa, el conjunto cuyos elementos son: *a*, 1, , ∇, sol ?
4. Teniendo en cuenta que el orden y la repetición no alteran a un conjunto, diga ¿cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?:
$\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, r\}$, $\{s, r, s, t\}$.
5. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?:
f, {0}, {f}.
6. Dense listas de todos los subconjuntos de los siguientes conjuntos:
i) f.
ii) {f}.
iii) {2, 4}.
iv) {1, 2, 3}.
7. Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.
Encontrar: a) 3 subconjuntos ajenos
b) 3 subconjuntos no ajenos
c) 4 subconjuntos propios.
8.Enumere los subconjuntos del conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.
¿Cuáles de ellos son subconjuntos propios de *A*?
¿Cuáles son subconjuntos impropios de *A*?
9. Sean los conjuntos:
$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 8$ y $x < 16\}$.
$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x$ positivo par y $x \leq 12\}$.
$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x$ múltiplo de 3 y $5 < x < 20\}$.
Encontrar:
a) $A \cup (B \cap C)$.

b) $A - B$.
c) $(B - A) - C$.
d) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Producto Cartesiano

El concepto fundamental de este tema es el de «par ordenado», que al igual que «conjunto» no será definido, pero en forma intuitiva diremos que es un ente constituido por dos objetos en un orden determinado, es decir que tenemos un primer y un segundo elemento del par, los cuales se escribirán dentro de un paréntesis y separados por una coma.
(a, b) es entonces el par ordenado cuyo primer elemento es el objeto «a» y cuyo segundo elemento es el objeto «b».

Definición 1.8

(Igualdad de pares ordenados) Sean (a, b) y (c, d) dos pares ordenados; se dice que ambos pares son **iguales** si y sólo si, son iguales sus primeros elementos y sus segundos elementos
$(a, b) = (c, d) \iff a = c$ y $b = d$.
Ejemplos:
$(4, 7) = (4, 7)$ porque $4 = 4$ y $7 = 7$.
$(4, 7) \neq (4, 6)$ pues por definición de igualdad deberíamos tener $4 = 4$ y $7 = 6$ que es falso. (El símbolo $\neq$ significa no igual, es decir distintos).

Definición 1.9

(Producto cartesiano de dos conjuntos) Sean A y B dos conjuntos; llamaremos **producto cartesiano de *A* con *B* (notación $A \times B$)** al conjunto formado por todos los pares ordenados que puedan construirse tomando los elementos de A como primeros y los de B como segundos elementos en cada par, es decir:
$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ y } y \in B\}$.
Si ambos conjuntos son iguales, el producto cartesiano es:
$A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \text{ y } y \in A\}$.

Propiedad:

El producto cartesiano de dos conjuntos no es conmutativo, es decir que en general $A \times B \neq B \times A$, salvo el caso en que $A = B$, o sea:
$A \neq B \Rightarrow A \times B \neq B \times A$.

Demostración:
$A \neq B \;\Rightarrow\; \exists\; y \in A \ni y \notin B \;\Rightarrow\; \exists\; (y, \bullet) \in A \times B$ y $(y, \bullet) \notin B \times A \;\Rightarrow\; A \times B \neq B \times A$. ¦

Ejemplos:
1. Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d\}$.
$A \times B = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, b), (c,d)\}$
$B \times A = \{(b, a), (b, b), (b, c), (d, a), (d, b), (d,c)\}$.
2. Sea $M = \{1, 2\}$, entonces $M \times M = \{(x, y) \mid x \in M$ y $y \in M\}$
es decir:
$M \times M = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.
3. Sea Z el conjunto de los números enteros, entonces
$Z \times Z = \{(x, y) \mid x \in Z$ y $y \in Z\}$
es el conjunto formado por todos los pares de números enteros.
En el ejemplo (1) puede observarse que $A \times B \neq B \times A$ porque de acuerdo con la definición de conjuntos iguales deberían estar constituidos por los mismos elementos, circunstancia que en este caso no se cumple, por la definición de igualdad de pares ordenados; por ejemplo:
$(a, b) \neq (b, a)$.

Ejercicios
1. Si $P = \{1, 2\}$, exprese el producto cartesiano $P \times P$.

2. MONOMIOS Y POLINOMIOS

Polinomio

Una expresión que es la suma de muchos términos.
La anterior definición del diccionario para un polinomio es sugestiva pero no es lo bastante precisa para los matemáticos.
La expresión
$2x^{-2} + \sqrt{x} + 1/x$
es una suma de varios términos pero no es un polinomio. Por otro lado, $3x^4$ es un sólo término y sin embargo es un polinomio. Fundamentalmente, un **polinomio real en *x*** es una expresión que puede obtenerse a partir de los números reales y de x utilizando solo las operaciones de suma, resta y multiplicación. Por ejemplo, se obtiene
$3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ o $3x^4$
multiplicando. Se puede obtener $2x^3$ con el mismo proceso y

después obtener
$3x^4 + 2x^3$
sumando. Nunca se obtendrá $2x^{-2} = 2/x^2$ o vx; la primera involucra una división, y la segunda calcular una raíz. Entonces $2/x^2$ y vx no son polinomios. Trátese de ver que las expresiones enmarcadas arriba son polinomios.
Hay otra manera de definir polinomio con menos palabras. Un **polinomio real en *x*** es cualquier expresión de la forma
$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$
donde las a son números reales y n es un entero no negativo. No se tendrán muchos casos que involucren polinomios complejos en x, pero éstos se definen de la misma manera, exceptuando que se permite que las a sean números complejos. En cualquiera de los casos se denominarán a las a como **coeficientes**. El **grado** de un polinomio es el mayor exponente que aparece en el polinomio en un término con coeficiente distinto de cero.

A continuación se darán más ejemplos.
1. $3/2\ x - 5$ es un polinomio de primer grado (o **lineal**) en x.
2. $3y^2 - 2y + 16$ es un polinomio de segundo grado (o **cuadrático**) en y.
3. $\sqrt{3}t^5 - \pi t^2 - 17$ es un polinomio de quinto grado en t.
4. $5x^3$ es un polinomio de tercer grado en x. También se le llama **monomio** pues tiene un solo término.
5. 13 es un polinomio de grado cero. ¿Parece extraño? Si esto le ayuda véalo como $13x^0$. En general, cualquier polinomio constante distinto de cero tiene grado cero. No se definirá el grado del polinomio cero.

El tema de los polinomios sería oscuro y casi inútil si se quedara en la definición. Por fortuna, los polinomios -como los números- pueden manipularse. De hecho, se comportan de manera parecida a los enteros. De la misma manera que la suma, la resta y la multiplicación de dos enteros es un entero, la suma la resta y la multiplicación de dos polinomios es un polinomio. Obsérvese que no se mencionó a la división; ese tema se discutirá más adelante.

SUMA

Sumar polinomios es muy rápido. Considérese a x como un número y utilícese libremente las leyes conmutativa, asociativa y distributiva. Cuando se haya hecho esto, se descubrirá que sólo se han agrupado términos semejantes (esto es, términos del mismo grado) y sumado sus coeficientes. Aquí, por ejemplo, se muestra cómo sumar $x^3 + 2x^2 + 7x + 5$ y $x^2 - 3x - 4$.
$(x^3 + 2x^2 + 7x + 5) + (x^2 - 3x - 4)$
$= x^3 + (2x^2 + x^2) + (7x - 3x) + (5 - 4)$ propiedades asociativa y conmutativa
$= x^3 + (2 + 1)x^2 + (7 - 3)x + 1$ propiedad distributiva
$= x^3 + 3x^2 + 4x + 1$
¿Qué tan importantes son los paréntesis en este ejemplo? En realidad son necesarios sólo en la tercera línea, donde se utilizó la propiedad distributiva. ¿Por qué se utilizan la primera y segunda líneas? Porque muestran lo que está pasando. En la primera línea muestran qué polinomios se están sumando, en la segunda línea muestran los términos que se han agrupado.
Para dar más claridad al asunto obsérvese que
$x^3 + 3x^2 + 4x + 1$
es la respuesta correcta no sólo para
$(x^3 + 2x^2 + 7x + 5) + (x^2 - 3x - 4)$
Si no también para
$(x^3 + 2x^2) + (7x + 5 + x^2) + (-3x - 4)$
e inclusive para
$(x^3)+ (2x^2)+ (7x)+ (5) + (x^2) + (-3x) + (-4)$

RESTA

¿Cómo se restan dos polinomios? Se reemplaza el polinomio restado por su negativo y se suma. Por ejemplo, rescríbase
$(3x^2 - 5x + 2) - (5x^2 + 4x - 4)$
como $(3x^2 - 5x + 2) + (- 5x^2 - 4x + 4)$
Después de agrupar términos semejantes, se obtiene
$(3x^2 - 5x^2) + (- 5x - 4x) + (2 + 4)$
$(3 - 5)x^2 + (- 5 - 4)x + (2 + 4)$
$- 2x^2 - 9x + 6$
Si se puede ir directamente del problema original a la respuesta, hágase; no queremos que las cosas simples sean complicadas. Pero hay que estar seguro de que
$(3x^2 - 5x + 2) - (5x^2 + 4x - 4) \neq 3x^2 - 5x + 2 - 5x^2 + 4x - 4$
El signo menos que precede a $(5x^2 + 4x - 4)$ modifica los signos de los tres términos.

MULTIPLICACIÓN

La propiedad distributiva es la herramienta fundamental para la multiplicación. He aquí un ejemplo sencillo utilizando $a(b + c) = ab + ac$.
$(3x^2)(2x^3 + 7) = (3x^2)(2x^3) + (3x^2)(7) = 6x^5 + 21x^2$
El siguiente ejemplo es más complicado, emplea la propiedad distributiva $(a + b)c = ac + bc$ en el primer paso.
$(3x - 4)(2x^3 - 7x + 8) = (3x)(2x^3 - 7x + 8) + (-4)(2x^3 - 7x + 8)$
$= (3x)(2x^3) + (3x)(-7x)+ (3x)(8) + (-4)(2x^3) + (-4)(-7x)+ (-4)(8)$
$= 6x^4 - 21x^2 + 24x - 8x^3 + 28x - 32$
$= 6x^4 - 8x^3 - 21x^2 + 52x - 32$
Obsérvese que cada término de $3x - 4$ multiplica a cada término de $2x^3 - 7x + 8$.
Si el proceso que acabamos de ilustrar no queda muy claro, puede ser que el siguiente formato sea útil.

$$
\begin{array}{r}
2x^3 - 7x + 8 \\
\underline{3x - 4 \qquad\qquad} \\
6x^4 \qquad - 21x^2 + 24x \\
\underline{- 8x^3 \qquad + 28x - 32} \\
6x^4 - 8x^3 - 21x^2 + 52x - 32
\end{array}
$$

Cuando los dos polinomios son lineales (es decir, de la forma $ax + b$) hay un
camino más sencillo. Por ejemplo, echando un vistazo a $(x + 4)(x + 5)$ uno
reconoce que el producto es de la forma $x^2 + (\quad) + 20$. El término del centro es el que puede causar un pequeño problema. Piénsese de esta manera.
$(x + 4)(x + 5) = x^2 + 5x + 4x + 20$
Los cuatro términos son el producto de los primeros, los externos, los internos, y los últimos (método PEIU). Pronto podrá calcular este tipo de productos mentalmente.
Algunos productos aparecen con tal frecuencia que merecen un lugar especial.

$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$
$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

A continuación se dan algunas ilustraciones.

$(x + 7)(x - 7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$
$(x + 3)^2 = x^2 + 2{\cdot}3x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
$(x - 4)^2 = x^2 - 2{\cdot}4x + 4^2 = x^2 - 8x + 16$

En el recuadro anterior, se supuso que x era una variable y a una constante. Sin embargo, esto no es indispensable. Si se considera que x y a son variables, entonces las expresiones del tipo $x^2 - a^2$ y $x^2 + 2ax + a^2$ son polinomios en dos variables. Otros ejemplos son
$x^2y + 3xy + y$ $\quad u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$
Los polinomios de varias variables poco ofrecen respecto a la innovación.
Factorizar 90 significa escribirlo como un producto de números menores, factorizarlo completamente significa escribirlo como producto de primos, esto es, números que no se pueden factorizar más. Así, se ha factorizado 90 al escribir $90 = 9 \cdot 10$, pero no está factorizado completamente sino hasta que escribimos
$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
De manera similar, **factorizar** un polinomio significa escribirlo como un producto de polinomios más simples; **factorizar** un polinomio **completamente** es escribirlo como un producto de polinomios que ya no se pueden factorizar. Entonces, cuando se escribe
$x^3 - 9x = x(x^2 - 9)$
se ha factorizado $x^3 - 9x$, pero no es sino hasta que se escribe
$x^3 - 9x = x(x + 3)(x - 3)$
cuando se ha factorizado $x^3 - 9x$ por completo.

FÓRMULAS PARA PRODUCTOS NOTABLES →
←FÓRMULAS PARA FACTORIZACIÓN

1. $a(x + y + z) = ax + ay + az$
2. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
3. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
4. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
5. $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
6. $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
7. $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
8. $(x + y)((x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$
9. $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

El procedimiento más sencillo de factorización, se basa en la fórmula 1. Siempre debe intentar este procedimiento primero. Tome $x^6 + 2x^2$ como ejemplo. Los dos términos de $x^6 + 2x^2$ tienen a x^2 como factor, por lo que hay que sacarlo.

$x^6 + 2x^2 = x^2(x^4 + 2)$

Factorícese siempre lo más que se pueda. Sacar a 2 como factor de $4x^2 - 6x^3y^4 + 8x^4y^2$ no es suficiente, aunque sea un factor común; sacar a $2xy$ como factor tampoco es suficiente. Se debe sacar a $2xy^2$ como factor. Entonces

$4xy^2 - 6x^3y^4 + 8x^4y^2 = 2xy^2(2 - 3x^2y^2 + 4x^3)$

Al factorizar, como en la vida, se triunfa después de intentarlo muchas veces. Lo que no funciona se elimina de manera sistemática; el esfuerzo será recompensado tarde o temprano. Veamos cómo funciona este proceso en $x^2 - 5x - 14$. Es necesario encontrar números a y b tales que

$x^2 - 5x - 14 = (x + a)(x + b)$

Como ab debe ser igual a -14, de inmediato se piensa en dos posibilidades: $a = 7$ y $b = -2$ o $a = -7$ y $b = 2$. Intente ver si alguna de las dos posibilidades funciona.

$(x + 7)(x - 2) = x^2 + 5x - 14$

$(x - 7)(x + 2) = x^2 - 5x - 14$

¡Éxito!

Los corchetes ayudaron a calcular el término del centro, lo que es un paso crucial en este tipo de factorización.

Aquí hay un problema de factorización en el que hay que pensar bastante: factorícese $2x^2 + 13x - 15$. Es seguro decir que si $2x^2 + 13x - 15$ se puede factorizar, entonces

$2x^2 + 13x - 15 = (2x + a)(x + b)$

Como $ab = -15$, se puede intentar primero con combinaciones de 3 y 5.

$(2x + 5)(x - 3) = 2x^2 - x - 15$

$(2x - 5)(x + 3) = 2x^2 + x - 15$

$(2x + 3)(x - 5) = 2x^2 - 7x - 15$

$(2x - 3)(x + 5) = 2x^2 + 7x - 15$

Desalentador, ¿verdad? Pero es un motivo insuficiente para darse por vencido. Quizás se olvidaron algunas posibilidades. Así es, pues las combinaciones de 15 y 1 pueden funcionar.

$(2x - 15)(x + 1) = 2x^2 - 13x - 15$

$(2x + 15)(x - 1) = 2x^2 + 13x - 15$ ¡Éxito!

Cuando se tenga mucha práctica se podrá hacer en forma rápida este procedimiento. Simplemente se escribirá

$2x^2 + 13x - 15 = (2x + ?)(x + ?)$

y mentalmente se intentarán varias posibilidades hasta que se

encuentre la adecuada. Desde luego, puede suceder que, como en el caso de $2x^2 - 4x + 5$, no se pueda encontrar ninguna factorización.
Algunos polinomios de segundo grado (cuadráticos) son fáciles de factorizar.
$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)(x + 5) = (x + 5)^2$
$x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$
$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$
Estos están expresados según las fórmulas de los productos notables 3 y 4, las cuales están escritas a continuación, sustituyendo a x y y por a y b.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Se buscan el primero y el último términos que sean cuadrados, digamos de a y de b, por ejemplo. Después, se ve si el término central es dos veces su producto. Pero hay que ser muy flexible; a y b pueden ser muy complicados. Considérese $x^4 + 2x^2y^3 + y^6$. El primer término es el cuadrado de x^2 y el último es el cuadrado de y^3; el término central es dos veces su producto.
$x^4 + 2x^2y^3 + y^6 = (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)^2 = (x^2 + y^3)^2$
De manera similar,
$y^2z^2 - 6ayz + 9a^2 = (yz - 3a)^2$.
Sin embargo,
$a^4b^2 + 6a^2bc + 4c^2 \neq (a^2b + 2c)^2$
ya que el término central no concuerda.
¿Hay alguna característica común en los siguientes polinomios?
$x^2 - 16$, $y^2 - 100$, $4y^2 - 9b^2$
Cada uno de ellos es la diferencia de dos cuadrados. Por una de nuestras fórmulas para productos notables (fórmula 5), sabemos que

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Por lo tanto
$x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$
$y^2 - 100 = (y + 10)(y - 10)$
$4y^2 - 9b^2 = (2y + 3b)(2y - 3b)$

Ahora estamos listos para un tipo más elevado de factorizaciones. Considérese $8x^3 + 27$ y $x^3z^3 - 1000$. El primero es una suma de cubos y el segundo una diferencia de cubos. El secreto para tener éxito al factorizarlos son las dos fórmulas para productos notables de cubos que están escritas aquí.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Para factorizar $8x^3 + 27$, reemplácese a por $2x$ y b por 3 en la primera fórmula.

$8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3 = (2x + 3)[(2x)^2 - (2x)(3) + 3^2]$

$= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

De manera similar, para factorizar $x^3z^3 - 1000$, sea $a = xz$ y $b = 10$ en la segunda fórmula.

$x^3z^3 - 1000 = (xz)^3 - (10)^3 = (xz - 10)(x^2z^2 + 10xz + 100)$

Téngase la certeza de que se va a cometer un grave error si se escribe

$x^3 + y^3 = (x + y)^3$ ¡¡Error!!

Recuérdese que

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

¿Cuáles de los siguientes polinomios se pueden factorizar?

i) $x^2 - 4$

ii) $x^2 - 6$

iii) $x^2 + 16$

¿Sólo el primero? Esto es cierto si se insiste en tener coeficientes enteros, o como nosotros decimos, si se **factoriza sobre los enteros**. Pero, si se **factoriza sobre los reales** (es decir, si se insiste en que sólo los coeficientes sean reales), entonces se puede factorizar el segundo polinomio.

$x^2 - 6 = (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$

Si se factoriza sobre los números complejos, se puede factorizar también el tercer polinomio.

$x^2 + 16 = (x + 4i)(x - 4i)$

Por esta razón siempre se dirá qué tipo de coeficientes se acepta en la respuesta. Se dan indicaciones específicas en la siguiente sección de problemas. Por cierto, antes de empezar a resolver los problemas, revísese la portada de introducción de esta sección. Ahora tendrá más sentido.

Ejercicios.

Factorícese completamente sobre los enteros (esto es, se aceptan coeficientes enteros en las respuestas).
1. $x^2 + 5x$ **2**. $y^3 + 4y^2$ **3**. $x^2 + 5x - 6$ **4**. $x^2 + 5x + 4$
5. $y^4 - 6y^3$
6. $t^4 + t^2$ **7**. $y^2 + 4y - 12$ **8**. $z^2 - 3z - 40$ **9**. $y^2 + 8y + 16$
10. $9x^2 + 24x + 16$ **11**. $4x^2 - 12xy + 9y^2$
12. $9x^2 - 6x + 1$
13. $x^3 - x^3y^3$ **14**. $x^6 + x^3y^3$ **15**. $x^2 - 3$ **16**. $y^2 - 5$
17. $3x^2 - 4$
Factorícese completamente sobre los números reales.
18. $x^2 - 3$ **19**. $y^2 - 5$ **20**. $3x^2 - 4$ **21**. $5z^2 -4$
22. $t^4 - t^2$ **23**. $t^4 - 2t^2$ **24**. $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$ **25**. $y^2 - 2\sqrt{3}y + 3$
26. $x^2 + 4y^2$ **27**. $x^2 + 9$ **28**. $4x^2 + 1$
Factorícese completamente sobre los números complejos.
29. $x^2 + 9$ 30. $4x^2 + 1$

Exponentes

Un sermón largo lleva a un buen problema: «El sermón era largo y hacía mucho calor en el templo. Era difícil mantenerse despierto. Por un rato el joven Franklin Figit se divirtió hojeando el boletín dominical. Cansado de eso, trató de doblarlo de maneras cada vez más complicadas. Fue entonces cuando le surgió una idea brillante. "Me pregunto que pasaría" se dijo a sí mismo, "si tomara un boletín gigante, lo doblara a la mitad, luego nuevamente a la mitad y así hasta haberlo doblado 40 veces. ¿Qué altura tendría el paquete de papel formado de esta manera?"»

El joven Franklin formuló una pregunta muy interesante. ¿Cuál cree usted que sea la respuesta correcta? ¿10 pulgadas? ¿3 pies? ¿500 pies? Haga su apuesta y escríbala al margen. Cuando en esta sección se llegue a la respuesta correcta, lo más probable es que quedará muy sorprendido.

Empecemos ahora mismo a analizar el problema. Si el boletín tuviera c unidades de grosor ($c = 0.01$ pulgadas sería un valor razonable), después de doblar una vez se tendrían $2c$ unidades de grosor. Después de dos dobleces, mediría $2 \cdot 2c$ unidades

de grueso y después de doblar el boletín 40 veces se tendría un grosor de
$2 \cdot c$

Nadie que tenga sentido de la economía y de la elegancia, escribiría la multiplicación de cuarenta veces dos de esta manera. Para indicar un producto de este tipo, la mayor parte de la gente y todos los matemáticos prefieren escribir 2^{40}. El número 40 se llama **exponente** y nos indica el número de veces que hay que multiplicar a 2 consigo mismo. Al número 2^{40} se le llama una **potencia** de 2 y se lee «2 a la cuadragésima potencia», o «2 a la cuarenta».

En el caso general, si b es cualquier número (¾, π, $\sqrt{5}$, i,…) y n es un entero positivo, entonces
$b^n = b \cdot b \cdot \cdot \cdot b$
n factores

Entonces
$b^3 = b \cdot b \cdot b$ $\qquad$ $b^5 = b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$

¿Cómo escribiría el producto de 1000 veces b? El producto de 1000 veces b se escribe b^{1000}.
El comportamiento de los exponentes es excelente; está gobernado por algunas reglas sencillas fáciles de recordar. Considérese primero la multiplicación. Si se multiplica 2^5 por 2^8, se obtiene

$$\begin{aligned} 2^5 \cdot 2^8 &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 2^{13} = 2^{5+8} \end{aligned}$$

Esto sugiere que para encontrar el producto de potencias de 2 hay que sumar los exponentes. El 2 no tiene nada de particular; podría haber sido 5, 2/3, o π. Se puede escribir esta regla general usando los símbolos del álgebra.

$$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

Aquí b puede ser cualquier número, pero (por ahora) piénsese que m y n son enteros positivos. Hay que tener cierto cuidado con esta regla. Si se escribe

$$3^4 \cdot 3^5 = 3^9$$
$$\pi^9 \cdot \pi^{12} \cdot \pi^2 = \pi^{23}$$

estará bien. Pero no se trate de utilizar esta regla para $2^4 \cdot 3^5$ o $a^2 \cdot b^3$; simplemente no se puede aplicar.

Considérese ahora el problema de elevar una potencia a otra potencia. Por definición $(2^{10})^3$ es $2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}$, que permite aplicar la regla anterior.

Así,

$$(2^{10})^3 = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} = 2^{10+10+10} = 2^{10 \cdot 3}$$

Tal parece que elevar una potencia a otra potencia equivale a multiplicar los exponentes; en símbolos

$$(b^m)^n = b^{m \cdot n}$$

Trate de convencerse de que esta regla es válida para cualquier número b y para cualquier exponente entero positivo m y n.
Algunas veces es necesario simplificar cocientes del tipo

$$\frac{8^6}{8^6} \qquad \frac{2^9}{2^5} \qquad \frac{10^4}{10^6}$$

El primero es muy sencillo, es igual a 1. Pero,

$$\frac{2^9}{2^5} = \frac{2^5 \cdot 2^4}{2^5} = 2^4 = 2^{9-5}$$

y

$$\frac{10^4}{10^6} = \frac{10^4}{10^4 \cdot 10^2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10^{6-4}}$$

Esto ilustra las siguientes reglas generales.

$$\frac{b^m}{b^n} = 1 \qquad \text{si } m = n$$

$$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n} \qquad \text{si } m > n$$

$$\frac{b^m}{b^n} = \frac{1}{b^{n-m}} \qquad \text{si } m < n$$

En todos los casos hay que suponer que $b \neq 0$.
No se pusieron estas reglas en un recuadro simplemente por no estar satisfechos con ellas. Se lleva tres renglones para escribir lo que sucede al dividir potencias de un mismo número. De

hecho, es posible hacer mejor, pero primero se debe extender la noción de exponentes para números que no sean enteros positivos.

Hasta ahora no hemos utilizado símbolos como 4^0 o 10^{-3}. Se desea darles significado y que éste sea consistente con lo que se ha visto hasta ahora. Por ejemplo, 4^0 debe comportarse de manera que

$$4^0 \cdot 4^7 = 4^{0+7} = 4^7$$

Esto sucede sólo si $4^0 = 1$. De manera más general, es necesario que
$b^0 = 1$

Donde b puede ser cualquier número distinto a 0 (0^0 queda sin definir).
¿Qué sucederá con 10^{-3}? Si va a ser incluido en la familia de las potencias, debe seguir las reglas. Por lo que se insiste en que

$$10^{-3} \cdot 10^3 = 10^{-3+3} = 10^0 = 1$$

Esto significa que 10^{-3} tiene que ser el recíproco de 10^3. En consecuencia, se puede hacer la siguiente definición.

$$b^{-n} = 1/b^n \qquad b \neq 0$$

Esta definición lleva al modelo adecuado. Pero lo que es más significativo es que nos permite establecer la ley de división de potencias de una manera muy sencilla. Para llegar a esta ley, considere los siguientes pasos.

$$\frac{b^0}{b^{-6}} = \frac{1}{1/b^6} = b^6 = b^{0-(-6)}$$

$$\frac{b^4}{b^9} = \frac{b^4}{b^4 \cdot b^5} = \frac{1}{b^5} = b^{-5} = b^{4-9}$$

$$\frac{b^5}{b^5} = 1 = b^0 = b^{5-5}$$

$$\frac{b^{-3}}{b^{-9}} = \frac{1/b^3}{1/b^9} = \frac{b^9}{b^3} = b^6 = b^{-3-(-9)}$$

De hecho, para cualesquiera enteros m y n, se tiene que

$$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n} \qquad b \neq 0$$

¿Qué sucede con las dos reglas aprendidas antes? ¿Siguen siendo válidas cuando m y n son cualesquiera enteros (tal vez negativos)? La respuesta es sí. Unos ejemplos ayudarán a convencerse.

$$b^{-3} \cdot b^7 = \frac{1}{b^3} \cdot b^7 = \frac{b^7}{b^3} = b^4 = b^{-3+7}$$

$$(b^{-5})^2 = (1/b^5)^2 = 1/b^5 \cdot 1/b^5 = 1/b^{10} = b^{-10} = b^{(-5)(2)}$$

Muchas veces aparecen expresiones como $(ab)^n$ y $({}^a/_b)^n$; se necesitan reglas para manejarlas. Obsérvese que

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\ldots(ab)(ab)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ factores}} = a^n b^n$$

$$({}^a/_b)^n = \underbrace{({}^a/_b)({}^a/_b)\ldots({}^a/_b)}_{n \text{ factores}} = {}^{(a \cdot a \cdots a)}/_{(b \cdot b \cdots b)} = a^n/b^n$$

La demostración dada es válida para cualquier entero positivo n, pero los resultados son correctos aun cuando n sea negativo o cero, Entonces para cualquier entero n,

$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$({}^a/_b)^n = a^n / b^n$$

De esta manera,

$$(3x^2y)^4 = 3^4(x^2)^4y^4 = 81x^8y^4$$

y

$$(2x^{-1}/y)^3 = 2^3(x^{-1})^3 / y^3 = 2^3x^{-3} / y^3 = 8 / x^3y^3$$

Se resume nuestra discusión sobre los exponentes estableciendo cinco reglas
principales. Al utilizarlas se sobreentiende que la división entre cero debe prohibirse.

REGLAS DE LOS EXPONENTES

Sean a y b números (complejos o reales) y m y n enteros.

1. $b^m b^n = b^{m+n}$
2. $(b^m)^n = b^{mn}$
3. $b^m / b^n = b^{m-n}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $(^a/_b)^n = a^n / b^n$

Ahora resulta sencillo dar una respuesta al problema del papel doblado de Franklin Figit, si es que queda uno satisfecho con una razonable aproximación a la respuesta. Para ser precisos, aproxímese un pie a 10 pulgadas, una milla a 5000 pies y 2^{10} (que es en realidad 1024) a 1000. Entonces, un boletín que tenga un grosor de 0.01 pulgadas tendrá la siguiente altura al ser doblado 40 veces (≈ significa «es aproximadamente igual a»).

$$
\begin{aligned}
(0.01)2^{40} &= (0.01)\cdot 2^{10}\cdot 2^{10}\cdot 2^{10}\cdot 2^{10} \text{ pulgadas} \\
&\approx 1/10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \text{ pulgadas} \\
&\approx 10^{10} \text{ pulgadas} \\
&\approx 10^9 \text{ pies} \\
&\approx \frac{10\cdot 10^8}{5\cdot 10^3} \text{ millas} \\
&\approx 2\cdot 10^5 \text{ millas} \\
&\approx 200{,}000 \text{ millas}
\end{aligned}
$$

Este paquete de papel llegaría prácticamente a la Luna.

Ejercicios

Simplifíquense las expresiones que aparecen en los problemas. Dése la respuesta sin utilizar exponentes negativos.

1. $(\tfrac{1}{2}x^{-1}y^2)^{-3}$ 2. $(x + x^{-1})^2$ 3. $2^{-2}/[1 + 3^{-1}/(1 + 3^{-1})]$
4. $[(\tfrac{1}{2} + 2/3)^{-1} + (\tfrac{1}{4} + 1/3)^{-1}]^{-1}$ 5. $[(2x^{-1}y^2)^2/2xy]\cdot x^{-3}/y^3$
6. $(v2x^2y/xy^{-2}z^2)^4$ 7. $[(\tfrac{1}{2}x^{-2})^3(4xy^{-1})^2]^2$ 8. $[4y^2z^{-3}/x^3(2x^{-1}z^2)^3]^{-2}$
9. $(x^{-1} + y^{-1})^{-1}(x + y)$ 10. $[1 - (1 + x^{-1})^{-1}]^{-1}$

11. Exprésese cada uno de los siguientes incisos como una única potencia de dos.
  (a) $\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot {}^1/_8 \cdot {}^1/_{16} \cdot {}^1/_{32}$
  (b) $\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + {}^1/_8 + {}^1/_{16} + {}^1/_{32}$

12. Exprésese $8(^2/_3)^4 - 4(^2/_3)^5 + 2(^2/_3)^6 + 6(^2/_3)^7$ en la forma $2^m/3^n$.
13. ¿Cuál es el mayor, 2^{1000} o (10)300?
14. Considérese el problema del papel doblado de Franklin Figit con el que empieza esta sección. Si la pila de papel ocupa una pulgada cuadrada de base después de 40 dobleces, ¿qué área aproximada cubría al inicio?
15. J.P. Jiménez acordó pagarle a su nueva secretaria con base en el siguiente plan: 1 ctv el primer día, 2 cts el segundo día, 4 cts el tercer día, y así en adelante, duplicando la paga cada día.

(a) ¿Cuál será la ganancia de la secretaria en los primeros 4 días?¿en los 5?¿en los 6?

(b) De la parte (a) se puede reconocer un patrón. ¿Qué ganancia obtendrá la secretaria durante los *n* primeros días?

(c) Supóngase que Jiménez posee 2000 millones de dólares y que su secretaria entró a trabajar el primero de enero. ¿Cuándo quebrará Jiménez?

Radicales

A través de la historia el interés en los radicales se ha asociado con el deseo de resolver ecuaciones. Inclusive la ecuación cúbica general lleva a expresiones muy complicadas con radicales. Hoy en día, potentes métodos de iteración hacen que resultados como la solución de Cardano sean curiosidades históricas. Pero la necesidad de utilizar radicales continúa, por lo tanto es importante saber algo acerca de ellos.
Elevar un número al cubo es un proceso que se puede invertir. El proceso inverso —sacar raíz cúbica— se denota por ^{3}v. Se le llama a ^{3}v*a* un *radical* y se lee «la raíz cúbica de *a*». Entonces ^{3}v8 = 2 y ^{3}v(-125) = -5 ya que $2^3 = 8$ y $(-5)^3 = -125$.
Nuestro primer objetivo es darle un significado al símbolo ^{n}v*a* cuando *n* es cualquier entero positivo. Naturalmente, es necesario que ^{n}v*a* sea un número que al elevarlo a la *n*-ésima potencia dé *a*; esto es
(^{n}v*a*))^n = *a*

Cuando n es impar basta con esto pues para cualquier número real a hay exactamente un número real cuya n-ésima potencia es a.

Cuando n es par, se tienen dos serios problemas. Recuérdese que si $a < 0$, entonces $\sqrt{a}$ no es un número real (por ejemplo $\sqrt{-4} = 2i$). Inclusive si $a > 0$ se tienen ciertos problemas ya que siempre existen dos números reales cuyo cuadrado es igual a a. A manera de ejemplo, 3 y -3 son dos números cuyo cuadrado es 9. Se tiene el acuerdo de que en este caso ambiguo, $\sqrt{a}$ denotará siempre la raíz cuadrada positiva de a. De esta manera $\sqrt{9}$ es igual a 3 y no a -3. Se tiene un acuerdo similar con $\sqrt[n]{a}$ para n un número par mayor que 2. En primer lugar, se evita el caso en que $a < 0$. En segundo lugar, cuando $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ siempre denotará un número no negativo cuya n-ésima potencia es a. Entonces $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[4]{16} = 2$ y $\sqrt[4]{0} = 0$; sin embargo, $\sqrt[4]{-16}$ no tendrá significado alguno en este curso.
Resumiendo:
Si n es impar, $\sqrt[n]{a}$ es el único real que satisface $(\sqrt[n]{a})^n = a$
Si n es par y $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ es el único real no negativo que satisface $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
El símbolo $\sqrt[n]{a}$, como se ha definido aquí, se llama la **raíz n-ésima principal de a**; para ser más breves, generalmente se quita el adjetivo principal.
Los radicales, como los exponentes, obedecen a ciertas reglas. Las más importantes se enlistan a continuación, considerando que todos los radicales
indican números reales.

Reglas de los radicales

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$
2. $\sqrt[n]{a^n} = a \qquad (a \geq 0)$
3. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
4. $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}$

La regla 2 se satisface también para $a < 0$ si n es impar; por ejemplo $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$. Estas reglas se pueden demostrar, pero se considera que es de mayor utilidad dar algunos ejemplos que dar las demostraciones.
$(\sqrt[4]{7})^4 = 7$

$\sqrt[14]{3^{14}} = 3$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$

$\sqrt[3]{750} / \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{(750/6)} = \sqrt[3]{125} = 5$

Ejercicios

Simplifíquense las siguientes expresiones radicales. Esto involucra sacar potencias perfectas fuera de los radicales y racionalizar denominadores. Supóngase que todas las letras representan números positivos.

1. $\sqrt{9}$
2. $\sqrt[3]{(-8)}$
3. $\sqrt[5]{32}$
4. $\sqrt[4]{16}$
5. $(\sqrt[3]{7})^3$
6. $(\sqrt{\pi})^2$
7. $\sqrt[3]{(3/2)^3}$
8. $\sqrt[5]{(-2/7)^5}$
9. $(\sqrt{5})^4$
10. $(\sqrt[3]{5})^6$
11. $\sqrt{3} / \sqrt{27}$
12. $\sqrt{2}\,\sqrt{32}$
13. $\sqrt[3]{16} / \sqrt[3]{2}$
14. $\sqrt[4]{48} / \sqrt[4]{3}$
15. $\sqrt[3]{10^{-6}}$
16. $\sqrt[4]{10^8}$
17. $1 / \sqrt{2}$
18. $1 / \sqrt{3}$
19. $\sqrt{10} / \sqrt{2}$
20. $\sqrt{6} / \sqrt{3}$
21. $\sqrt[3]{54x^4y^5}$
22. $\sqrt[3]{(-16x^3y^8)}$
23. $\sqrt[4]{(x + 2)^4y^7}$
24. $\sqrt[4]{x^5(y - 1)^8}$
25. $\sqrt{(x^2 + x^2y^2)}$
26. $\sqrt{(25 + 50y^4)}$
27. $\sqrt[3]{(x^6 - 9x^3y)}$
28. $\sqrt[4]{(16x^{12} + 64x^8)}$
29. $\sqrt[3]{x^4y^{-6}z^6}$
30. $\sqrt[4]{32x^{-4}y^9}$
31. $2 / (\sqrt{x} + 3)$
32. $4 / (\sqrt{x} - 2)$
33. $2 / \sqrt{(x + 3)}$
34. $4 / \sqrt{(x - 2)}$
35. $1 / \sqrt[4]{8x^3}$
36. $1 / 3\sqrt{5x^2y^4}$
37. $\sqrt[3]{2x^{-2}y^4}$
38. $\sqrt[4]{125x^5y^3}\ \sqrt[4]{5x^{-9}y^5}$
39. $\sqrt{50} - 2\sqrt{18} + \sqrt{8}$
40. $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{375}$

3. RESOLUCION DE ECUACIONES

Algunas veces se puede resolver una ecuación por inspección. Se necesita muy poca imaginación y ningún recurso matemático para ver que

$x + 4 = 6$

tiene a $x = 2$ como solución. Por otro lado, resolver

$2x^2 + 8x = 8x + 18$

es ya un problema distinto. Para este tipo de ecuaciones, es necesario usar ciertos recursos. La estrategia general es modificar una ecuación paso a paso hasta llegar a una forma en que la solución sea obvia. Desde luego, hay que tener cuidado al hacer las modificaciones para no cambiar las soluciones. Euclides mostró el camino para esto también

Reglas para modificar ecuaciones

1. Si se suma la misma cantidad (o se resta) a ambos lados de una ecuación, sus soluciones no cambian.

2. Al multiplicar (o dividir) ambos lados de una ecuación por la misma cantidad distinta de cero, no cambian sus soluciones.

El tipo de ecuación más sencillo para resolver es aquél donde la *variable* (también llamada *incógnita*) aparece únicamente elevada a la primera potencia.

Considérese

$12x - 9 = 5x + 5$

El procedimiento es usar las reglas para modificar ecuaciones de manera que se lleven todos los términos en x de un lado de la igualdad y los términos constantes del otro lado, después se divide entre el coeficiente de x. El resultado será que estará sola la x de un lado de la ecuación y un número (la solución) del otro lado.

Ecuación dada: $12 - 9 = 5x + 5$

súmese 9:	$12x = 5x + 14$
réstese 5x:	$7x = 14$
divídase entre 7:	$x = 2$

Siempre es bueno verificar la respuesta. En la ecuación original se reemplaza x por el valor encontrado para saber si resulta una afirmación verdadera.

$$12(2) - 9 = 5(2) + 5$$
$$15 = 15$$

Una ecuación de la forma $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ se llama **ecuación lineal**. Tiene una solución, $x = -b/a$. Muchas ecuaciones que inicialmente no están en esa forma se pueden transformar en ella utilizando las reglas aprendidas.

Considérese

$$\frac{2}{x + 1} = \frac{3}{2x - 2}$$

si se excluye $x = -1$ y $x = 1$, entonces $(x + 1)(2x - 2)$ es distinto de cero, y se pueden multiplicar ambos lados de la ecuación por esa expresión. Se obtiene

$$[^2/_{(x+1)}]\,(x + 1)(2x - 2) = [^3/_{(2x-2)}]\,(x + 1)(2x - 2)$$
$$2(2x - 2) = 3(x + 1)$$
$$4x - 4 = 3x + 3$$
$$x = 7$$

Como de costumbre, se verifica la solución en la ecuación original.

$$^2/_{(7+1)} = {}^3/_{(14-2)}$$
$$^2/_8 = {}^3/_{12}$$

Por lo que $x = 7$ es una solución.

La importancia de verificar se ilustra en el siguiente ejemplo.

$$^{3x}/_{(x-3)} = 1 + {}^9/_{(x-3)}$$

Para resolverla, se multiplican ambos lados por $x - 3$ y después se simplifica.

$$[^{3x}/_{(x-3)}](x - 3) = \{1 + [^9/_{(x-3)}]\}(x - 3)$$
$$3x = x - 3 + 9$$
$$2x = 6$$
$$x = 3$$

Al verificar en la ecuación original, se obtiene

$$^{3 \cdot 3}/_{(3-3)} = 1 + {}^9/_{(3-3)}$$

Esto no tiene sentido pues requiere una división entre cero. ¿Qué estuvo mal hecho? Si $x = 3$, entonces en el primer paso se está multiplicando ambos
lados de la ecuación por cero, que es una operación contraindicada. Entonces,
la ecuación dada no tiene solución.

La estrategia de multiplicar ambos lados por $x - 3$ es correcta, aunque en este ejemplo nos lleve en un momento a una respuesta incorrecta. No debe uno preocuparse pues se sabía que al final se verificaría la respuesta. Es necesario verificar las respuestas siempre, en especial cuando se ha multiplicado por una expresión que involucra a la incógnita. Esa multiplicación puede introducir una solución *extraña* (pero nunca provoca la pérdida de una solución).
He aquí otro ejemplo de un tipo de ecuación similar.
$^{(x+4)}/_{(x+1)(x-2)} - {}^{3}/_{(x+1)} - {}^{2}/_{(x-2)} = {}^{-8}/_{(x+1)(x-2)}$
La única alternativa que se tiene, es multiplicar ambos lados de la ecuación por $(x + 1)(x - 2)$. Esto da

$$\begin{aligned} x + 4 - 3(x - 2) - 2(x + 1) &= -8 \\ x + 4 - 3x + 6 - 2x - 2 &= -8 \\ -4x + 8 &= -16 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

En esta etapa, $x = 4$ es una solución aparente; sin embargo, no se puede asegurar hasta no haber verificado en la ecuación original.
$^{(4+4)}/_{[(4+1)(4-2)]} - {}^{3}/_{(4+1)} - {}^{2}/_{(4-2)} = {}^{-8}/_{[(4+1)(4-2)]}$
$^{8}/_{5\cdot 2} - {}^{3}/_{5} - {}^{2}/_{2} = {}^{-8}/_{5\cdot 2}$
$^{8}/_{10} - {}^{6}/_{10} - {}^{10}/_{10} = {}^{-8}/_{10}$
Se da la igualdad, por lo tanto $x = 4$ es una solución.

Dos ecuaciones con dos incógnitas

«*La adivinanza del granjero: "Tengo una colección de gallinas y de conejos. Estos animales tienen 50 cabezas y 140 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos tengo?"*»
Nadie ha escrito más profunda o más extensamente sobre la resolución de problemas que George Polya. En su libro *Mathematical Discovery* (volumen I, Wiley, 1962) utiliza esta adivinanza del granjero como punto de inicio para un brillante ensayo sobre el establecimiento de ecuaciones para resolver problemas. Sugiere tres enfoques distintos que se puedan

utilizar para desenmarañar la adivinanza.
Hay 50 animales en total. No pueden ser todos gallinas, pues se tendrían 100 patas. No pueden ser todos conejos pues se tendrían 200 patas. Es seguro que la respuesta correcta está en algún lugar entre esos dos extremos. Si se intenta con 25 de cada uno nos da 50 patas de gallina y 100 patas de conejo, un total de 150, esto es demasiado. Se necesitan más pollos y menos conejos. Bueno, si se intenta con 28 gallinas y 22 conejos. Tampoco funciona. Trátese con 30 gallinas y 20 conejos. ¡Ya está! Esto nos da 60 patas más 80 patas, que es exactamente lo que se buscaba.
Úsese un poco de imaginación. Supóngase que cada gallina está parada en una de sus patas y cada conejo en sus dos patas traseras. Es una situación interesante, sólo la mitad de las patas, esto es 70 patas, están en uso. Se puede pensar en 70 como la suma de contar a cada gallina una vez y a cada conejo dos veces. Si se resta el número total de animales, es decir 50, se tiene el número de conejos.¡Ya está! Hay 70 - 50 = 20 conejos y 30 gallinas.
El método de tanteo (ensayo y error) consume mucho tiempo y es ineficiente, en especial cuando se tienen problemas con muchas posibilidades. Y no se puede esperar que se nos ocurra una idea brillante en cada problema. Es necesario un método sistemático que no dependa de un trabajo especulativo ni de ocurrencias súbitas. El álgebra nos proporciona ese método. Para utilizarla se tiene que llevar el problema a símbolos algebraicos y establecer ecuaciones.

ESPAÑOL	**SIMBOLOS ALGEBRAICOS**
El granjero tiene	
cierto número de gallinas	x
y	
cierto número de conejos.	y
Estos animales tienen 50 cabezas	$x + y = 50$
y 140 patas	$2x + 4y = 140$

Ahora se tienen dos incógnitas, x y y, pero también se tienen dos ecuaciones que las relacionan. Se quiere encontrar valores para x y para y de manera que satisfagan las dos ecuaciones al mismo tiempo. A continuación se dan dos métodos estándar.

MÉTODO DE SUMA O RESTA

Esta es otra regla, especialmente útil para resolver un **sistema de ecuaciones**, es decir, un conjunto de varias ecuaciones en varias incógnitas.

Regla 3

Se puede sumar una ecuación con otra (o restar una de otra) sin modificar las soluciones simultáneas de un sistema de ecuaciones.
A continuación se muestra cómo se utiliza esta regla para resolver la adivinanza del granjero.

Ecuaciones dadas:
$x + y = 50$ $2x + 4y = 140$
Multiplíquese la primera ecuación por (-2):
$-2x - 2y = -100$
Escríbase la segunda ecuación:
$\underline{2x + 4y = 140}$
Súmese las dos ecuaciones:
$2y = 40$
Multiplíquese por ½:
$y = 20$
Sustitúyase $y = 20$ en una de las dos ecuaciones (en este caso, se usará la primera):
$x + 20 = 50$
Súmese -20:
$x = 30$
La idea clave es ésta: multiplicando la primera ecuación por -2 se logra que los coeficientes de la x en las dos ecuaciones sean uno el negativo del otro. Al sumar las dos ecuaciones se elimina a x, obteniendo una ecuación con una sola incógnita y. La ecuación resultante se puede resolver utilizando los métodos aprendidos antes.

Método de sustitución

Considérese de nuevo la misma pareja de ecuaciones.
$x + y = 50$
$2x + 4y = 140$
Se debe resolver la primera ecuación para y en términos de x y después sustituir el resultado en la segunda ecuación
$y = 50 - x$

$2x + 4(50 - x) = 140$
$2x + 200 - 4x = 140$
$-2x = -60$
$x = 30$

Después se sustituye el valor obtenido para x en la expresión para y.
$y = 50 - 30 = 20$

Claro está que los resultados concuerdan con los obtenidos antes.

Sin importar qué método se utilizó, es conveniente verificar el resultado en el problema original. Treinta gallinas y 20 conejos si tienen un total de 50 cabezas y $(30)(2) + (20)(4) = 140$ patas.

Un problema de velocidad-distancia

Un avión, volando con la ayuda de un fuerte viento, cubrió 1200 millas en 2 horas. Sin embargo, el viaje de regreso contra el viento le tomó 2½ horas. ¿A qué velocidad vuela el avión en condiciones sin viento?, y ¿cuál era la velocidad del viento? Supóngase que ambas velocidades son constantes.
He aquí la solución:
x = velocidad del avión en millas por horas sin viento.
y = velocidad del viento en millas por hora.

Entonces
$x + y$ = velocidad del avión con el viento
$x - y$ = velocidad del avión contra el viento
A continuación, se da la fórmula ya familiar $D = VT$, o distancia igual a velocidad por tiempo. Aplicándola en la forma $TV = D$ para los dos viajes, se obtiene
$2(x + y) = 1200$ (con el viento)
$(5/2)(x - y) = 1200$ (contra el viento)
o de manera equivalente
$2x + 2y = 1200$
$5x - 5y = 2400$
Para eliminar y se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda por 2, y después se suman las dos ecuaciones.
$10x + 10y = 6000$
$\underline{10x - 10y = 4800}$
$20x = 10800$

$x = 540$
Por último, sustituyendo $x = 540$ en la primera de las dos ecuaciones originales, se obtiene
$2 \cdot 540 + 2y = 1200$
$1080 + 2y = 1200$
$2y = 120$
$y = 60$
Se concluye que la velocidad del avión sin viento era de 540 millas por hora y que la velocidad del viento era de 60 millas por hora.

Al verificar en el enunciado original del problema vemos que las respuestas son correctas. Con el viento, el avión vuela a 600 millas por hora y cubre 1200 millas en 2 horas. Contra el viento, el avión vuela a 480 millas por hora y se tarda 2½ horas en cubrir 1200 millas.

Ejercicios

En cada uno de los siguientes sistemas, encuéntrese el valor de las dos incógnitas que satisfacen ambas ecuaciones. Utilícese el método que prefiera.

1. $2x + 2y = 13$, $y = 13$
2. $2x - 3y = 7$, $x = -4$
3. $2u - 5v = 23$, $2u = 3$
4. $5s + 6t = 2$, $3t = -4$
5. $7x + 2y = -1$, $y = 4x + 7$
6. $7x + 2y = -1$, $x = -5y + 14$
7. $y = -2x + 11$, $y = 3x - 9$
8. $x = 5y$, $x = -3y - 24$
9. $x - y = 14$, $x + y = -2$
10. $2x - 3y = 8$, $4x + 3y = 16$

11. Rodrigo Rendón vendió dos automóviles recibiendo un total de $ 13 000. Si recibió $ 1 400 más por uno que por el otro, ¿cuál fue el precio de venta de cada uno?
12. La fortuna de Alejandra Suárez se estima en $ 5 000 más que el triple de la fortuna de su marido. El valor combinado de sus bienes asciende a $ 185 000. Encuéntrese el valor de cada fortuna.
13. Encuéntrese dos números cuya suma sea 1/3 pero cuya diferencia es 3.

14. La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 12 y cuando se invierten los dígitos, el valor del número crece en 54. Encuéntrese el número.
15. Si el numerador y el denominador de una fracción se incrementan en 1, el resultado es 3/5, pero si el numerador y el denominador disminuyen en 1, el resultado es 5/9. Encuéntrese la fracción.
16. Elisa Gorostiza necesita un préstamo de $ 80 000 para emprender un negocio . Por otra parte de una fundación de ayuda puede obtener un préstamo al 10% de interés simple; para el resto debe pagar el 12% de interés simple a un banco. Si el total de intereses en un año son $ 9 360, ¿Cuánto pedirá prestado a cada fuente?
17. La asistencia a un juego de fútbol profesional fue de 45 000 personas y el dinero recaudado en la entrada fue de $ 495 000. Si cada persona compró un boleto de $ 10 o un boleto de $ 15, ¿cuántos boletos de cada tipo se vendieron?
18. Volando con un viento de 60 millas por hora, un avión tardó 2 horas en ir de *A* a *B*; de regreso, viajando contra el viento, tardó 2 horas y 30 minutos. ¿Cuál es la velocidad del avión sin viento y a que distancia están *A* y *B*?
19. Una lancha de motor tardó 5 horas en ir río abajo de *A* a *B* y 7 horas en regresar. ¿Cuánto tiempo tardaría Huckleberry Finn para ir de *A* a *B* flotando en su balsa?
20. Cierta persona viaja en autobús y después en tren para ir diariamente a trabajar. Se tarda 45 minutos y le cuesta $ 3.^{05}. Estima que el tren viaja a un promedio de 50 millas por hora y que el autobús a solamente 25 millas por hora. si la tarifa del autobús es de 12 centavos de dólar la milla y la de tren es de 10 centavos de dólar la milla, ¿qué distancia recorre en cada medio de transporte? Supóngase que no pierde tiempo al transbordar del autobús al tren.

4. ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una ecuación lineal (de primer grado) puede expresarse en la forma $ax + b = 0$. Se vio que esas ecuaciones tienen exactamente una solución, $x = -b/a$. Es simple y no tiene rodeos; nadie dará un paso en falso con ellas. Pero hasta los antiguos babilonios sabían que la solución de ecuaciones iba mucho más allá de este simple caso. De hecho, una buena parte de la historia de las matemáticas se desarrolla alrededor de intentos por resolver ecuaciones cada vez más complicadas.

El siguiente caso que se debe tomar en consideración es el de segundo grado, o **ecuaciones cuadráticas**, esto es, una ecuación de la forma
$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$
He aquí algunos ejemplos.

i) $x^2 - 4 = 0$
ii) $x^2 - x - 6 = 0$
iii) $8x^2 - 2x = 1$
iv) $x^2 = 6x - 2$

Aunque las ecuaciones iii) y iv) no encajan en el patrón, se aceptan, pues se pueden transformar rápidamente en ecuaciones con la forma estándar.
iii) $8x^2 - 2x - 1 = 0$
iv) $x^2 - 6x + 2 = 0$

Soluciones por factorización

Se sabe que 0 veces cualquier número es 0. Otro hecho igualmente importante pero muchas veces olvidado es que si el producto de dos números es 0, entonces uno o ambos factores son 0.

Sí $u = 0$ o $v = 0$, entonces $u \cdot v = 0$
Sí $u \cdot v = 0$, entonces $u = 0$ o $v = 0$, o ambos

Este hecho nos permite resolver cualquier ecuación cuadrática igualada a 0 siempre y cuando se pueda factorizar el otro lado. Simplemente factorícese, iguálese cada factor a 0 y resuélvase las ecuaciones lineales resultantes. A continuación se ilustra lo anterior:
i) $x^2 - 4 = 0$
$(x - 2)(x + 2) = 0$
$x - 2 = 0 \qquad x + 2 = 0$
$x = 2 \qquad x = -2$
ii) $x^2 - x - 6 = 0$
$(x - 3)(x + 2) = 0$
$x - 3 = 0 \qquad x + 2 = 0$
$x = 3 \qquad x = -2$
iii) $8x^2 - 2x - 1 = 0$
$(4x + 1)(2x - 1) = 0$
$4x + 1 = 0 \qquad 2x - 1 = 0$
$x = -\frac{1}{4} \qquad x = \frac{1}{2}$

La ecuación iv) se deja sin resolver; no se sabe cómo factorizar el lado izquierdo. Para esta ecuación se necesita un método más poderoso. Sin embargo, primero es necesario un breve análisis de las raíces cuadradas.

Raíces cuadradas

El número 9 tiene dos raíces cuadradas, 3 y -3. De hecho, todo número positivo tiene dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa. Si *a* es positivo, su raíz cuadrada positiva se denota por v*a*. Entonces v9 = 3. No se escriba v9 = -3 o v9 = ± 3; ambas están mal. Pero se puede decir que las dos raíces cuadradas de 9 son ±v9 (0 ± 3) y que las dos raíces cuadradas de 7 son ± v7.

A continuación se dan dos propiedades importantes de las raíces cuadradas, válidas para cualesquiera números positivos

a y *b*.
v(*ab*) = v*a* · v*b*
v(*a*/*b*) = v*a* / v*b*
Por ejemplo,
v(4 · 16) = v4 · v16 = 2 · 4 = 8
v28 = v(4 · 7) = v4 · v7 = 2 · v7
v(4/9) = v4 / v9 = 2/3

Las raíces cuadradas de los números negativos son imaginarias. Por ejemplo, las raíces cuadradas de -9 son 3*i* y -3*i*, ya que
$(3i)^2 = 3^2 i^2 = 9(-1) = -9$
$(-3i)^2 = (-3)^2 i^2 = 9(-1) = -9$

De hecho, sí *a* es positivo, las dos raíces cuadradas de -*a* son ±v*ai*. Y en este caso, el símbolo v(-*a*) denotará a v*ai*. Entonces v(-7) = v7*i*.

Completando el cuadrado

Considérese de nuevo la ecuación iv).
$x^2 - 6x + 2 = 0$
Se puede escribir como
$x^2 - 6x = -2$
Súmese ahora 9 a ambos lados, haciendo que el lado izquierdo

sea un cuadrado perfecto, y factorícese.

$x^2 - 6x + 9 = -2 + 9$

$(x - 3)^2 = 7$

Esto significa que $x - 3$ debe ser una de las dos raíces cuadradas de 7 —esto es,—

$x - 3 = \pm v7$

Por lo tanto

$x = 3 + v7 \quad$ o $\quad x = 3 - v7$

Se preguntará cómo se supo que había que sumar 9. Cualquier expresión de la forma $x^2 + px$ sé tranforma en cuadrado perfecto cuando se le suma $(p/2)^2$

ya que

$x^2 + px + (p/2)^2 = (x + p/2)^2$

Por ejemplo $x^2 + 10x$ se transforma en cuadrado perfecto cuando se le suma $(10/2)^2$ o 25.

$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

La regla para completar cuadrados (a saber, sumar $(p/2)^2$) sólo se puede aplicar cuando el coeficiente de x^2 es 1. Sin embargo, este hecho no causa problemas en las ecuaciones cuadráticas. Si el coeficiente principal no es 1, simplemente se dividen ambos entre este coeficiente y después se completa el cuadrado. Se ilustra este procedimiento con la ecuación

$2x^2 - x - 3 = 0$

Se dividen ambos lados entre 2 y se procede como antes.

$x^2 - ½x - 3/2 = 0$

$x^2 - ½x = 3/2$

$x^2 - ½x + (¼)^2 = 3/2 + (¼)^2$

$(x - ¼)^2 = 25/16$

$x - ¼ = \pm 5/4$

$x = ¼ + 5/4 = 3/2 \quad$ o $\quad x = ¼ - 5/4 = -1$

La fórmula cuadrática

El método de completar cuadrados funciona con cualquier ecuación cuadrática. Pero hay una manera de hacer este procedimiento de una vez por todas. Considérese la ecuación general cuadrática

$ax^2 + bx + c = 0$

con coeficientes reales $a \neq 0$, b y c. Primero súmese $-c$ en ambos lados y después divídase entre a para obtener

$x^2 + (b/a)x = -c/a$

Después complétense cuadrados sumando $(b/2a)^2$ en ambos lados y simplifíquese.

$x^2 + (b/a)x + (b/2a)^2 = -c/a + (b/2a)^2$

$(x + b/2a)^2 = -c/a + b^2/4a^2$

$(x + b/2a)^2 = (b^2 - 4ac)/4a^2$

Por último, obténgase la raíz cuadrada de ambos lados.

$x + b/2a = \pm\sqrt{(b^2 - 4ac)}/2a$

Este resultado se conoce como **fórmula cuadrática** (o fórmula general de segundo grado) y normalmente se escribe de la siguiente manera:

$$x = \frac{-b \pm\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Veamos como se utiliza en el ejemplo iv).

$x^2 - 6x + 2 = 0$

Aquí, $a = 1$, $b = -6$ y $c = 2$. Entonces

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(36 - 4 \cdot 2)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{(4 \cdot 7)}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \frac{2(3 \pm \sqrt{7})}{2} = 3 \pm \sqrt{7}$$

Como segundo ejemplo, considérese $2x^2 - 4x + 25/8 = 0$. Aquí $a = 2$, $b = -4$ y $c = 25/8$. La fórmula cuadrática nos da

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(16 - 25)}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{(-9)}}{4} = \frac{4 \pm 3i}{4}$$

La expresión $b^2 - 4ac$ que aparece bajo el signo de la raíz cuadrada se llama discriminante. Determina el carácter de las soluciones.

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, hay dos soluciones reales.
2. Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una solución real.
3. Si $b^2 - 4ac < 0$, hay dos soluciones no reales (imaginarias).

EJERCICIOS

Resuélvase factorizando.

1. $10x^2 + 19x - 15 = 0$ 2. $6x^2 - 13x - 28 = 0$
3. $3x^2 + x - 2 = 0$ 4. $3x^2 + 5x - 2 = 0$
5. $x^2 + 13x + 22 = 0$ 6. $x^2 - 3x - 10 = 0$

Resuélvase completando cuadrados.

7. $x^2 - 14x = -65$ 8. $x^2 + 4x = -9$
9. $x^2 + 5x = 2¾$ 10. $z^2 - z = ¾$

Resuélvase utilizando la fórmula cuadrática.

11. $x^2 + x + 1 = 0$ 12. $2z^2 - 6z + 11 = 0$
13. $y^2 + 8y + 10 = 0$ 14. $x^2 + 5x + 5 = 0$

15. Un rectángulo tiene un perímetro de 26 y un área de 30. Encuéntrense sus dimensiones.
16. La suma de los cuadrados de tres enteros impares positivos consecutivos es 683. Encuéntrense los enteros.
17. Se utilizó un pedazo de cuadrado de cartón para construir una bandeja, cortando 2 pulgadas cuadradas de cada esquina y doblando después las pestañas. Encuéntrese el tamaño del cuadrado original, si la bandeja tiene un volumen de 128 pulgadas cúbicas.
18. Para cosechar un campo rectangular de trigo, que tiene 720 metros por 960 de área, un agricultor siega alrededor del campo, formando un borde, de trigo cortado que crece cada vez más, y deja en el centro un rectángulo de trigo sin cortar que disminuye regularmente. ¿Qué ancho tiene el borde cuando el agricultor ha segado la mitad del trigo?

Desigualdades

Resolver una desigualdad es muy parecido a resolver una ecuación. Sin embargo, hay riesgos si se procede en forma demasiado mecánica. Es
importante pensar en cada paso que se va a dar.
Recuérdese la distinción hecha entre identidades y ecuaciones. Una distinción similar se aplica a las desigualdades. Una desigualdad que es válida para todas las variables se llama **desigualdad incondicional**. Algunos ejemplos son

$(x - 3)^2 + 1 > 0$

y

$| x | \leq | x | + | y |$

La mayor parte de las desigualdades (por ejemplo, $-3x + 7 < 2$) son válidas sólo para algunos valores de las variables, éstas se conocen como **desigualdades condicionales**. La tarea principal en esta sección es resolver desigualdades condicionales, esto es, encontrar aquellos números que hacen válida a la desigualdad condicional.
Para resolver la desigualdad lineal $Ax + B < C$, se trata de reescribirla, en pasos sucesivos, hasta que la variable x quede sola de un lado de la desigualdad. Esto depende principalmente de las propiedades siguientes.

Propiedades de las desigualdades
1. (Transitividad). Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
2. (Suma). Sí $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
3. (Multiplicación). Sí $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$.
Sí $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$.

Se ilustra el uso de las propiedades, aplicadas a $\leq$ en lugar de a $<$, resolviendo la siguiente desigualdad.

$-2x + 6 \leq 18 + 4x$

Súmese $-4x$: $\quad -6x + 6 \leq 18$

Súmese -6: $\quad -6x \leq 12$

Multiplíquese por $-1/6$: $\quad x \geq -2$

Si se hace de manera apropiada, se deberá verificar esta solución. Todo lo que se sabe hasta ahora es que cualquier valor de x que satisface la desigualdad original satisface $x \geq -2$. ¿Se puede ir en dirección contraria? Sí, pues cada paso es reversible. Por ejemplo, empezando con $x \geq -2$, se puede multiplicar por -6 para obtener $-6x \leq 12$. En la práctica, realmente no hacemos esta verificación ya que se reconoce que la propiedad 2 puede volverse a enunciar así:

$a < b$ es equivalente a $a + c < b + c$.

Hay otros enunciados similares para la propiedad 3.

Para resolver

$x^2 - 2x - 3 > 0$

primero sé factoriza, obteniendo

$(x + 1)(x - 3) > 0$

A continuación se pregunta uno cuándo es positivo el producto de dos números. Hay dos casos: o bien ambos factores son negativos, o ambos son positivos.

***Caso* 1** (Ambos negativos) Se quiere saber cuándo son negativos los dos factores, esto es, se necesita resolver $x + 1 < 0$ y $x - 3 < 0$ simultáneamente. La primera da $x < -1$ y la segunda $x < 3$. Juntas dan $x < -1$.

***Caso* 2.** (Ambos positivos) Ambos factores son positivos cuando $x + 1 > 0$ y $x - 3 > 0$, esto es, cuando $x > -1$ y $x > 3$. Esto da $x > 3$.

El conjunto solución de la desigualdad original es la unión de las soluciones para los dos casos. En notación de conjuntos, esto se puede representar como

$\{x \mid x < -1 \text{ o } x > 3\}$

o como

$\{x \mid x < -1\} \cup \{x \mid x > 3\}$

Métodos con puntos de separación

El ejemplo anterior se pudo haber enfocado de una manera distinta utilizando la noción de puntos de separación. Las soluciones de $(x + 1)(x - 3) = 0$, que son -1 y 3, sirven como puntos de separación que dividen la recta real en tres intervalos: $x < -1$, $-1 < x < 3$ y $3 < x$. Como $(x + 1)(x - 3)$ puede cambiar de signo únicamente donde se hace cero, debe tener un signo en cada uno de esos intervalos. Para determinar cuáles de ellos dan el conjunto solución de la desigualdad $(x + 1)(x - 3) > 0$, sólo se necesita tomar un punto (arbitrario) de cada intervalo y examinarlo para incluirlo en el conjunto solución. Si se aprueba el criterio, el intervalo de donde se tomó pertenece por completo al conjunto solución.

Para mostrar cómo funciona este método, considérese la desigualdad de tercer grado
$(x + 2)(x - 1)(x - 4) < 0$
Las soluciones de la ecuación correspondiente
$(x + 2)(x - 1)(x - 4) = 0$
son -2, 1 y 4. Parten a la recta real en cuatro intervalos, $x < -2$, $-2 < x < 1$, $1 < x < 4$ y $4 < x$. Supóngase que se toma el punto -3 como punto a examinar para el intervalo $x < -2$. Véase que -3 hace que los tres factores $x + 2$, $x - 1$ y $x - 4$ sean negativos, y por lo tanto $(x + 2)(x - 1)(x - 4)$ es negativo. Hay que tomar distintos puntos de prueba de cada uno de los tres intervalos para comprobar el resultado.

Ejercicios

Resuélvanse las siguientes desigualdades y muéstrese el conjunto solución en la recta real.

1. $3x + 7 < x - 5$	**2**. $-2x + 11 > x – 4$
3. $(2/3)x + 1 > ½x – 3$	**4**. $3x - ½ < ½x + 4$
5. $¾x - ½ < (1/6)x + 2$	**6**. $(2/7)x + 1/3 \leq -(2/3)x + 15/14$
7. $(x - 2)(x + 5) \leq 0$	**8**. $x^2 - 5x + 4 \geq 0$
9. $x^2 + 4x + 3 \leq 0$	**10**. $2x^2 - 7x + 3 < 0$